Archivum Mathematicum

Michael Stieglitz

Über ausgezeichnete Tauber-Matrizen

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 227--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104704

ÜBER AUSGEZEICHNETE TAUBER-MATRIZEN

MICHAEL STIEGLITZ

Herrn O. Borůvka zum 70. Geburtstag am 10. 5. 1969 gewidmet

Eingegangen am 29. April 1969

1. EINLEITUNG

Ausgangspunkt dieser Note ist der folgende Satz (vgl. [5; S. 177]): „*Ist V ein permanentes, additives Verfahren zur Summierung unendlicher Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit komplexen Gliedern, und ist*

$$na_n = o(1) \qquad \textit{für} \qquad n \to \infty$$

eine Tauber-Bedingung für V, so ist auch

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} ka_k = o(1) \qquad \textit{für} \qquad n \to \infty$$

eine Tauber-Bedingung für V". Aus einer ersten Tauber-Bedingung (TB) für V wird also eine zweite TB für V hergeleitet. Schreibt man mit Hilfe zweier Matrizen T_1 und T_2 die erste TB in der Form $T_1a = o(1)$ und die zweite TB in der Form $T_2a = o(1)$ und ersetzt man ferner den Ausdruck Tauber-Bedingung für V durch den Terminus *Tauber-Matrix* (TM) für V, so läßt sich der obige Sachverhalt auch so formulieren: aus einer TM T_1 für V wird eine TM T_2 für V hergeleitet. Die TM T_1 in dem zitierten Satz hat eine sehr spezielle Form, nämlich $T_1 = \operatorname{diag}\{n\}$. Das legt nahe, nach Bedingungen zu suchen, unter denen ganz allgemein von einer vorgelegten TM T_1 für V auf eine neue TM T_2 für V geschlossen werden kann. Solche Bedingungen werden in Nr. 2 angegeben.

In Nr. 3 werden die gefundenen Ergebnisse auf den Spezialfall $T_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_n\}$ angewendet. Dabei läßt sich unter gewissen Bedingungen über die Folge $\{\lambda_n\}$ zeigen, daß die neue TM T_2 *T-stärker* ist als die alte TM T_1. Das soll (bezogen auf den obigen Fall, in welchem die TB T_1 und T_2 vom Typ o sind) heißen, daß erstens für jede konvergente Reihe $\Sigma\, a_n$ mit $T_1a = o(1)$ auch $T_2a = o(1)$ ist und zweitens es mindestens eine konvergente Reihe $\Sigma\, a_n$ mit $T_2a = o(1)$ gibt, für die nicht $T_1a = o(1)$ ist. Darüber hinaus kann der Fall eintreten, daß $T_2a = o(1)$ ist für *jede* konvergente Reihe $\Sigma\, a_n$. In diesem Sinn ist T_2 eine *ausgezeichnete Tauber-Matrix*, für die also gilt: eine V-summierbare Reihe $\Sigma\, a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $T_2a = o(1)$ ist.

2. TAUBER-MATRIZEN T_1 VON ALLGEMEINER FORM

Vorweg seien einige Bezeichnungen eingeführt. Ist $a = \{a_n\}$ eine komplexe Folge und $T = (\tau_{nk})_{0 \leqq n, k < \infty}$ eine komplexe Matrix, so wird die Folge $\{\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{nk} a_k\}_{0 \leqq n < \infty}$ mit Ta und $\lim_{n \to \infty} Ta$ mit $\lim Ta$ abgekürzt. Ist ferner α einer der Folgenräume c_0, c oder m, so ist mit $\alpha\, T$ die Menge $\{a : Ta \text{ existiert}, Ta \in \alpha\}$ gemeint. Dabei ist c_0, c bzw. m der Raum der Nullfolgen, der konvergenten bzw. der beschränkten Folgen. Weiter wird ein Verfahren zur Summierung unendlicher Reihen $\Sigma\, a_n$ stets mit V, der Wert einer V-summierbaren Reihe mit V-lim Sa und das Reihenwirkfeld von V mit V^* bezeichnet, wobei S die Abkürzung für die untere Dreiecksmatrix (s_{nk}) mit $s_{nk} = 1$ $(0 \leqq k \leqq n;\ n = 0, 1, \ldots)$ ist. V heißt permanent (null-permanent), wenn aus $\lim Sa = s$ $(= 0)$ stets V-lim $Sa = s$ $(= 0)$ folgt. Schließlich heißt V additiv, wenn aus V-lim $Sa = s$ und V-lim $Sb = t$ stets V-lim $S(a + b) = s + t$ folgt. Die Einheitsmatrix wird mit E bezeichnet.

Definition 1 *(Tauber-Matrix).* Es sei $\alpha = c_0$, c oder m. Dann wird eine Matrix T *Tauber-Matrix* vom Typ α bezüglich des Verfahrens V, in Zeichen T^α, genannt, wenn gilt

$$V^* \cap \alpha T \subseteq cS \qquad \text{mit} \qquad \lim Sa = \text{V-}\lim Sa \qquad (a \in V^* \cap \alpha T).$$

Satz 1. *Es sei V ein permanentes, additives Verfahren. Ferner sei* $T_1 = T_1^c$, *und es existiere eine rechtsinverse Matrix* T_1^{-1} *mit*

$$(1) \qquad T_1(T_1^{-1}a) = a \qquad (a \in c).$$

Ist dann T_2 eine Matrix, die der Beziehung

$$(2) \qquad Sa = S[T_1^{-1}(T_2 a)] + T_2 a \qquad (a \in V^* \cap cT_2)$$

genügt, so ist $T_2 = T_2^c$.

Zusatz: Sind T_1 *und* T_2 *untere Dreiecksmatrizen, so folgt* (2) *aus*

$$(3) \qquad S = (ST_1^{-1} + E)\, T_2.$$

Beweis. Sei $a \in V^* \cap cT_2$. Dann ist zu zeigen $a \in cS$ mit $\lim Sa =$ $=$ V-lim Sa. Wegen $a \in cT_2$ und der Permanenz von V ist V-lim $(-T_2 a) =$ $= -\lim T_2 a$. Daraus folgt für $b = T_1^{-1}(T_2 a)$ unter Verwendung von (2), der Additivität von V und $a \in V^*$, daß $b \in V^*$ und V-lim $Sb =$ V-lim Sa — $- \lim T_2 a$ ist. Da nach (1) außerdem $T_1 b = T_2 a \in c$, also $b \in cT_1$ ist, läßt sich die Voraussetzung $T_1 = T_1^c$ auf b anwenden, und man erhält $b \in cS$ mit $\lim Sb =$ V-lim $Sb =$ V-lim $Sa - \lim T_2 a$. Wegen (2) ist daher $a \in cS$ mit $\lim Sa = \lim Sb + \lim T_2 a =$ V-lim Sa.

Analog beweist man den

Satz 2. *Es sei V ein null-permanentes, additives Verfahren. Ferner sei* $T_1 = T_1^{c_0}$, *und es existiere eine rechtsinverse Matrix* T_1^{-1} *mit*

$$T_1(T_1^{-1}a) = a \qquad (a \in c_0). \tag{4}$$

Ist dann T_2 *eine Matrix, die der Beziehung*

$$Sa = S[T_1^{-1}(T_2 a)] + T_2 a \qquad (a \in V^* \cap c_0 T_2) \tag{5}$$

genügt, so ist $T_2 = T_2^{c_0}$.

Bezüglich (5) *gilt derselbe Zusatz wie in Satz* 1.

Aus diesen Sätzen ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 1. *In Satz* 1 *kann* T_1^c *durch* T_1^α ($\alpha = c$ *oder* m) *und* T_2^c *durch* T_2^β ($\beta = c_0$ *oder* c) (*sowie* c *in* (1) *und* (2) *durch* β) *ersetzt werden. In Satz* 2 *kann* $T_1^{c_0}$ *durch* T_1^α ($\alpha = c_0$, c *oder* m) *ersetzt werden.*

Ist T_1 eine normale TM, so läßt sich die TM T_2 der Sätze 1 und 2 explizit angeben.

Folgerung 2. a) *Es sei V ein permanentes, additives Verfahren. Ferner sei* $T_1 = T_1^\alpha$ ($\alpha = c$ *oder* m) *normal und genüge der Bedingung*

$$\tau_{nn}^{(1)} \neq -1 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Dann ist $T_2 := TT_1 = T_2^\beta$ ($\beta = c_0$ *oder* c) *mit*

$$T = (T_1 S^{-1} + E)^{-1} \tag{7}$$

und T_2 *außerdem normal.*

b) *Es sei V ein null-permanentes, additives Verfahren. Ferner sei* $T_1 = T_1^\alpha$ ($\alpha = c_0$, c *oder* m) *normal und genüge der Bedingung* (6). *Dann ist* $T_2 := TT_1 = T_2^{c_0}$ *mit* T *aus* (7) *und* T_2 *außerdem normal.*

Zum Beweis bestätigt man mit Hilfe bekannter Rechenregeln für Dreiecksmatrizen die Beziehungen (1), (3) und (4) und wendet dann die Sätze 1 und 2 sowie die Folgerung 1 an.

3. TAUBER-MATRIZEN T_1 VON DER SPEZIELLEN FORM $T_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_n\}$

In Nr. 2 wurde zu jeder TM T_1^α, die gewissen Bedingungen genügt, eine neue TM T_2^β angegeben. Es fragt sich nun, ob für jede konvergente Reihe $\Sigma\, a_n$ mit $T_1^\alpha a \in \alpha$ auch $T_2^\beta a \in \beta$ gilt oder gar $T_2^\beta a \in \beta$ für *jede* konvergente Reihe $\Sigma\, a_n$ ist. Das führt zu der

Definition 2 *(Ausgezeichnete Tauber-Matrix).* T_2^β heißt *T-stärker* als T_1^α, wenn $cS \cap \alpha T_1^\alpha \subset cS \cap \beta T_2^\beta$ ist. T^α heißt *ausgezeichnete Tauber-Matrix* (ATM), in Zeichen $\tilde{T}^\alpha$, wenn $cS \subseteq \alpha T^\alpha$ ist.

Da viele bekannte Tauber-Matrizen Diagonalform haben, wird dieser Spezialfall im folgenden weiter untersucht. Dabei zeigt sich, daß jede TM $T_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_n\}$ auf Grund der allgemeinen Ergebnisse der Nr. 2 zwangsläufig auf eine neue TM T_2 führt. Diese TM T_2 hat schon Herr D. Leviatan (vgl. Meyer-König und Tietz [5; S. 181]) angegeben. Genügt die TM T_1 zudem gewissen (nicht sonderlich einschneidenden) Bedingungen, so ist die TM T_2 sogar eine ausgezeichnete Tauber-Matrix.

Satz 3. *Es sei V ein permanentes, additives Verfahren. Ferner sei* $T_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_n\} = T_1^\alpha$ *($\alpha = c$ oder m) mit*

(8) $$\lambda_n \neq 0, -1 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist die Matrix $T_2 = (\tau_{nk}^{(2)})$,

(9) $$\tau_{nk}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_k}{\sigma_{n+1}} & (0 \leqq k \leqq n;\ n = 0, 1, \ldots) \\ 0 & (\textit{sonst}) \end{cases}$$

mit

(10) $$\sigma_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k}\right) & (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

a) *normal, und es gilt* $T_2 = T_2^\beta$ *($\beta = c_0$ oder c).*

Genügt T_1 *darüber hinaus den Bedingungen*

(11) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} = \infty^{1)}$$

und

(12) $$\sup_{0 \leqq n < \infty} \frac{1}{|\sigma_{n+1}|} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\sigma_k}{\lambda_k} \right| < \infty^{2)},$$

so hat T_2 *die weiteren Eigenschaften:*

b) *Die durch die Beziehung* $T_2 = TT_1$ *definierte Matrix* T *ist eine permanente, normale Matrix.*

c) *Es ist* $T_2 = \tilde{T}_2^{c_0}$ *(also auch* $T_2 = \tilde{T}_2^\beta$*).*

---

1) Andernfalls wäre $\alpha T_1 \subseteq mT_1 \subseteq cS$, d. h. T_1 triviale TM.

2) Die Bedingung (12) folgt i. a. nicht aus (8) und (11), wie das Gegenbeispiel $\lambda_n = (-1)^n(n + 1)$ zeigt.

d) *Im Fall* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mid \lambda_n \mid < \infty$ *ist* $T_1 = \tilde{T}_1^{c_0}$ (*also auch* $T_1 = \tilde{T}_1^{\alpha}$). *Im Fall*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid \lambda_n \mid = \infty \tag{13}$$

ist $T_2^{c_0}$ T-*stärker als* T_1^m (*also auch* T_2^{β} T-*stärker als* T_1^{α}).

Beweis. Zu a). Setzt man $T_2 = TT_1$, so ist $T = (\tau_{nk})$,

$$\tau_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_k}{\lambda_k \sigma_{n+1}} & (0 \leqq k \leqq n;\ n = 0, 1, \ldots) \\ 0 & (sonst). \end{cases} \tag{14}$$

Ausrechnen von (7) und Vergleich mit (14) ergibt nach Folgerung 2a) die Behauptung.

Zu b). Zunächst wird gezeigt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mid \sigma_n \mid = \infty \tag{15}$$

ist.[3]) Aus (10) folgt

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1} - \sigma_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{16}$$

Daher ist wegen (12)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid \sigma_{k+1} - \sigma_k \mid \leqq K \mid \sigma_n \mid \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ K > 0). \tag{17}$$

Also kann, da nach (8) und (17)

$$0 < \frac{1}{\mid \lambda_0 \mid} = \mid \sigma_1 - \sigma_0 \mid \leqq \lim_{n\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mid \sigma_{k+1} - \sigma_k \mid \leqq K \underline{\lim_{n\to\infty}} \mid \sigma_n \mid$$

ist, nicht $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mid \sigma_n \mid = 0$ sein. Ist aber $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mid \sigma_n \mid > 0$, d. h. wegen (8)

$$\mid \sigma_n \mid \geqq L > 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{18}$$

so folgt aus (11), (16) und (17)

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mid \lambda_n \mid} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mid \lambda_k \mid} \leqq \frac{1}{L} \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} \mid \sigma_{k+1} - \sigma_k \mid \leqq$$

$$\leqq \frac{K}{L} \underline{\lim_{n\to\infty}} \mid \sigma_n \mid,$$

also (15).

---

[3]) Daß aus (8), (11) und (15) nicht umgekehrt auch (12) folgt, zeigt das Gegenbespiel $\{\lambda_n\}$ mit $\lambda_{2n} = 2n + 1$, $\lambda_{2n+1} = -\dfrac{2n+2}{4n+5}$ $\qquad (n = 0, 1, \ldots)$.

Nun ist nach Definition $T = (\tau_{nk})$ mit τ_{nk} aus (14). Durch Induktion zeigt man

$$(19) \qquad \sum_{k=0}^{n} \tau_{nk} = 1 - \frac{1}{\sigma_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Aus (14) bzw. (19) folgt wegen (15)

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{nk} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \tau_{nk} = 1,$$

also zusammen mit (12) die Permanenz von T [1; Theorem 2, S. 43].

Zu c). Wegen (17) und (18) ist

$$|\sigma_0| + |\sigma_1 - \sigma_0| + \ldots + |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < M\,|\sigma_n|$$
$$(n = 1, 2, \ldots; M > 0).$$

Zusammen mit (15) folgt daher nach dem Satz von Kronecker (vgl. [3; S. 131, Fußnote 2]) $cS \subseteq c_0 T_2^{c_0} \subseteq \beta T_2^{\beta}$.

Zu d). Da nach c) $T_2 = T_2^{c_0}$ ist, genügt es, die Existenz einer Folge $a = \{a_n\}$ nachzuweisen mit $a \in cS \setminus mT_1$. Wegen (13) gibt es eine Folge $\{n_k\}$ mit

$$|\lambda_{n_k}| > (k+1)^3 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Man wähle daher

$$a_n = \begin{cases} (k+1)^{-2} & (n = n_k;\ k = 0, 1, \ldots) \\ 0 & (\textit{sonst}). \end{cases}$$

Analog beweist man mit Hilfe von Folgerung 2b) den

Satz 4. *Satz 3 bleibt richtig, wenn man V durch ein null-permanentes, additives Verfahren, α durch c_0, c oder m und β durch c_0 ersetzt.*

Bemerkung 1. Ist die Folge $\{\lambda_n\}$ positiv, so können in Satz 3 und Satz 4 die Bedingungen (8) und (12) weggelassen werden, da die Folge $\{\sigma_n\}$ dann positiv ist, also (12) aus (14) und (19) folgt. Einfache Beispiele sind $\lambda_n = n + 1$ (vgl. Einleitung), $\lambda_n = \sqrt{n+1}$, $\lambda_n = (n+2)\log(n+2)$, $\lambda_n = (n+3)\log(n+3)\log\log(n+3), \ldots$

Bemerkung 2. Wegen (9) und (10) wird die Gestalt von T_2 i. a. nicht sehr einfach sein. Es fragt sich daher, ob es nicht zu T_1 T-stärkere oder gar ausgezeichnete TM T_2 von einfacherer Bauart gibt.[4]) Diese Frage

---

[4]) So ist z. B. beim Borel-Verfahren die nach Satz 4 zu $T_1 = \operatorname{diag}\{\sqrt{n+1}\}$ gehörige ATM T_2 komplizierter als die Bedingung $\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n+1)$, welche nach Jakimovski [2; S. 69] für reelle a_k auf eine ATM führt.

haben Meyer-König und Tietz sowohl in [5] als auch für TM $T_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_n\}$ mit reellen, streng monoton wachsenden λ_n in [4] untersucht und viele TM T_2 angegeben, die einfacher als die TM (9) sind. Dabei hat sich allerdings gezeigt, daß der Vorteil einer einfachen TM T_2 mit dem Nachteil zusätzlicher und zum Teil einschneidender Bedingungen über die Glieder von T_1 erkauft werden muß. Einige dieser TM T_2 sind dabei ATM, andere wiederum nicht. So liefert z. B. der Satz 3.3 [4; S. 212] genau dann eine ATM T_2, wenn der Grenzwert der Folge $\{q_{n+1}\}$ (definiert durch [4; S. 212 (27)]) von Null verschieden ist. Das beweist man in der einen Richtung mit Hilfe des Satzes von Kronecker (vgl. [3; S. 131]) und in der anderen Richtung durch das Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n q_n$.

LITERATUR

[1] Hardy, G. H.: *Divergent series*. 1. Aufl. Oxford: Clarendon Press 1963.

[2] Jakimovski, A.: *On a Tauberian theorem by O. Szász*. Proc. Amer. Math. Soc. 5, 67—70 (1954).

[3] Knopp, K.: *Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen*. 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1947.

[4] Meyer-König, W., und H. Tietz: *Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o*. Studia Math. 31, 205—216 (1968).

[5] Meyer-König, W., und H. Tietz: *Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie*. Arch. Math. (Brno) 5, 177—186 (1969).

Universität Stuttgart
Mathematisches Institut A
7 Stuttgart 1
Herdweg 23