Hans Schubert

Einige Hilfssätze der ebenen Potentialtheorie

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 215--225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104703`

EINIGE HILFSSÄTZE DER EBENEN POTENTIALTHEORIE

HANS SCHUBERT

Herrn Prof. Dr. O. Borůvka zum 70. Geburtstag gewidmet

Eingegangen am 12. Mai 1969

1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit sollen einige Hilfssätze der Potentialtheorie, die der Verf. in seiner Dissertation [3] zum Beweis des fundamentalen Existenzsatzes von L. Lichtenstein [1], S. 441 über die Bewegung einer inkompressiblen reibungslosen Flüßigkeit, die die ganze x, y-Ebene E erfüllt und während eines hinreichend kleinen Zeitintervalls andauert, bewiesen hat, auf die über die obere Halbebene H_0 von E erstreckten Integrale übertragen werden:

$$(1{,}0)\qquad \tilde{Q}(x, y) = \int_{H_0} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r}\, d\tau', \quad \tilde{P}(x, y) = \int_{H_0} \vartheta' \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{1}{r}\, d\tau'$$

mit

$$\vartheta' = \vartheta(x', y'), \qquad d\tau' = dx' \,.\, dy', \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

Zu diesem Zweck machen wir über die Dichte $\vartheta(x, y)$ folgende Voraussetzungen:

Die Funktion $\vartheta(x, y)$ sei in der durch die x-Achse $\mathscr{L}$ abgeschlossenen oberen Halbebene $H_0 + \mathscr{L}$ erklärt und genüge dort den folgenden Bedingungen

$$(1{,}1)\qquad |\vartheta| \leqq c_1 \qquad \text{für alle } R$$

$$(1{,}2)\qquad |\vartheta| \leqq c_2 R^{-2} \qquad \text{für alle } R > 0$$

$$(1{,}3)\qquad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq c_3 d_{12}^{\lambda} \qquad \text{für alle } R_1 \text{ und } R_2;\ 0 < \lambda < 1$$

$$(1{,}4)\qquad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq c_4 R_1^{-2-\lambda} d_{12}^{\lambda} \qquad \text{für alle } R_1 > 0 \text{ und } d_{12} < \frac{1}{2} R_1$$

$$(1{,}5)\qquad \int_{H_0} |\vartheta|\, d\tau < c_5$$

Darin bedeuten:

$$\vartheta_1 = \vartheta(x_1, y_1), \qquad \vartheta_2 = \vartheta(x_2, y_2), \qquad R^2 = x^2 + y^2, \qquad R_1^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

$$R_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \qquad d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Unter diesen Voraussetzungen braucht das logarithmische Potential

$$W(x, y) = \int_{H_0} \vartheta' \log \frac{1}{r}\, d\tau'$$

selbst nicht zu existieren.

2. HILFSSÄTZE

Satz 1: *Es sei $\{\mathfrak{R}_n\}$ eine Folge von Kreisscheiben mit dem Mittelpunkt* 0; *für ihre Radien d_n gelte*

$$d_1 < d_2 < \ldots \textit{ und } d_n \to \infty$$

Ferner sei $\{\overline{\mathfrak{R}_n}\}$ eine Folge von Kreisscheiben mit dem Aufpunkt $P(x, y)$ als Mittelpunkt; für ihre Radien $\overline{d_n}$ gelte

$$\overline{d_1} < \overline{d_2} < \ldots \qquad \text{und} \qquad \overline{d_n} \to \infty$$

Dann existiert der Grenzwert

$$(2,1) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{R}_n \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau' \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{\overline{\mathfrak{R}}_n \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau' \end{aligned}$$

den wir mit

$$\int_{H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau'$$

bezeichnen.

Beweis:

1. Fall: $P = 0$

Es sei d_{n_0} der hinreichend groß gewählte Radius einer Kreisscheibe $\mathfrak{R}_{n_0}$ um 0 und $d_n > d_{n_0}$. Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$(2,2) \qquad I_n(x, y) = \int_{\mathfrak{R}_n \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau'$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes, wobei mit n die Innennormale bezeichnet wird, berechnen wir zunächst das Integral

$$\int\limits_{(\mathfrak{R}_n-\mathfrak{R}_{n_0})\cap H_0} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau' = -\int\limits_{\mathfrak{C}_n} \frac{\partial}{\partial x'} \log \frac{1}{\nu} \cos(x, n)\, ds' -$$

$$-\int\limits_{\mathfrak{C}_{n_0}} \frac{\partial}{\partial x'} \log \frac{1}{\nu} \cos(x, n)\, ds' = 0$$

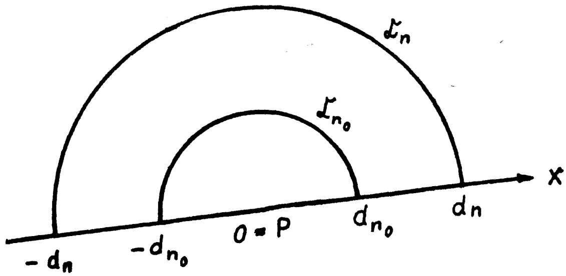

Abb. 1

Wählt man n_0 hinreichen groß, so gilt wegen (1,2)

$$\left| \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \right| \leqq \frac{c_2}{r^2 R'^2} \leqq \frac{2c_2}{R'^4}$$

Demzufolge wird

$$(2,3) \qquad | I_n(x, y) - I_{n_0}(x, y) | = \left| \int\limits_{(\mathfrak{R}_n-\mathfrak{R}_{n_0})\cap H_0} \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r}\, d\tau' \right| <$$

$$< \frac{2}{3} \frac{c_2}{d_{n_0}^3} \Pi$$

womit die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x, y)$ bewiesen ist.

2. **Fall:** $P \neq 0$.

Jetzt sei $\{\overline{\mathfrak{R}}_n\}$ eine Folge von Kreisscheiben um den Aufpunkt $P(x, y)$.

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\bar{I}_n(x, y) = \int\limits_{\mathfrak{R}_n \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,4}$$

Dann ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes, wobei mit n wieder die Innennormale bezeichnet wird (Vgl. Abb. 2),

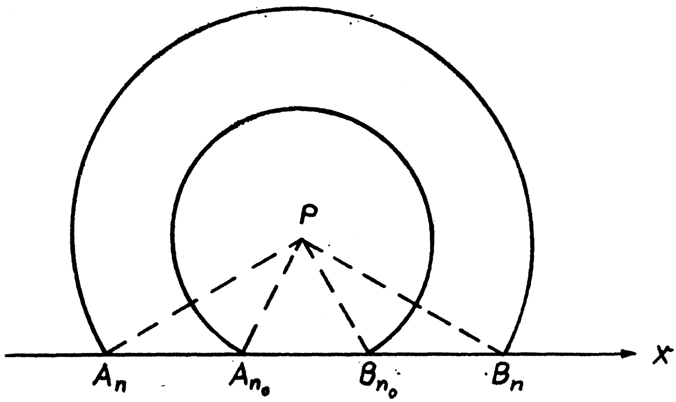

Abb. 2

$$\int\limits_{(\overline{\mathfrak{R}}_n - \overline{\mathfrak{R}}_{n_0}) \cap H_0} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' = (\alpha_{n_0} - \alpha_n) + \cos(\alpha_{n_0} + \alpha_n) \sin(\alpha_{n_0} - \alpha_n)$$

und hieraus

$$\left| \int\limits_{(\overline{\mathfrak{R}}_n - \overline{\mathfrak{R}}_{n_0}) \cap H_0} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| < \frac{\varepsilon}{2c_1} \tag{2.5}$$

sobald n_0 hinreichend groß gewählt wird. Setzt man $a = \overline{OP}$, so gilt für hinreichend großes n_0

$$|\vartheta'| \leqq c_2 R^{-2} \leqq \frac{c_2}{(r - a)^2} < \frac{2c_2}{r^2}$$

mithin

(2,6)

$$\left| \int\limits_{(\overline{\mathfrak{R}}_n - \overline{\mathfrak{R}}_{n_0}) \cap H_0} \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| < 2c_2 \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}_n - \overline{\mathfrak{R}}_{n_0}} \frac{d\pi'}{r^4} < \frac{2\pi c_2}{3d_{n_0}^3} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus (2,5) und (2,6) folgt für hinreichend großes n_0

$$(2,7) \quad | \bar{I}_n(x, y) - \bar{I}_{n_0}(x, y) | = \left| \int\limits_{(\overline{\mathfrak{R}}_n - \overline{\mathfrak{R}}_{n_0}) \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| < \varepsilon$$

womit die Existenz von $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{I}_n(x, y)$ bewiesen ist.

Zum Beweis der Beziehung (2,1) nehmen wir $d_n > 2a$ an und denken uns $\overline{\mathfrak{R}}_n$ so gewählt, daß der Rand von $\overline{\mathfrak{R}}_n$ denjenigen von $\mathfrak{R}_n$ von außen berührt und daher (Vgl. Abb. 3) $\bar{d}_n = a + d_n$ wird. Dann gilt zunächst

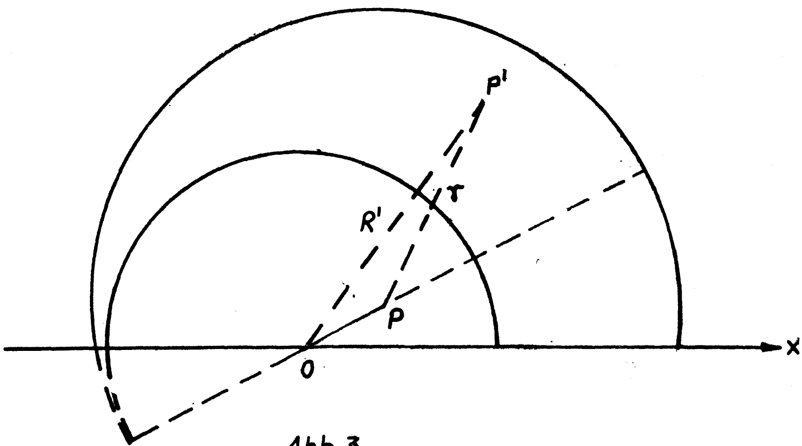

Abb.3

$$| \vartheta' - \vartheta | \leqq | \vartheta' | + | \vartheta | \leqq 2c_1$$

Für

$$P' \in (\overline{\mathfrak{R}}_n - \mathfrak{R}_n) \cap H_0$$

ergibt sich ferner

$$r \geqq R' - a \geqq d_n - a > \frac{1}{2} d_n,$$

mithin

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \right| \leqq \frac{1}{r^2} < \frac{4}{d_n^2}$$

Demzufolle gilt für hinreichend großes n

$$| \overline{I}_n(x, y) - I_n(x, y) | = \left| \int\limits_{(\overline{\Re}_n - \Re_n) \cap H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| <$$

(2,8)

$$< \frac{8c_1}{d_n^2} \int\limits_{(\overline{\Re}_n - \Re_n) \cap H_0} d\tau' < \frac{8c_1}{d_n^2} \int\limits_{\overline{\Re}_n - \Re_n} d\tau' = \frac{8c_1}{d_n^2} (\pi \overline{d}_n^2 - \pi d_n^2) =$$

$$= \frac{8\pi c_1}{d_n^2} (a^2 + 2d_n a) < \frac{20\pi a c_1}{d_n} < \varepsilon$$

womit (2,1) bewiesen ist.

Satz 2: *Genügt die Funktion $\vartheta(x, y)$ in $H_0 + \mathscr{L}$ den Voraussetzungen* (1,1), (1,2) *und* (1,3), *so hat die Funktion*

$$\tilde{Q}(x, y) = \int\limits_{H_0} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,9}$$

in H_0 die Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) = -\frac{\pi}{2} \vartheta(x, y) + \int\limits_{H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,10}$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x, y) = \int\limits_{H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x' \, \partial y'} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,11}$$

und die Funktion

$$\tilde{P}(x, y) = \int\limits_{H_0} \vartheta' \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,12}$$

die Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x, y) = \int\limits_{H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial y' \, \partial x'} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \tag{2,13}$$

(2,14)

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x, y) = -\frac{3\pi}{2}\vartheta(x, y) + \int_{H_0} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau'$$

Beweis: Im Hinblick auf den zur Verfügung stehenden Raum begnügen wir uns mit dem Beweis der Formel (2,10). Um $P(x, y)$ legen wir einen Kreis $\mathfrak{R}_\delta$ mit hinreichend kleinem Radius δ, der ganz im H_0 liegt; sein Rand sei $\mathfrak{C}$s. Ferner sei $\overline{\mathfrak{R}_n}$ ein Kreis von hinreichend großem Radius $\overline{d_n}$ um den Punkt $P(x, y)$; sein in der Halbebene $H_0 + \mathscr{L}$ gelegener Randbogens ei $\overline{\mathfrak{C}_n}$ und seine Schnittpunkte mit der x-Achse $\mathscr{L}$ seien A_n und B_n (Vgl. Abb. 4).

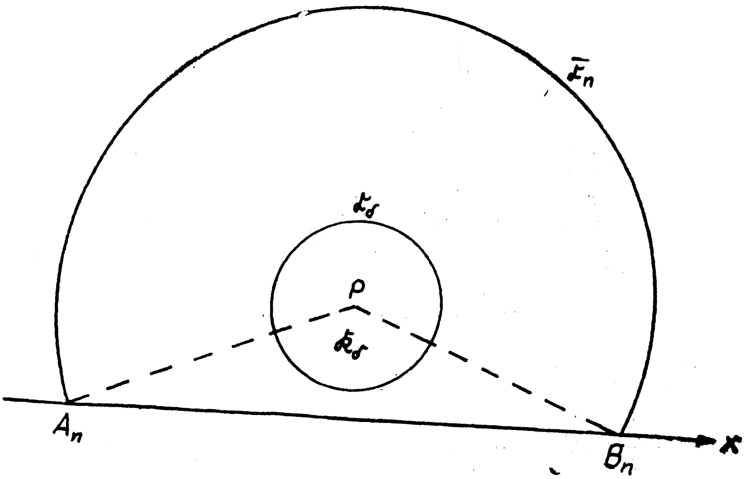

Abb. 4

Der Halbstrahl $\overrightarrow{PA_n}$ bilde mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel $\pi + \alpha_n$ und der Halbstrahl $\overrightarrow{PB_n}$ den Winkel $-\alpha_n$. Schließlich setzen wir

$$\mathfrak{H}_n = \overline{\mathfrak{R}_n} \cap H_0$$

Bevor wir die Funktion $\tilde{Q}(x, y)$ nach x differenzieren, schreiben wir sie in der Form

$$\tilde{Q}(x, y) = \int\limits_{\mathfrak{R}\delta} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' + \int\limits_{\mathfrak{H}_n - \mathfrak{R}\delta} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' +$$

$$+ \int\limits_{H_0 - \mathfrak{H}_n} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau'$$

und erhalten hieraus mit Hilfe eines bekannten Satzes von *U.* Dini

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) = -\pi \vartheta(x, y) + \int\limits_{\mathfrak{R}\delta} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' +$$

$$(2,15) \quad + \int\limits_{\mathfrak{H}_n - \mathfrak{R}\delta} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' + \vartheta(x, y) \int\limits_{\mathfrak{H}_n - \mathfrak{R}\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' +$$

$$+ \int\limits_{H_0 - \mathfrak{H}_n} \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau'$$

Der Gaußsche Satz liefert nach Berechnung der Kurvenintegrale über $\mathfrak{C}_\delta$, $\overline{\mathfrak{C}_n}$ und $\overrightarrow{A_n B_n}$

$$\int\limits_{\mathfrak{H}_n - \mathfrak{R}\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' = \int\limits_{\mathfrak{H}_n - \mathfrak{R}\delta} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n$$

damit folgt aus (2,15)

$$(2,16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) &= -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_n + \sin \alpha_n \cos \alpha_n\right) \vartheta(x, y) + \\ &+ \int\limits_{\mathfrak{H}_n} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' + \int\limits_{H_0 - \mathfrak{H}_n} \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \end{aligned}$$

und hieraus durch den Grenzübergang $\overline{d_n} \to \infty$ die behauptete Gleichung (2,10).

In ganz analoger Weise lassen sich die Formeln (2,11), (2,13) und (2,14) beweisen.

Satz 3: *Genügt die Funktion $\vartheta(x, y)$ in $H_0 + \mathscr{L}$ den Voraussetzungen* (1,2), (1,3) *und* (1,5), *so gilt in H_0 für hinreichend große R*

$$(2,17) \qquad |\tilde{Q}(x, y)|, \quad |\tilde{P}(x, y)| = O(R^{-1})$$

$$(2,18) \qquad \left|\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x, y)\right| = O(R^{-2})$$

Beweis: Um $P(x, y)$ legen wir den Kreis $\overline{\mathfrak{K}}_1$ mit dem Radius $\overline{d}_1 = R/2$ und um O den Kreis $\mathfrak{K}_0$ mit dem Radius $d_0 = R/2$. Ferner setzen wir

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{K}_0 \cap H_0, \qquad \mathfrak{H}_1 = \overline{\mathfrak{K}}_1 \cap H_0$$

Zur Abschätzung von $\tilde{Q}(x, y)$ schreiben wir diese Funktion in der Form

$$(2,19) \qquad \tilde{Q}(x, y) = \int_{\mathfrak{H}_1} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' + \int_{H_0 - \mathfrak{H}_1} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau'$$

Mit Hilfe von (1,2)

$$\left| \int_{\mathfrak{H}_1} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| \leqq 4c_2 R^{-2} \int_0^{R/2} \frac{1}{r} 2\pi v \, dv = 4\pi c_2 R^{-1}.$$

Wegen (1,5) ergibt sich

$$\left| \int_{H_0 - \mathfrak{H}_1} \vartheta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} \, d\tau' \right| \leqq \int_{H_0 - \mathfrak{H}_1} |\vartheta'| \frac{1}{r} \, d\tau' \leqq 2c_5 R^{-1}.$$

Aus (2,19) und diesen Abschätzungen folgt daher

$$(2,20) \qquad |\tilde{Q}(x, y)| \leqq (4\pi c_2 + 2c_5) R^{-1}$$

Analog ergibt sich die entsprechende Ungleiohung für $P(x, y)$.

Die Abschätzung von $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y)$ bilden wir einem Beweis von L. Lichtenstein ([2], S. 218—219) nach und gehen aus von der Darstellung (2,16)

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1\right) \vartheta(x, y) +$$
$$+ \int_{\mathfrak{H}_1} (\vartheta' - \vartheta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau' + \int_{H_0 - \mathfrak{H}_1} \vartheta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \, d\tau'$$

mit $d_1 = R/2$. Ausführlicher schreiben wir dafür

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1\right)\vartheta(x, y) +$$

$$(2,21) \qquad + \int\limits_{\mathfrak{H}_1} (\vartheta' - \vartheta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\frac{1}{r}\,d\tau' + \int\limits_{\mathfrak{H}_0} \vartheta'\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\frac{1}{r}\,d\tau' +$$

$$+ \int\limits_{H_0 - \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_0} \vartheta'\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\frac{1}{r}\,d\tau' = I_0 + I_1 + I_2 + I_3$$

Aus (2,1) erhalten wir

$$(2,22) \qquad |I_0| \leqq \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + |\sin\alpha_1\cos\alpha_1|\right)|\vartheta(x, y)| \leqq (\pi + 1)\,c_2 R^{-2}$$

Mit Hilfe von (2,4) ergibt sich

$$(2,23) \qquad |I_1| \leqq c_4 R^{-2-\lambda}\int\limits_{\mathfrak{H}_1} r^{\lambda-2}\,d\tau' \leqq c_4 R^{-2-\lambda}\int\limits_{\mathfrak{K}_1} r^{\lambda-2}\,d\tau' = \frac{2\pi}{\lambda}c_4 R^{-2}$$

Mit Hilfe von (2,5) erhalten wir

$$(2,24) \qquad |I_2| \leqq 4R^{-2}\int\limits_{\mathfrak{H}_0} |\vartheta'|\,d\tau' < 4R^{-2}\int\limits_{H_0} |\vartheta'|\,d\tau' = 4c_5 R^{-2}$$

Um I_3 abzuschätzen, beachte man zunächst, daß für $P' \in H_0 - \mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1$ die Ungleichungen

$$r \leqq R' + R \leqq 3R' \qquad \text{mithin} \qquad |\vartheta'| \leqq c_2(R')^{-2} \leqq 9c_2 r^{-2}$$

gelten. Daher ergeben sich

$$(2,25) \qquad |I_3| \leqq 9c_2 \int\limits_{H_0 - \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_0} r^{-4}\,d\tau' \leqq 9c_2\int\limits_{R/2}^{\infty} r^{-3}2\pi\,dr = 36c_2 R^{-2}$$

Aus (2,21) erhalten wir schließlich mit Hilfe der Abschätzungen (2,22) bis (2,25)

$$(2,26) \qquad \left|\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y)\right| \leqq \left\{(\pi + 37)\,c_2 + \frac{2\pi}{\lambda}c_4 + 4c_5\right\}R^{-2}$$

womit die erste der Aussagen von (2,18) bewiesen ist. Die übrigen von (2,18) ergeben sich in analoger Weise.

Die Sätze 1 bis 3 kann man zur Lösung des folgenden Randwertproblems für die Halbebene H_0 heranziehen.

Gesucht werden in H_0 alle Lösungen des Systems der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} = \psi(x, y) \tag{2,27}$$

die unter gewissen Voraussetzungen über die Vorgaben $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eine gewisse Randbedingung erfüllen und für $R \to \infty$ verschwinden. Randwertprobleme für das System der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wurden besonders für beschränkte Gebiete unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Vorgaben von I. N. Vekua (Vgl. [4], S. 2 ff) untersucht.

LITERATUR

[1] L. Lichtenstein, *Grundlagen der Hydromechanik*, Berlin 1929.

[2] L. Lichtenstein, *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie III*, Berichte der Sächs. Akademie der Wissenschaften Bd. 78 (1926).

[3] H. Schubert, *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie und ihre Anwendung auf die Hydrodynamik*. Inaugural-Dissertation Leipzig 1935.

[4] I. N. Vekua, *Verallgemeinerte analytische Funktionen*. Herausgegeben von Dr. Wolfgang Schmidt. Akademie-Verlag-Berlin 1963.

Carl-Robert Str. 29
Halle (Saale), DDR