Rolf Reissig

Nachweis periodischer Lösungen in nichtautonomen Systemen mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 193--205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104701`

NACHWEIS PERIODISCHER LÖSUNGEN IN NICHT-AUTONOMEN SYSTEMEN MIT HILFE DES BROUWERSCHEN FIXPUNKTSATZES

Rolf Reissig in Saarbrücken

Herrn Prof. Dr. Otakar Borůvka zu seinem 70. Geburtstag gewidmet

Eingegangen am 1. Juni 1969

Im folgenden befassen wir uns mit einer Vektor-Differentialgleichung

$$x' = F(t, x), \tag{1}$$

deren rechte Seite in t ω-periodisch ist:

$$F(t + \omega, x) \equiv F(t, x).$$

Außerdem sei F für alle $x \in R_n$ und $t \in R_1$ definiert und stetig, und die Lösungen $x(t, c)$ $[x(0, c) = c]$ der Gleichung (1) sollen in ihrem Existenzintervall $t \geqq 0$ eindeutig bestimmt sein sowie von den Anfangswerten c stetig abhängen.

Wir suchen Existenzbedingungen für ω-periodische Lösungen (d. h. für harmonische erzwungene Schwingungen) und nehmen zu dem Zweck eine passende Zerlegung der Funktion F vor:

$$F(t, x) = A(t)\, x + g(t, x)$$

$$[A(t + \omega) \equiv A(t),\ \ g(t + \omega, x) \equiv g(t, x);\ \ A(t),\ \ g(t, x) \text{ stetig}].$$

Dabei soll die homogene lineare Gleichung

$$y' = A(t)\, y$$

als einzige ω-periodische Lösung die triviale besitzen. Ist $Y(t)$ die Fundamentalmatrix mit $Y(0) = E$ (Einheitsmatrix), so bedeutet diese Forderung:

$$E - Y(\omega) \text{ nichtsingulär.}$$

Wir setzen:

$$|(E - Y(\omega))^{-1}| = M, \qquad \underset{0 \leqq \tau \leqq t \leqq \omega}{\operatorname{Max}} |Y(t)\, Y^{-1}(\tau)| = K.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bei der Gleichung (1) können wir jetzt in der Form

$$x(t, c) = Y(t)\, c + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, g(\tau, x(\tau, c))\, d\tau \tag{2}$$

darstellen. Für die ω-periodischen Lösungen genügen die Anfangswerte $\boldsymbol{c}$ der Gleichung

$$(3) \qquad \boldsymbol{c} = \vartheta(\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}(\omega))^{-1} \int_0^{\omega} \boldsymbol{Y}(\omega)\, \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\, \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{c}))\, \mathrm{d}t;$$

umgekehrt ist jede Lösung $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{c})$, die über dem Intervall $[0, \omega]$ existiert und deren Anfangswert $\boldsymbol{c}$ der Beziehung (3) gehorcht, ω-periodisch.

Demnach bietet sich für unsere Aufgabe der folgende Lösungsweg an.

a) Solange die Lösungen $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{c})$ mit $|\,\boldsymbol{c}\,| = \varrho \in [0, P)$, $P \leqq \infty$ im Intervall $0 \leqq t \leqq \omega$ existieren, leitet man eine Abschätzung

$$(4) \qquad \int_0^t |\, \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{c}))\,|\, \mathrm{d}\tau \leqq G(\varrho)$$

$[G(\varrho)$ positiv und monoton wachsend$]$

her.

Berücksichtigt man die Darstellung (2), so erkennt man unmittelbar, daß diese Lösungen bis $t = \omega$ fortsetzbar sind. Im Phasenraum R_n wird dann die Sphäre $S_P(0 \leqq \varrho < P)$ durch die Transformation ϑ von Gleichung (3) stetig in R_n abgebildet.

b) Man stellt die Bedingung auf:

$$(5) \qquad G(\varrho_0) \leqq \frac{\varrho_0}{KM}$$

für wenigstens einen Wert $\varrho_0 \in (0, P)$.

Dann wird die Sphäre $\bar{S}_{\varrho_0}(0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0)$ in sich selbst abgebildet,

$$\vartheta(\bar{S}_{\varrho_0}) \subset \bar{S}_{\varrho_0};$$

denn für die davon ausgehenden Lösungen schätzt man ab

$$|\,\vartheta(\boldsymbol{c})\,| \leqq KMG(\varrho) \leqq KMG(\varrho_0) \leqq \varrho_0 .$$

Auf Grund des Brouwerschen Fixpunktsatzes enthält diese Lösungsschar wenigstens eine ω-periodische Lösung, für die

$$\boldsymbol{c} = \vartheta(\boldsymbol{c})$$

gilt.

Im Falle $KMG(\varrho_0) < \varrho_0$ gibt es jedoch keine ω-periodische Lösung mit einem Anfangswert vom Betrage ϱ_0.

Um die grundlegende Abschätzung (4) zu erhalten, unterwerfen wir das Zusatzglied $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ folgenden Bedingungen [die im Sonderfall $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{e}(t)$ von vornherein erfüllt sind]:

$$(6) \qquad |\, \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(t, 0) \,| \leqq p(t)\, q(|\, \boldsymbol{x} \,|)$$

[$p(t)$, $q(r)$ stetig; $q(r)$ mit $q(0) = 0$ streng monoton wachsend];

$$\int_0^\omega p(t)\, \mathrm{d}t = \omega,$$

$$\int_0^\omega |\, \boldsymbol{g}(t, 0) \,|\, \mathrm{d}t = \omega g_0 > 0 \qquad (\omega g_0 K = a).$$

Bemerkung. Wäre $g_0 = 0$, so besäße die Gleichung (1) die triviale Lösung als ω-periodische Lösung; mit unserem Beweisverfahren könnten wir aber nicht entscheiden, ob es auch nichttriviale ω-periodische Lösungen gibt.

Wir definieren nun für $a \leqq r < +\infty$ die Hilfsfunktion

$$Q(r) = \int_a^r \frac{\mathrm{d}u}{q(u)}$$

und verlangen

$$(7) \qquad Q_0 = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}u}{q(u)} > \omega K.$$

Die Umkehrfunktion $r = Q^{-1}(s)$ ist dann für $0 \leqq s < Q_0 (a \leqq r < \infty)$ definiert.

Auf Grund der Bedingung (7) kann man zu jedem $r \in [a, b)$, wobei $Q(b) = Q_0 - \omega K$ ist, ein $\sigma = \sigma(r) > 0$ derart bestimmen, daß

$$Q((1 + \sigma)\, r) - Q(r) = \omega K.$$

Die Funktion $r\sigma(r)$ ist monoton zunehmend, da $Q'(r) = \dfrac{1}{q(r)}$ abnimmt.

Der Fall $Q_0 = \infty$ (d. h. $b = \infty$) liegt z. B. vor, wenn für $r \geqq R$ (hinreichend groß)

$$q(r) \leqq Lr\, (\ln r)\, (\ln^2 r) \ldots (\ln^m r), \qquad L > 0$$

$$[m \geqq 1 \text{ ganzzahlig, } \ln^1 r = \ln r,\ \ln^{\mu+1} r = \ln (\ln^\mu r) \text{ für } \mu \geqq 1]$$

gilt; dann wird nämlich

$$Q(r) - Q(R) \geqq \frac{1}{L} \int\limits_R^r [u (\ln u) \ldots (\ln^m u)]^{-1} \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{L} \ln \left(\frac{\ln^m r}{\ln^m R}\right) \to \infty \qquad (r \to \infty)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} (\ln^{\mu+1} u) = (\ln^\mu u)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} (\ln^\mu u)\right].$$

Der Fall $Q_0 < \infty$ (d. h. $b < \infty$) liegt z. B. vor, wenn für $r \geqq R$

$$q(r) \geqq L r^{1+m} \qquad (m > 0)$$

gilt; dann wird

$$Q(r) - Q(R) \leqq \frac{1}{L} \int\limits_R^r u^{-(1+m)} \,\mathrm{d}u = -\frac{1}{mL} [u^{-m}]_R^r$$

$$= \frac{1}{mLR^m} \left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^m\right\} < \frac{1}{mLR^m}.$$

Beispiele.

1. $q(r) = Lr;\ a > 0,\ b = \infty$

$$Q(r) = \frac{1}{L} \int\limits_a^r \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\omega K = \frac{1}{L} \ln (1 + \sigma),\ \sigma(r) = \mathrm{e}^{\omega KL} - 1 \text{ (konstant)}$$

2. $q(r) = L r^{1-m}\ (0 < m < 1);\ a > 0,\ b = \infty$

$$Q(r) = \frac{1}{L} \int\limits_a^r \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-m}} = \frac{a^m}{mL} \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^m - 1\right\}$$

$$\omega K = \frac{r^m}{mL} \{(1 + \sigma)^m - 1\},$$

$$\sigma(r) = \left(1 + \frac{m\omega KL}{r^m}\right)^{1/m} - 1 \to 0 \text{ für } r \to \infty$$

(monoton abnehmend)

3. $q(r) = Lr \ln r;\ a > 1,\ b = \infty$

$$Q(r) = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{\ln r}{\ln a}\right)$$

$$\omega K = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{\ln (1+\sigma) r}{\ln r}\right)$$

$$\sigma(r) = \exp\,[(e^{\omega K L} - 1) \ln r] - 1 \to \infty \text{ für } r \to \infty$$

(monoton wachsend)

4. $q(r) = Lr^{1+m}\ (m > 0);\ a > 0,\ b < \infty$

$$Q(r) = \frac{1}{mLa^m}\left\{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^m\right\}$$

$$Q_0 = \frac{1}{mLa^m} > \omega K\ (a < [m\omega KL]^{-1/m}).$$

Dann wird

$$\frac{1}{mLa^m}\left(\frac{a}{b}\right)^m = \omega K,\ b = [m\omega KL]^{-1/m}.$$

Für $a \leqq r < b$ erhält man

$$\frac{1}{mLr^m}\left\{1 - \left(\frac{1}{1+\sigma}\right)^m\right\} = \omega K,$$

$$\sigma(r) = (1 - m\omega KLr^m)^{-1/m} - 1 \to \infty \text{ für } r \to b$$

(monoton wachsend)

Eigenschaften der Funktion $\sigma(r)$.

(A) Ist $Q_0 < \infty$ (d. h. $b < \infty$), so gilt $\sigma(r) \to \infty$ für $r \to b$. Sei nämlich $C > 0$ beliebig groß und

$$0 < \varepsilon < \mathrm{Min}\,[Q_0 - Q((1 + C)\,b),\ Q_0 - \omega K];$$

dann wählt man einen Wert r mit

$$Q^{-1}(Q_0 - \omega K - \varepsilon) \leqq r < b.$$

Man errechnet

$$Q((1 + \sigma)\,r) = Q(r) + \omega K \geqq Q_0 - \varepsilon > Q((1 + C)\,b),$$

$$1 + \sigma > (1 + C)\,\frac{b}{r} > 1 + C,\ \sigma(r) > C.$$

(B) Für $a \leqq r < b$ ist die Funktion $\sigma(r)$ stetig und stetig differenzierbar.

Man wählt einen Wert $b_0 \in (a, b)$ und setzt $Q(b_0) + \omega K = Q(B_0)$; es sei $a \leqq$ $\leqq r' < r'' \leqq b_0$, $\sigma' = \sigma(r')$, $\sigma'' = \sigma(r'')[a < (1 + \sigma')\, r' < (1 + \sigma'')\, r'' \leqq B_0]$.
Aus

$$Q((1 + \sigma'')\, r'') - Q((1 + \sigma')\, r') = Q(r'') - Q(r')$$

folgt

$$\frac{(1 + \sigma'')\, r'' - (1 + \sigma')\, r'}{q(\eta)} = \frac{r'' - r'}{q(\xi)}$$

mit

$$(1 + \sigma')\, r' < \eta < (1 + \sigma'')\, r'', \quad r' < \xi < r''; \quad \xi, \eta \in [a, B_0].$$

Also gilt

$$\sigma'' r'' - \sigma' r' \leqq \left(\frac{q(B_0)}{q(a)} - 1\right)(r'' - r'),$$

die Funktion $r\sigma(r)$ und daher auch $\sigma(r)$ ist im Intervall $[a, b_0]$ stetig.

Ist nun $r' \leqq r \leqq r''$, so wird für $r'' - r' \to 0$

$$\frac{\sigma'' r'' - \sigma' r'}{r'' - r'} = \frac{q(\eta)}{q(\xi)} - 1 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sigma(r)) = \frac{q((1 + \sigma) r)}{q(r)} - 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{1 + \sigma}{q(r)}\left\{\frac{q((1 + \sigma)\, r)}{(1 + \sigma)\, r} - \frac{q(r)}{r}\right\}.$$

Hieraus erkennt man:

(C) Ist $\frac{q(r)}{r}$ für $r \geqq R$, $R \in [a, b)$ monoton, so ist $\sigma(r)$ für $R \leqq r < b$ im gleichen Sinn monoton.

(D) Aus $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{q(r)}{r} = \gamma \leqq +\infty$ folgt $\lim\limits_{r \to b} \sigma(r) = e^{\omega \gamma K} - 1$.

i) $\gamma = \infty$

Wenn $Q_0 < \infty$ (d. h. $b < \infty$) ist, dann wird [vgl. (A)] $\lim\limits_{r \to b} \sigma(r) = \infty$.

Sei nunmehr $Q_0 = \infty$ (d. h. $b = \infty$), $C > 0$ beliebig groß vorgegeben.

Für $r \geqq R \geqq a$ erhält man

$$\frac{q(r)}{r} \geqq C' = \frac{\ln(1 + C)}{\omega K}$$

und daher auch

$$\omega K = \int_r^{(1+\sigma)r} \frac{du}{q(u)} \leqq \frac{1}{C'} \int_r^{(1+\sigma)r} \frac{du}{u} = \frac{1}{C'} \ln(1 + \sigma),$$

$$\ln(1 + \sigma) \geqq \omega K C' = \ln(1 + C), \; \sigma(r) \geqq C.$$

ii) $\gamma < \infty$

Dann ist $\frac{q(r)}{r}$ nach oben beschränkt, so daß (wie oben gezeigt wurde) $Q_0 = \infty$ $(b = \infty)$ ausfällt.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben, und für $r \geqq R_\varepsilon$ gelte

$$\left|\frac{q(r)}{r} - \gamma\right| \leqq \varepsilon' = \frac{1}{\omega K} \ln(1 + \varepsilon\, e^{-\omega \gamma K});$$

dann erhält man weiter

$$\omega K = \int\limits_{r}^{(1+\sigma)r} \left(\frac{u}{q(u)}\right) \frac{du}{u} \geqq \frac{\ln(1+\sigma)}{\gamma + \varepsilon'},$$

$$\sigma \leqq e^{\omega\gamma K} e^{\omega K\varepsilon'} - 1 = (e^{\omega\gamma K} - 1) + \varepsilon.$$

Im Falle $\gamma = 0$ schließt man sofort, daß

$$\lim_{r\to\infty} \sigma(r) = 0.$$

(Dieser Fall ist beispielsweise dann gegeben, wenn $q(r) \to q_0$ für $r \to \infty$.)
Im Falle $\gamma > 0$ wählt man

$$\varepsilon < e^{\omega\gamma K}(e^{\omega\gamma K} - 1), \text{ d. h. } \varepsilon' < \gamma$$

und erhält wie zuvor

$$\omega K \leqq \frac{\ln(1+\sigma)}{\gamma - \varepsilon'} \text{ für } r \geqq R_\varepsilon,$$

also

$$\sigma \geqq e^{\omega\gamma K} e^{-\omega K\varepsilon'} - 1 = (e^{\omega\gamma K} - 1) - e^{\omega\gamma K}(1 - e^{-\omega K\varepsilon'}) > (e^{\omega\gamma K} - 1) - \varepsilon$$

$$[e^{\omega\gamma K}(1 - e^{-\omega K\varepsilon'}) < e^{\omega\gamma K}(e^{\omega K\varepsilon'} - 1) = \varepsilon].$$

Damit ist die Behauptung in allen Fällen bewiesen.

Wir kehren jetzt zu den Teilen a) und b) unseres Lösungsweges zurück. Aus der Lösungsdarstellung (2) leiten wir folgende Abschätzungen her (solange im Definitionsintervall $0 \leqq t \leqq \omega$ gilt):

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{c})| \leqq r + K\int_0^t p(\tau)\, q(|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{c})|)\, d\tau$$

$$(r = K\varrho + a),$$

$$q(|\mathbf{x}(t, \mathbf{c})|) \leqq q(r + K\int_0^t p(\tau)\, q(|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{c})|)\, d\tau),$$

$$\frac{d}{dt} Q(r + K\int_0^t p(\tau)\, q(|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{c})|)\, d\tau) \leqq Kp(t),$$

$$Q(r + K\int_0^t p(\tau)\, q(|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{c})|)\, d\tau) \leqq Q(r) + K\int_0^t p(\tau)\, d\tau.$$

Den Anfangswert $\mathbf{c}(|\mathbf{c}| = \varrho)$ unterwerfen wir der Einschränkung

$$r = K\varrho + a < b, \qquad \text{d. h.} \qquad \varrho < P = \frac{b - a}{K},$$

so daß
$$Q(r) + \omega K < Q_0$$
wird.

Dann erhalten wir weiter
$$|\,x(t, c)\,| \leqq r + K \int_0^t p(\tau)\, q(|\,x(\tau, c)|)\, \mathrm{d}\tau$$
$$\leqq Q^{-1}[Q(r) + K \int_0^t p(\tau)\, \mathrm{d}\tau]$$
(Anwendung des Gronwall-Bellman-Biharischen Lenmas, vgl. Vlasov [4]). Schätzen wir hiermit
$$\int_0^t |\, g(\tau, x(\tau, c))\,|\, \mathrm{d}\tau$$
ab, so ergibt sich
$$K \int_0^t |\, g(\tau, x(\tau, c))\,|\, \mathrm{d}\tau \leqq a + K \int_0^t p(\tau)\, q\{Q^{-1}[Q(r) + K \int_0^\tau p(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta]\}\, \mathrm{d}\tau =$$
$$= a + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Q^{-1}[Q(r) + K \int_0^\tau p(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta]\, \mathrm{d}\tau =$$
$$= a + Q^{-1}[Q(r) + K \int_0^t p(\tau)\, \mathrm{d}\tau] - r \leqq a + Q^{-1}[Q(r) + \omega K] - r =$$
$$= a + r\sigma(r)$$
monoton wachsend in $r \in [a, b)$ bzw. in $\varrho \in [0, P)$. Damit ist die Beziehung (4) mit
$$G(\varrho) = \frac{a + r\sigma(r)}{K} = \frac{\varrho - \Delta(r)}{KM}$$
realisiert, wobei die Hilfsgröße
$$\Delta(r) = \frac{1}{K}\{(1 - KM\sigma)\, r - (1 + KM)\, a\}$$
eingeführt wurde. Die Bedingung (5) erfüllt man, indem man fordert:

(8) $$\Delta(r_0) \geqq 0$$

für wenigstens einen Wert $r_0 \in (a, b)$; man hat dann
$$\varrho_0 = \frac{r_0 - a}{K} \in (0, P)$$
zu setzen.

Bemerkung:

Die Bedingung (8) läßt sich nur dann verwirklichen, wenn es Werte $r > (1 + KM)\,a$ mit

$$\sigma(r) < \frac{1}{KM}$$

gibt.

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz. Die Differentialgleichung

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}),$$

deren rechte Seite in t ω-periodisch sei, läßt wenigstens eine nichttriviale ω-periodische Lösung zu, wenn für die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(t)$ $[\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{E}]$ der homogenen linearen Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}(\omega) \text{ nichtsingulär } [|\,(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Y}(\omega))^{-1}\,| = M, \qquad \max_{0 \leqq \tau \leqq t \leqq \omega} |\,\boldsymbol{Y}(t)\,\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau)\,| = K]$$

ist, und wenn das Zusatzglied $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ die Eigenschaften besitzt:

$$|\,\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(t, 0)\,| \leqq p(t)\,q(|\,\boldsymbol{x}\,|)$$

$$[q(r) \text{ mit } q(0) = 0 \text{ monoton wachsend, } \int_0^\omega p(t)\,\mathrm{d}t = \omega],$$

$$K \int_0^\omega |\,\boldsymbol{g}(t, 0)\,|\,\mathrm{d}t = a > 0,$$

$$\int_r^{(1+\sigma)\,r} \frac{\mathrm{d}u}{q(u)} = \omega K$$

mit wenigstens einem Wert $r > (1 + KM)\,a$, für den

$$\sigma = \sigma(r) \leqq \frac{1}{KM}\left\{1 - (1 + KM)\,\frac{a}{r}\right\} \tag{9}$$

ausfällt.

Wir fragen nach Spezialfällen, in denen die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, und nutzen dazu die oben erläuterten Eigenschaften (A)—(D) der Funktion $\sigma(r)$ aus.

Zusatz 1. [vgl. (D)]

Die grundlegende Forderung (8) bzw. (9) kann allein durch Wahl genügend großer Werte r realisiert werden, wenn

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q(r)}{r} = \gamma < \frac{1}{\omega K} \ln\left(1 + \frac{1}{KM}\right) \tag{10}$$

gilt.

Dann wird nämlich

$$\lim_{r\to\infty} \sigma(r) = e^{\omega\gamma K} - 1 < \frac{1}{KM},$$

also für $r \geqq R_\eta$

$$0 < \sigma(r) \leqq \frac{1}{KM} - \eta.$$

Hieraus folgt

$$K\Delta(r) \geqq \eta KMr - (1 + KM)\,a$$

und damit die Beziehung (8), wenn wir sogar

$$r \geqq \operatorname{Max}\left\{R_\eta, \frac{1+KM}{KM}\,\frac{a}{\eta}\right\}$$

vorschreiben.

Die für die Existenz ω-periodischer Lösungen hinreichende Bedingung (10) ist beispielsweise dann gegeben, wenn

$$q(r) \to q_0 < \infty \qquad \text{für } r \to \infty$$

(vgl. Conti [1], Ehrmann [2])

oder für $r \geqq a$

$$q(r) = Lr^{1-m} \; (0 < m < 1)$$

bzw.

$$q(r) = Lr, \qquad L < \frac{1}{\omega K} \ln\left(1 + \frac{1}{KM}\right)$$

gilt.

Zusatz 2. [vgl. (C)]

Ist $\frac{q(r)}{r}$ für $r \geqq a$ monoton abnehmend, so kann die Bedingung (8) genau dann erfüllt werden, wenn die Gleichung (10) gilt.

Zusatz 3. [vgl. (C)]

Ist $\frac{q(r)}{r}$ für $r \geqq a$ monoton zunehmend, so ist die Bedingung (9) nur dann erfüllbar, wenn

$$\sigma((1 + KM)\,a) < \frac{1}{KM} \tag{11}$$

ausfällt.

Zum Schluß betrachten wir hierzu noch die Beispiele 3. und 4.

3. $$q(r) = Lr \ln r;\ a > 1,\ b = \infty$$

Mit der Bezeichnung

$$e^{\omega KL} - 1 = c$$

wird

$$\sigma(r) = r^c - 1.$$

Im Intervall

$$a < r < \varkappa^{1/c} \left(\varkappa = 1 + \frac{1}{KM}\right)$$

suchen wir einen Wert, für den $\Delta(r) \geqq 0$ wird; diese Abschätzung läßt sich umschreiben in

$$(1 + KM)\,r - KMr^{1+c} - (1 + KM)\,a \geqq 0$$

oder

$$\varphi(r) \equiv \varkappa r - r^{1+c} \geqq \varkappa a.$$

Man berechnet

$$\varphi'(r) = \varkappa - (1 + c)\,r^c > 0$$

in einem Intervall $r \geqq a$, falls

$$a^c < \frac{\varkappa}{1 + c}$$

ist; an der Stelle

$$r = \left(\frac{\varkappa}{1 + c}\right)^{1/c}$$

erreicht die Funktion φ ihr Maximum

$$\frac{\varkappa c}{1 + c}\left(\frac{\varkappa}{1 + c}\right)^{1/c} \geqq \varkappa a$$

$$\left[\text{falls } a^c \leqq \frac{\varkappa}{1 + c}\left(\frac{c}{1 + c}\right)^c\right].$$

Folglich ist die Existenz einer ω-periodischen Lösung durch die Bedingung

$$1 < a < \frac{c}{1+c}\left(\frac{\varkappa}{1+c}\right)^{1/c}$$

gewährleistet, die nur im Falle

$$\frac{(1+c)^{1+c}}{c^c} < \varkappa$$

(also bei hinreichend kleinem c bzw. L) realisierbar ist.

4. $$q(r) = Lr^{1+m} \ (m > 0); \ a > 0, \ b^m = \frac{1}{m\omega KL}$$

Man hat

$$\sigma(r) = (1 - m\omega KLr^m)^{-1/m} - 1 < \frac{1}{KM}$$

für

$$a \leqq r < \left(\frac{1-\varkappa^{-m}}{m\omega KL}\right)^{1/m}.$$

In diesem Intervall suchen wir einen Wert mit $\Delta(r) \geqq 0$, d. h.

$$r \geqq \frac{(1+KM)\,a}{(1+KM) - KM(1-m\omega KLr^m)^{-1/m}} = \frac{\varkappa a}{\varkappa - (1-m\omega KLr^m)^{-1/m}}:$$

$$\varphi(r) \equiv \varkappa r - \frac{r}{(1-m\omega KLr^m)^{1/m}} \geqq \varkappa a.$$

Die Funktion φ wächst in einem Intervall $r \geqq a$ monoton, wenn

$$\varphi'(r) = \varkappa - (1-m\omega KLr^m)^{-(1+m)/m} > 0 \qquad \text{für } r = a,$$

d. h.

$$a < a_0 = \left(\frac{1-\varkappa^{-m/(1+m)}}{m\omega KL}\right)^{1/m};$$

sie erreicht an der Stelle $r = a_0$ ihr Maximum

$$\varkappa a_0(1-\varkappa^{-m/(1+m)}).$$

Demnach erhält man für

$$a \leqq \frac{(1-\varkappa^{-m/(1+m)})^{(1+m)/m}}{(m\omega KL)^{1/m}},$$

d. h. bei genügend kleinem a, wenigstens eine ω-periodische Lösung.

Folgerung:

Gilt

$$g(t, x) = h(x) + e(t),$$
$$| h(x) | \leqq L | x |^{1+m} \ (m > 0),$$
$$E = \max_{[0,\omega]} | e(t) |,$$

so wird

$$a = K \int_0^\omega | e(t) | \,dt \leqq \omega K E;$$

dann tritt bei kleiner Erregeramplitude E stets eine harmonische erzwungene Schwingung auf.

LITERATUR

[1] Conti, R., *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires.* Math. Nachr. 23, 161—178 (1961).

[2] Ehrmann, H., *Ein Existenzsatz für die Lösungen gewisser Gleichungen mit Nebenbedingungen bei beschränkter Nichtlinearität.* Arch. Rational Mech. Anal. 7, 349—358 (1961).

[3] Reissig, R.—Sansone, G.—Conti, R., *Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.* Rom 1969.

[4] Vlasov, I. M., *Beschränktheitskriterien für die Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 3 (40), 39—42 (1964).

Universität des Saarlandes
Mathematisches Institut,
(BRD) 66 Saarbrücken