Norbert M. Flaisher

Об одном рекуррентно-дифференциальном уравнении

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 4, 237--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104671`

ОБ ОДНОМ РЕКУРРЕНТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Н. М. Флайшер, Москва

Поступило в редакцию 30. IV. 1968

Вероятностные проблемы [I] требуют нахождения равномерно сходящихся к нулю на $[a, b]$ при $n \to \infty$ последовательностей функций[1]) $u_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots$ ($u_0(x) \in C[a, b]$; при $n \geqq 1$ $u_n(x) \in C^2[a, b]$), таких, что

(I) $$u''_{n+1}(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x), \; x \in [a, b].$$

I. Теорема I'. *Пусть* $M_n = \sup\limits_{a \leq x \leq b} u_n(x) = u_n(x_0^{(n)})$, $x_0^{(n)} \in [a, b]$, *и существует* $\max\{M_n\} = M_{n_0} = u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) \geqq 0$[2]). *Тогда либо* $n_0 = 0$, *либо* $x_0^{(n_0)}$ *равен* a *или* b.

Доказательство. Предположим, что

(2) $$n_0 > 0 \text{ И } a < x_0^{(n_0)} < b.$$

Пусть $M^* = \max\{0, M_0, \max\{u_n(a)\}, \max\{u_n(b)\}\}$[3]); тогда (2) равносильно тому, что $M_{n_0} > M^*$. Положим

(3) $$\mathbf{u}_n(x) = u_n(x) + \frac{M_{n_0} - M^*}{2(b-a)^2}(x - x_0^{(n_0)})^2;$$

$$\mathbf{M}_n = \sup_{a \leq x \leq b} \mathbf{u}_n(x) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}_0^{(n)}), \; \mathbf{x}_0^{(n)} \in [a, b].$$

По условию, существует $\max\{\mathbf{M}_n\} = \mathbf{M}_{\mathbf{n}_0} = \mathbf{u}_{\mathbf{n}_0}(\mathbf{x}_0^{(\mathbf{n}_0)})$. Покажем, что

(2') $$\mathbf{n}_0 > 0 \text{ И } a < \mathbf{x}_0^{(\mathbf{n}_0)} < b.$$

Действительно, $\mathbf{u}_{n_0}(x_0^{(n_0)}) = u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) = M_{n_0}$, а при любом n

$$\mathbf{u}_n(a) = u_n(a) + \frac{M_{n_0} - M^*}{2(b-a)^2}(a - x_0^{(n_0)})^2 \leqq M^* + \frac{1}{2}(M_{n_0} - M^*) < M_{n_0},$$

$$\mathbf{u}_n(b) = u_n(b) + \frac{M_{n_0} - M^*}{2(b-a)^2}(b - x_0^{(n_0)})^2 \leqq M^* + \frac{1}{2}(M_{n_0} - M^*) < M_{n_0},$$

$$\mathbf{u}_0(x) = u_0(x) + \frac{M_{n_0} - M^*}{2(b-a)^2}(x - x_0^{(n_0)})^2 \leqq M^* + \frac{1}{2}(M_{n_0} - M^*) < M_{n_0},$$

[1]) Все функции ниже — вещественны.

[2]) В противном случае $\sup\{M_n\} = 0$.

[3]) Если, например, $\max\{u_n(a)\}$ не существует (то-есть $\sup\{u_n(a)\} = 0$, то $M^* = \max\{0, M_0, \max\{u_n(b)\}\}$ и. т. п.

откуда следует (2′). Поэтому $u_{n_0}(x)$ имеет при $x = x_0^{(n_0)}$ максимум, значит $u''_{n_0}(x_0^{(n_0)}) \leqq 0$. Далее $u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) \geqq u_{n_0-1}(x_0^{(n_0)})$, значит

$$u''_{n_0}(x_0^{(n_0)}) - \left[u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) - u_{n_0-1}(x_0^{(n_0)})\right] \leqq 0.$$

С другой стороны

$$u''_{n_0}(x_0^{(n_0)}) - \left[u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) - u_{n_0-1}(x_0^{(n_0)})\right] = \frac{M_{n_0} - M^*}{(b-a)^2} > 0.$$

Теорема 1″. *Пусть* $m_n = \inf\limits_{a \leq x \leq b} u_n(x) = u_n(x_0^{(n)})$, $x_0^{(n)} \in [a, b]$ *и существует* $\min\{m_n\} = m_{n_0} = u_{n_0}(x_0^{(n_0)}) \leqq 0$ (*в противном случае* $\inf\{m_n\} = 0$). *Тогда либо* $n_0 = 0$, *либо* $x_0^{(n_0)}$ *равен* a *или* b.

Доказательство аналогично предыдущему.

Следствие. Если $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ — последовательности функций, удовлетворяющих уравнению (I) ($u_0(x)$, $v_0(x) \in C\,[a, b]$; при $n > 1$ $u_n(x)$, $v_n(x) \in C^2\,[a, b]$), причем для всех n $u_n(a) \leqq v_n(a)$ и $u_n(b) \leqq v_n(b)$, а при всех $x \in [a, b]$ $u_0(x) \leqq v_0(x)$ и хотя бы $u_n(x)$ сходится равномерно к 0 при $n \to \infty$, то для всех n и x $u_n(x) \leqq v_n(x)$.

2. Задача A. Найти последовательность ограниченных при $x \to \pm\infty$, равномерно сходящихся к нулю на любом отрезке при $n \to \infty$ функций $u_n(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих уравнению (I) на $(-\infty, \infty)$ и условию

$$u_0(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C(-\infty, \infty)$, $f(\pm\infty) = 0$, *то задача* A *имеет единственное решение*

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{2^k k!(n-k-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi - x|}\, |\xi - x|^{n-k-1} f(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Доказательство. Если $U_n(\xi)$, $F(\xi)$ — трансформанты Фурье $u_n(x)$, $f(x)$, то $U_n(\xi) = (1 + \xi^2)^{-n} F(\xi)$, откуда следует (4). При $n \to \infty$ $u_n(x) = O(n^{-1/2})$ равномерно по x. Для всех $n \geqq 1$ $u_n(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, а $u_n(\pm\infty) = 0$; $u_n(x)$ удовлетворяет уравнению (I) при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и условию (3), так как $U_0(\xi) = F(\xi)$.

Пусть $u_0(x) \equiv 0$, $|u_n(x)| < M$ для всех n и x, $R > 0$, $v_n(x) = MR^{-2}(x^2 + 2n)$; $v_n(x)$ удовлетворяет уравнению (I), причем $u_n(\pm R) \leqq v_n(\pm R)$, $u_0(x) \leqq v_0(x)$; значит при $|x| \leqq R$ для всех n $|u_n(x)| \leqq v_n(x)$ откуда $u_n(x) = 0$ при любых n и x, следовательно решение (I) единственно.

Задача B. Найти последовательность ограниченных при $x \to \infty$, равномерно сходящихся к нулю на любом отрезке $[a, b] \subset [0, \infty]$

при $n \to \infty$ функций $u_n(x) \in C^2(0, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих уравнению (I) в $(0, \infty)$ и условиям $u_0(x) = f(x)$, $0 < x < \infty$; $u_n(0) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(a_0 = f(0))$.

Теорема 3. Если $f(x) \in C[0, \infty)$, $f(\infty) = 0$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то задача B имеет единственное решение

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{2^k k!(n-k-1)!} \int_0^\infty [|\xi - x|^{n-k-1} e^{-|\xi-x|} - $$

$$- (\xi + x)^{n-k-1} e^{-(\xi+x)}] f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} e^{-x} \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(n-m+k)!}{2^k k!(n-m-k)!} x^{n-m-k-1}(x - n + m + k).$$

Доказательство аналогично предыдущему.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ито и Г. П. Маккин. *Диффузионные процессы и их траектории.* М. „Мир“, 1968.

Москва, В-454, ул. Коштоянца 41, кв. 23.