Manfred Schneider

Das Einschliessen der Lösung von Gleichungen mittels eines verallgemeinerten Iterationsverfahrens

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 2, 75--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104653`

DAS EINSCHLIESSEN DER LÖSUNG VON GLEICHUNGEN MITTELS EINES VERALLGEMEINERTEN ITERATIONSVERFAHRENS

Von M. Schneider, Karl-Marx-Stadt

Eingegangen am 28. Dezember 1967

1. VORBEMERKUNGEN

Bei der Anwendung von Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen wird häufig die Tendenz beobachtet, daß die Näherungsfolge die exakte Lösung immer enger einschließt. Diese Einschließungen haben eine große praktische Bedeutung, da bei so gearteten Iterationsverfahren der nach jedem Näherungsschritt noch vorhandene Fehler gegen die Differenz zweier benachbarter Näherungen abgeschätzt werden kann. Untersuchungen über dieses Verhalten von Iterationsverfahren wurden z. B. in der Arbeit [1] durchgeführt. In einigen weiteren Arbeiten (z. B. [2], [3], [4]) wurde gezeigt, daß sich diese Aussagen vielfach durch geeignete Umformungen erzwingen lassen.

Eine Reihe von Problemen lassen sich mit den meist benutzten Iterationsverfahren $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, \ldots$, wobei x_i Elemente eines geeignet gewählten abstrakten Raumes sind und T ein auf einer bestimmten Teilmenge des Raumes definierter Operator ist, nicht erfassen, sondern führen auf ein verallgemeinertes Iterationsverfahren der Form $x_{n+1} = T_n x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bei dem in jedem Iterationsschritt ein anderer Operator verwendet werden kann. Dabei ist klar, daß an die Auswahl der Operatoren T_n gewisse Bedingungen geknüpft werden müssen, um die Konvergenz des Verfahrens zu sichern. Verallgemeinerte Iterationsverfahren dieser Art wurden von Schmidt [5] und Ehrmann [6] betrachtet. In diesen Arbeiten [5, 6] wird nicht untersucht, ob es auch bei den verallgemeinerten Iterationsverfahren möglich ist, Einschliessungsaussagen zu erhalten und damit die Vorteile dieser Aussagen für die Fehlerabschätzung zu benutzen. Mit diesen Untersuchungen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Die Betrachtungen werden in einem Raum $\mathfrak{R}$ durchgeführt, der im nächsten Abschnitt erläutert wird.

In den Ergebnissen sind die für das gewöhnliche Iterationsverfahren $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bereits vorliegenden Aussagen als Spezialfall enthalten.

Die Resultate lassen sich auf viele spezielle Iterationsverfahren anwenden. Darüber soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden.

2. DEFINITION UND EIGENSCHAFTEN DES ZUGRUNDE GELEGTEN RAUMES

Die Untersuchungen werden in einem Raum $\mathfrak{R}$ mit den Elementen $x, y, z, \ldots$ durchgeführt. Jedes Element des Raumes $\mathfrak{R}$ lasse sich in eindeutiger Weise durch eine Menge reeller Zahlen charakterisieren. Die die Elemente $x, y, z, \ldots$ charakterisierenden Mengen reeller Zahlen werden mit $\{\xi\}, \{\eta\}, \{\zeta\}, \ldots$ bezeichnet. Betrachten wir je zwei Elemente x und y, so lasse sich jeder Zahl ξ_i der Menge $\{\xi\}$ eineindeutig eine Zahl η_i der Menge $\{\eta\}$ zuordnen. Einander zugeordnete Zahlen werden mit dem gleichen Index i bezeichnet. Soll ausgedrückt werden, daß eine bestimmte Eigenschaft für alle Zahlen der Menge $\{\xi\}$ gilt, so sagen wir $\xi_i \forall i$ habe diese Eigenschaft.

Wir nennen zwei Elemente des Raumes $\mathfrak{R}$ gleich, $x = y$, wenn alle einander zugeordneten Zahlen der charakterisierenden Mengen gleich sind, also $\xi_i = \eta_i \forall i$ gilt. Als Summe zweier Elemente x, y des Raumes $\mathfrak{R}$ definieren wir das Element $z = x + y$ aus $\mathfrak{R}$, das durch die Menge $\{\zeta\}$ charakterisiert wird, wobei für alle $\zeta_i \in \{\zeta\}$ gilt $\zeta_i = \xi_i + \eta_i$.

Als Produkt eines Elementes $x \in \mathfrak{R}$ mit einer reellen Zahl λ definieren wir das Element $z = \lambda x$, das durch die Menge $\{\zeta\}$ charakterisiert wird mit $\zeta_i = \lambda \xi_i \forall i$.

Bei der angegebenen Definition der Summe zweier Elemente aus $\mathfrak{R}$ und des Produktes eines Elements von $\mathfrak{R}$ mit einer reellen Zahl ist der Raum $\mathfrak{R}$ ein linearer Raum.

In $\mathfrak{R}$ definieren wir eine Halbordnung, indem wir $x \leqq y$ schreiben, wenn $\xi_i \leqq \eta_i \forall i$ gilt. Bei dieser Definition gelten die üblichen Bedingungen, die an eine Halbordnung gestellt werden.

Jedem Element $x \in \mathfrak{R}$ ordnen wir ein Funktional Fx zu durch. $\mathrm{F}x = \inf |\xi_i|$. Es ist

(1) $$\mathrm{F}x \geqq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R},$$

(2) $$\mathrm{F}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{F} x.$$

Vom Raum $\mathfrak{R}$ fordern wir weiter, daß er normiert ist. Für die Norm seien außer den üblichen Beziehungen die beiden Forderungen

(3) aus $\Theta \leqq x \leqq y$ folge $\|x\| \leqq \|y\|$,

(4) aus $\|x\| \leqq \mathrm{F}y$ folge $x \leqq y$

erfüllt.

Alle Forderunge für den Raum $\mathfrak{R}$ werden beispielsweise von dem Raum C aller über einem Intervall $[a, b]$ stetigen Funtionen erfüllt.

Es soll jetzt ein im folgenden ständig benötigter Hilfssatz für den Raum $\mathfrak{R}$ bewiesen werden.

Hilfssatz. Gilt für vier Elemente x, y, z, w des Raumes $\| x - z \| \leqq \frac{1}{4} F(z - w)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{4} F(z - w)$ und $x \geqq y$, so gilt auch $z \geqq w$.

Beweis. Die die Elemente x, y, z, w charakterisierenden Mengen reeller Zahlen werden mit $\{\xi\}$, $\{\eta\}$, $\{\zeta\}$, $\{\omega\}$ bezeichnet. Aus $\| x - z \| \leqq \frac{1}{4} F(z - w)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{4} F(z - w)$ folgt auf Grund der Eigenschaft (2) des Funktionals und der Eigenschaft (4) der Norm $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \frac{1}{4} | \zeta_i - \omega_i |$ und $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{4} | \zeta_i - \omega_i | \; \forall \, i$. Ferner gilt $\forall \, i$

$$\begin{aligned} | \zeta_i - \omega_i | &= | \zeta_i - \xi_i + \xi_i - \eta_i + \eta_i - \omega_i | \\ &\leqq | \zeta_i - \xi_i | + | \xi_i - \eta_i | + | \eta_i - \omega_i | \\ &\leqq \frac{1}{2} | \zeta_i - \omega_i | + | \xi_i - \eta_i |, \end{aligned}$$

d. h. es ist $\frac{1}{2} | \zeta_i - \omega_i | \leqq | \xi_i - \eta_i | \; \forall \, i$. Damit ist aber auch $\frac{1}{2} \inf_i | \zeta_i - \omega_i | \leqq \inf_i | \xi_i - \eta_i |$ oder anders geschrieben

$$\frac{1}{2} F(z - w) \leqq F(x - y). \tag{5}$$

Aus der Beziehung (5) und der Voraussetzung des Hilfssatzes folgt nun $\| x - z \| \leqq \frac{1}{2} F(x - y)$, $\| y - w \| \leqq \frac{1}{2} F(x - y)$ und damit wieder auf Grund der Eigenschaft (2) des Funktionals und der Eigenschaft (4) der Norm $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \frac{1}{2} | \xi_i - \eta_i |$, $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{2} | \xi_i - \eta_i |$ $\forall \, i$.

Da $x \geqq y$ sein sollte, gilt $\xi_i \geqq \eta_i \; \forall \, i$ und damit $| \xi_i - \zeta_i | \leqq \frac{1}{2} (\xi_i - \eta_i)$, $| \eta_i - \omega_i | \leqq \frac{1}{2} (\xi_i - \eta_i) \; \forall \, i$. Hieraus folgt $\xi_i - \zeta_i + \omega_i - \eta_i \leqq \xi_i - \eta_i \; \forall \, i$ und damit $\omega_i \leqq \zeta_i \; \forall \, i$, d. h. aber $z \geqq w$.

Wird im folgenden von Konvergenz im Raum $\mathfrak{R}$ gesprochen, so soll immer die Konvergenz in der Norm verstanden werden.

Mit $\mathfrak{d} = \langle y, z \rangle$ wird die Menge aller $x \in \mathfrak{R}$ bezeichnet, für die $\Theta \leqq y \leqq x \leqq z$ gilt. Wir verwenden für das Weitere immer Mengen $\mathfrak{d}$, die nur aus positiven Elementen bestehen. In den Anwendungen läßt sich das durch geeignete Wahl des Koordinatensystems realisieren.

3. PROBLEMSTELLUNG UND VORAUSSETZUNGEN

Gesucht sei eine Lösung x^* der Gleichung

$$Lx = Mx. \tag{6}$$

Dabei sei L ein linearer Operator. L sei auf $\mathfrak{d}$ definiert und bilde $\mathfrak{d}$ in sich ab, d. h. es sei $L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Die Gleichung $Lx = r$ sei für beliebiges $r \in L\mathfrak{d}$ eindeutig lösbar und die Lösung sei darstellbar als $x = Gr$. Es existiere also der zu L inverse Operator $G = L^{-1}$ auf $L\mathfrak{d}$. Er ist ebenfalls linear und er sei beschränkt. M sei ein im allgemeinen nichtlinearer Operator. Er sei auf $\mathfrak{d}$ definiert und bilde $\mathfrak{d}$ auf $M\mathfrak{d}$ ab. Es sei $M\mathfrak{d} \subseteq$ $\subseteq L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Die Gleichung (6) läßt sich jetzt schreiben

$$x = L^{-1}Mx = GMx = Tx, \tag{7}$$

wobei $T = L^{-1}M$ gesetzt wurde. T ist also im allgemeinen ein nichtlinearer Operator, der auf $\mathfrak{d}$ definiert ist. Jede Menge $T\mathfrak{d}$ sei kompakt in sich, d. h. jede unendliche Teilmenge dieser Menge enthält eine konvergente Folge und die Grenzwerte gehören zu $\mathfrak{d}$. Die vorgelegte Gleichung (6) wird in den meisten Fällen nicht geschlossen lösbar sein. Wir verwenden zu ihrer näherungsweisen Lösung ein verallgemeinertes Iterationsverfahren

$$L_{n+1}x_{n+1} = M_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Dabei seien die L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ lineare Operatoren, die auf $\mathfrak{d}$ definiert sind. Sie sollen $\mathfrak{d}$ auf $L_n\mathfrak{d} \subset \mathfrak{d}$ abbilden. Die Aufgaben $L_n x = r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ seien für beliebiges $r \in L_n\mathfrak{d}$ eindeutig lösbar und die Lösungen in der Form $x = G_n r$ darstellbar, d. h. alle Operatoren L_n sollen inverse Operatoren $L_n^{-1} = G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ auf $L_n\mathfrak{d}$ besitzen. Die M_n seien im allgemeinen nichtlineare Operatoren, die auf $\mathfrak{d}$ definiert sind und $\mathfrak{d}$ auf $M_n\mathfrak{d}$ abbilden. Es sei $M_n\mathfrak{d} \subseteq L_{n+1}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Für alle $x \in \mathfrak{d}$ sei $M_n x - Mx \in L\mathfrak{d}$. Das Iterationsverfahren läßt sich jetzt in der Form

$$x_{n+1} = G_{n+1}M_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

schreiben. Oder wenn wir den auf $\mathfrak{d}$ definierten Operator $T_n = G_{n+1}M_n$ einführen, erhalten wir aus der Gleichung (8)

$$x_{n+1} = T_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Die Operatoren T_n seien beschränkt, d. h. für beliebige $x \in \mathfrak{d}$, $y \in \mathfrak{d}$, sei

$$(10) \qquad \| T_n x - T_n y \| \leqq \beta_n \| x - y \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die β_n seien die kleinsten Zahlen, für die die Ungleichungen (10) noch gelten. Sie werden als Normen oder Lipschitzkonstanten der Operatoren T_n bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, daß $\beta = \sup\limits_n \beta_n$ existiere, und es sei $\beta < 1$.

Geben wir also Folgen von Operatoren L_{n+1}, M_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und eine beliebige Ausgangsnäherung $x_0 \in \mathfrak{d}$ vor, so erhalten wir durch das Iterationsverfahren (8) eine Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Es soll untersucht werden, ob es möglich ist, für diese Folge Einschließungsaussagen der Form

$$(11) \qquad x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1$$

oder

$$(12) \qquad x_1 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x_0$$

zu erhalten. Diese hätten den Vorteil, daß sofort Fehlerabschätzungen für die Näherungslösungen der vorgelegten Gleichung (6) angegeben werden können, da aus den Ungleichungen (11) oder (12) $x_{2n+1} - x_{2n} \geqq$ $\geqq x_{2n+1} - x^*$ oder $x_{2n} - x_{2n+1} \geqq x^* - x_{2n+1}$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ folgt. Damit wäre dann nach Bedingung (3)

$$(13) \qquad \| x^* - x_{2n+1} \| \leqq \| x_{2n+1} - x_{2n} \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Der in jedem Iterationsschritt in der Norm maximal noch vorhandene Fehler könnte also sofort abgelesen werden. Außer den Einschließungsaussagen wäre es wünschenswert, die Konvergenz der Näherungsfolge gegen die Lösung der vorgelegten Gleichung zu zeigen. Dabei ist von vornherein klar, daß diese Aussagen nur zu erwarten sind, wenn die Operatoren L_n und M_n noch gewisse Voraussetzungen unterworfen werden.

1. Der Operator L sei von monoton nichtfallender bzw. von monoton nichtwachsender Art, d. h. aus $Lx \leqq Ly$ folge $x \leqq y$ bzw. $y \leqq x$. Diese Voraussetzung kann auch so formuliert werden, daß der zu L inverse Operator G isoton bzw. antiton ist. Dabei heißt ein Operator G isiton, wenn aus $x \leqq y$ folgt $Gx \leqq Gy$ und antiton, wenn aus $x \leqq y$ folgt $Gx \geqq Gy$ (nach [7]).

2. Für den Operator M existiere eine Zahl $\varkappa \geqq 0$, so daß $M + \varkappa E$ isoton bzw. $M - \varkappa E$ antiton wird. E bedeute den Einheitsoperator.

3. Zwischen den Operatoren G und G_n und M und M_n soll folgender Zusammenhang bestehen. Es existiere ein gemeinsamer Definitionsbe-

reich von G und G_n $L\mathfrak{d} = \bigcap_n L_n\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$ und ebenso von M und M_n. Es sei $M\mathfrak{d} = \bigcap_n M_n\mathfrak{d}$ und $M\mathfrak{d} \subseteq L\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$. Für alle $x \in L\mathfrak{d}$ gelte

(14) $$\| Gx - G_n x \| \leqq a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und für alle $x \in \mathfrak{d}$

(15) $$\| Mx - M_n x \| \leqq b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei die a_n und b_n unabhängig von x seien. Ferner gelte

(16) $$a_{n+2} \leqq a_{n+1}, b_{n+1} \leqq b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

d. h. bei jedem Iterationsschritt sollen keine schlechteren Näherungen für die Operatoren G und M verwendet werden als beim vorhergehenden Schritt. Außerdem sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Um Einschließungsaussagen zu erwarten, müssen an die Konstanten a_n und b_n weitere Forderungen gestellt werden. Es sei

(17) $$a_{n-1} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_n - x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(18) $$a_{n-2} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(x_n - x_{n-2}), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

(19) $$b_{n-1} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_n x_n - M_{n-1} x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(20) $$b_{n-2} \leqq \frac{1}{4} \mathrm{F}(M_n x_n - M_{n-2} x_{n-2}), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Diese Voraussetzungen sind einleuchtend, da die Unterschiede zwischen den exakten Operatoren G, M und den entsprechenden Näherungsoperatoren in einem der Halbordnung angepaßten Sinne kleiner sein müssen als die Unterschiede zwischen zwei entsprechenden Näherungsschritten des Iterationsverfahrens, wenn Einschließungsaussagen erwartet sollen. Bei zahlreichen Anwendungen sind diese Voraussetzungen erfüllt und auch relativ leicht nachprüfbar, da die rechts stehenden Größen z. B. $M_n x_n - M_{n-1} x_{n-1}$ bei der Rechnung mit anfallen.

Die Forderungen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ bedeuten, daß die Operatoren G_n gegen G und M_n gegen M konvergieren, wobei unter $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G$ verstanden werden soll $\lim\limits_{n\to\infty} \| G_n x - Gx \| = 0$ für alle $x \in L\mathfrak{d}$ und unter $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ $\lim\limits_{n\to\infty} \| M_n x - Mx \| = 0$ für alle $x \in \mathfrak{d}$. Die Operatoren $T_n = G_{n+1} M_n$ konvergieren damit im gleichen Sinne gegen $T = GM$. Dieser Grenzoperator T ist beschränkt mit der vorn eingeführten Konstanten $\beta = \sup \beta_n$, da alle Operatoren T mit der Lipschitzkonstanten β gleichmäßig beschränkt sind.

In den Voraussetzungen 1 und 2 werden Forderungen an die Operatoren G, L, M gestellt. Bei vielen vorkommenden Problemen werden nur die Näherungsoperatoren G_n, L_n und M_n bekannt sein, so daß es Schwierigkeiten bereiten kann, diese Voraussetzungen nachzuweisen. Man kann an ihrer Stelle auch folgende Voraussetzungen benutzen.

1′. Alle Operatoren G_n seien in $L\mathfrak{d}$ isoton oder antiton.

2′. Für die Operatoren M_n lassen sich Zahlen $\varkappa_n \geqq 0$ angeben, so daß $M_n + \varkappa_n E$ isoton oder $M_n - \varkappa_n E$ antiton wird für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n = \varkappa$.

Aus den Voraussetzungen 1′ und 2′ folgen die vorn angegebenen Voraussetzungen 1 und 2, wie leicht einzusehen ist.

4. DIE EINSCHLIESSUNGSSÄTZE

Unter den angegebenen Voraussetzungen gelten in einem vorn definierten Raum $\mathfrak{R}$ für die durch das Iterationsverfahren (8) definierte Näherungsfolge die folgenden beiden Sätze.

Satz 1. Ist der Operator G isoton und benutzt man eine Ausgangsnäherung x_0 mit $x_0 \leqq x_1$, $x_0 \leqq x_2$, so ist

$$x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1 \tag{21}$$

und benutzt man x_0 mit $x_0 \geqq x_1$, $x_0 \geqq x_2$, so gilt

$$x_1 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x^* \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq \ldots \leqq x_0. \tag{22}$$

In beiden Fällen konvergiert die Folge x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen die einzige Lösung x^* der vorgelegten Gleichung (6) im Intervall $\mathfrak{d} = \langle x_0, x_1 \rangle$ bzw. $\mathfrak{d} = \langle x_1, x_0 \rangle$.

Satz 2. Ist der Operator G antiton, so gilt für die Näherungsfolge x_n des Iterationsverfahrens (8) die Aussage (21) oder (22), je nachdem ob von x_0 mit $x_0 \leqq x_1$, $x_0 \leqq x_2$ oder von x_0 mit $x_0 \geqq x_1$, $x_0 \geqq x_2$ ausgegangen wird. Auch in diesem Fall konvergiert die Folge x_n gegen die einzige Lösung x^* der vorgelegten Gleichung (6) in $\mathfrak{d} = \langle x_0, x_1 \rangle$ bzw. $\mathfrak{d} = \langle x_1, x_0 \rangle$.

Zusatz. Verwendet man als Ausgangsnäherung x_0 die Lösung der Gleichung $L_0 x_0 = M_0 \Theta$, so gelten die Ungleichungen $x_0 \geqq x_1$ und $x_0 \geqq x_2$, wenn $\| M\Theta - M_0\Theta \| \leqq \tilde{b}_0$ ist und die Beziehungen $b_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_0\Theta - M_0 x_0)$, $\tilde{b}_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_0\Theta - M_0 x_0)$, $\tilde{b}_0 \leqq \frac{1}{4} F(M_1 x_1 -$

$- M_0\Theta)$, $b_1 \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(M_1x_1 - M_0\Theta)$ erfüllt sind. b_0 und b_1 haben dabei die Bedeutung, die in der Formel (15) angegeben wurde.

Bei dieser Ausgangsnäherung x_0 hat man für die Näherungsfolge x_n also immer die Aussage (22), wenn G isoton oder antiton ist.

Beweis des Satzes 1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß der Operator M antiton ist. Ist diese Bedingung nicht von vornherein erfüllt, so formen wir die Ausgangsgleichung (6) um in

$$Lx - \varkappa x = Mx - \varkappa x \tag{23}$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 2, daß der Operator $\overline{M} = M - \varkappa E$ antiton wird. Als Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (23) benutzen wir

$$L_{n+1}x_{n+1} - \varkappa_{n+1}x_{n+1} = M_nx_n - \varkappa_nx_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Alle über L, L_n, M und M_n getroffenen Voraussetzungen sind jetzt lediglich auf $\overline{L} = L - \varkappa E$, $\overline{L}_n = L_n - \varkappa_nE$, $\overline{M} = M - \varkappa E$ und $\overline{M}_n = M_n - \varkappa_nE$ zu beziehen.

Es wird zunächst der Teil des Satzes 1 bewiesen, der zur Aussage (21) führt.

Nach Voraussetzung ist $x_0 \leqq x_1$. Da M antiton ist, folgt daraus $Mx_0 \geqq Mx_1$. Nun ist $\| Mx_0 - M_0x_0 \| \leqq b_0$, $\| Mx_1 - M_1x_1 \| \leqq b_1$, $b_0 \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(M_1x_1 - M_0x_0)$, $b_1 \leqq b_0 \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(M_1x_1 - M_0x_0)$. Nach dem angegebenen Hilfssatz ist damit $M_0x_0 \geqq M_1x_1$. Da G isoton ist, folgt ferner $GM_0x_0 \geqq GM_1x_1$. Weiter ist

$$\| GM_0x_0 - G_1M_0x_0 \| \leqq a_1, \qquad \| GM_1x_1 - G_2M_1x_1 \| \leqq a_2$$

und

$$a_1 \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(x_2 - x_1) = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(G_2M_1x_1 - G_1M_0x_0),$$

$a_2 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{4}\,\mathrm{F}(x_2 - x_1)$. Daraus folgt nach dem gleichen Hilfssatz $G_1M_0x_0 \geqq G_2M_1x_1$, d. h. $x_1 \geqq x_2$.

Ferner ist nach Voraussetzung $x_0 \leqq x_2$. Da M antiton ist, folgt $Mx_0 \geqq Mx_2$ und hieraus folgt mit $\| Mx_0 - M_0x_0 \| \leqq b_0$, $\| Mx_2 - M_2x_2 \| \leqq b_2$, $b_0 \leqq \frac{1}{4}\,F(M_2x_2 - M_0x_0)$, $b_2 \leqq b_0 \leqq \frac{1}{4}\,F(M_2x_2 - M_0x_0)$ die Beziehung $M_0x_0 \geqq M_2x_2$. Aus der Isotonie von G ergibt sich weiter

$GM_0x_0 \geqq GM_2x_2$ und damit $G_1M_0x_0 \geqq G_3M_2x_2$, da $\| GM_0x_0 - G_1M_0x_0 \| \leqq$ $\leqq a_1$, $\| GM_2x_2 - G_3M_2x_2 \| \leqq a_3$ und

$$a_1 \leqq \frac{1}{4} F(x_3 - x_1) = \frac{1}{4} F(G_3M_2x_2 - G_1M_0x_0),$$

$a_3 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{4} F(x_3 - x_1)$ ist. Somit ist also $x_1 \geqq x_3$. Auf analoge Weise kann aus $x_2 \leqq x_1$ gezeigt werden $x_2 \leqq x_3$, so daß jetzt die folgende Beziehung besteht $x_0 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq x_1$. Wir wiederholen diese Betrachtungen und nehmen an, daß die Rechnungen bis

$$x_0 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_3 \leqq x_1 \tag{25}$$

durchgeführt sind. Können wir daraus

$$x_0 \leqq \ldots \leqq x_{2n} \leqq x_{2n+2} \leqq x_{2n+3} \leqq x_{2n+1} \leqq \ldots \leqq x_1 \tag{26}$$

zeigen, so gelten die Ungleichungen (25) für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Um von den Ungleichungen (25) auf die Ungleichungen (26) schließen zu können, muß noch $x_{2n} \leqq x_{2n+2}$, $x_{2n+2} \leqq x_{2n+3}$ und $x_{2n+3} \leqq x_{2n+1}$ gezeigt werden. Die Betrachtungen gehen prinzipiell so wie am Induktionsanfang.

Es ist jetzt weiter aus der Beziehung (25) zu zeigen, daß die Folge x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen die einzige Lösung der vorgelegten Gleichung (6) konvergiert. Dazu zerlegen wir die Näherungsfolge x_n in eine monoton nichtwachsende Teilfolge x_{2n+1} und eine monoton nichtfallende Teilfolge x_{2n}. Beide Teilfolgen liegen ganz in der Menge $T\langle x_0, x_1\rangle$. Die Menge $T\langle x_0, x_1\rangle$ ist nach Voraussetzung kompakt in sich. Bei Collatz und Schöder [1] wurde gezeigt, daß monoton nichtfallende bzw. monoton nichtwachsende Folgen, die ganz in einer in sich kompakten Menge liegen, konvergieren. In unserem Falle konvergieren also beide Teilfolgen x_{2n+1} und x_{2n} je gegen ein Grenzelement $\bar{x}$ bzw. $\bar{\bar{x}}$. Es ist also

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1},$$

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} G_{2n+1}M_{2n}x_{2n}.$$

Weiter ist nachzuweisen, daß beide Grenzelemente übereinstimmen. Mit der vorn eingeführten Bezeichnung $G_{n+1}M_n = T_n$ haben wir jetzt

$$\begin{aligned} \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \| &= \| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq \| T_{2n}x_{2n} - T_{2n}x_{2n-1} \| + \| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \\ &\leqq \beta \| x_{2n} - x_{2n-1} \| + \| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \|, \end{aligned}$$

worin sich der zweite Summand folgendermaßen abschätzen läßt.

$$\| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| = \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n-1} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \|$$
$$\leqq \| G_{2n+1}M_{2n}x_{2n-1} - GM_{2n}x_{2n-1} \| + \| GM_{2n}x_{2n-1} - GM_{2n-1}x_{2n-1} \|$$
$$+ \| GM_{2n-1}x_{2n-1} - G_{2n}M_{2n-1}x_{2n-1} \|$$
$$\leqq a_{2n+1} + \| G \| \, \| M_{2n}x_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \| + a_{2n}.$$

Berücksichtigen wir noch

$$\| M_{2n}x_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \|$$
$$\leqq \| M_{2n}x_{2n-1} - Mx_{2n-1} \| + \| Mx_{2n-1} - M_{2n-1}x_{2n-1} \|$$
$$\leqq b_{2n} + b_{2n-1},$$

$a_{2n+1} \leqq a_{2n}$, $b_{2n} \leqq b_{2n-1}$ und setzen $\| G \| = \gamma$, so erhalten wir $\| T_{2n}x_{2n-1} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1})$. Setzen wir die Betrachtungen analog fort, so ergibt sich

$$\| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq \beta \| x_{2n} - x_{2n-1} \| + 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1})$$
$$\| x_{2n} - x_{2n-1} \| = \| T_{2n-1}x_{2n-1} - T_{2n-2}x_{2n-2} \|$$
$$\leqq \beta \| x_{2n-1} - x_{2n-2} \| + 2(a_{2n-1} + \gamma b_{2n-2})$$
$$\| x_{2n-1} - x_{2n-2} \| = \| T_{2n-2}x_{2n-2} - T_{2n-3}x_{2n-3} \|$$
$$\leqq \beta \| x_{2n-2} - x_{2n-3} \| + 2(a_{2n-2} + \gamma b_{2n-3})$$

und schließlich

$$\| x_2 - x_1 \| = \| T_1x_1 - T_0x_0 \| \leqq \beta \| x_1 - x_0 \| + 2(a_1 + \gamma b_0).$$

Werden diese Gleichungen ineinander eingesetzt, so ergibt sich folgende Beziehung

$$\| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq$$
$$\leqq \beta^{2n} \| x_1 - x_0 \| + 2\beta^{2n-1}(a_1 + \gamma b_0) + 2\beta^{2n-2}(a_2 + \gamma b_1) +$$
$$+ \ldots + 2\beta(a_{2n-1} + \gamma b_{2n-2}) + 2(a_{2n} + \gamma b_{2n-1}).$$

Bezeichnen wir noch $\| x_1 - x_0 \| = d$, so erhalten wir

$$\| T_{2n}x_{2n} - T_{2n-1}x_{2n-1} \| \leqq S_{2n-1} + \beta^{2n}d \tag{27}$$

mit

$$S_{2n-1} = 2 \sum_{\nu=1}^{2n} \beta^{2n-\nu} (a_\nu + \gamma b_{\nu-1}).$$

Ein gemeinsames Grenzelement $\tilde{x} = \bar{\bar{x}}$ existiert sicher dann, wenn die rechte Seite der Ungleichung (27) für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Da nach Voraussetzung $\beta < 1$ ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^{2n} d = 0$. Weiter ist zu zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = 0$. Nach Voraussetzung ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + \gamma b_{n-1}) = 0$. Bei Vorgabe einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert also ein Index N, so daß für alle $n > N$ gilt $a_n + \gamma b_{n-1} < \varepsilon$. Damit ist

$$S_{2n-1} = 2 \sum_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1}) + 2 \sum_{\nu=N+1}^{2n} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1}),$$

$$S_{2n-1} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma\, b_{\nu-1}) + 2\varepsilon \frac{1 - \beta^{2n-N}}{1-\beta} .$$

Für $n \to \infty$ geht in $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \beta^{2n-\nu}(a_\nu + \gamma b_{\nu-1})$ jeder einzelne Summand gegen Null wegen $\beta < 1$. Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \leqq \frac{\varepsilon}{1-\beta} .$$

Da ε beliebig war, folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = 0$.

Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_{2n-1} x_{2n-1},$$

also beide Teilfolgen konvergieren gegen das gemeinsame Grenzelement $\bar{x} = \bar{\bar{x}} = x^*$.

Es ist jetzt weiter zu zeigen, daß das gemeinsame Grenzelement x^* mit der Lösung der vorgelegten Gleichung (6) übereinstimmt. Es gilt

$$\| T_n x_n - T x^* \| \leqq \| T_n x_n - T_n x^* \| + \| T_n x^* - T x^* \|,$$

$$\| T_n x_n - T x^* \| \leqq \beta \| x_n - x^* \| + \| T_n x^* - T x^* \|,$$

d.h. wenn x_n gegen x^* und die Operatorfolge T_n gegen T konvergiert' konvergiert auch $T_n x_n$ gegen Tx^*. Also hat man

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T_n x_n = T x^*,$$

d. h. aber x^* ist Lösung der vorgelegten Gleichung (6). Diese Lösung x^* ist auch die einzige Lösung der vorliegenden Gleichung in $\mathfrak{d}$. Angenommen es gäbe noch eine zweite Lösung x^{**}, die von der ersten verschieden ist, so müßte $\| x^* - x^{**} \| \neq 0$ sein. Es ist aber

$$\| x^* - x^{**} \| = \| T x^* - T x^{**} \| \leqq \beta \| x^* - x^{**} \|$$

und das ist wegen $0 < \beta < 1$ nur für $\| x^* - x^{**} \| = 0$ erfüllt.

Der Fall des Satzes 1, der zur Aussage (22) führt, kann völlig analog bewiesen werden. Beim Induktionsbeweis am Anfang ist lediglich mit den anderen Anfangswerten zu beginnen.

Beweis des Satzes 2. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier angenommen, daß der Operator M isoton ist. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so formen wir die Ausgangsgleichung (6) um in

$$Lx + \varkappa x = Mx + \varkappa x \tag{28}$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 2, daß der Operator $M + \varkappa E$ isoton wird. Die Gleichung (28) lösen wir dann näherungsweise durch das Iterationsverfahren

$$L_{n+1}x_{n+1} + \varkappa_{n+1}x_{n+1} = M_n x_n + \varkappa_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Alle anfangs für L, L_n, M und M_n getroffenen Voraussetzungen sind jetzt für die überstrichenen Operatoren $\bar{L} = L + \varkappa E$, $\bar{L}_n = L_n + \varkappa_n E$, $\bar{M} = M + \varkappa E$ und $\bar{M}_n = M_n + \varkappa_n E$ festzulegen. Unter der Annahme, daß M isoton ist, können jetzt auf die gleiche Weise wie bei Satz 1 zunächst die Ungleichungen (25) gezeigt werden und daraus die Konvergenz der Näherungsfolge gegen die einzige Lösung der vorgelegten Gleichung (6) in $\mathfrak{d}$.

Der Beweis des Zusatzes geht analog.

LITERATUR

[1] Collatz, L. und Schröder, J., *Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben*, Num. Math. 1, 1959, S. 61—72.

[2] Jäckel, H., *Nichtlineare Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern*, Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Maschinenbau KMSt. 3, H. 2, 1961, S. 23—40.

[3] Schneider, M., *Eine Methode zur näherungsweisen Lösung von Rand- und Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Wiss. Zeitschr. d. TH KMSt. 6, H. 2, 1964, S. 89—108.

[4] Schneider, M., *Das Einschließen der Lösungen von Gleichungen im Banachraum*, Archivum Mathematicum, Tom 3, Fasc. 2, Brno, 1967.

[5] Schmidt, J. W., *Konvergenzuntersuchungen und Fehlerabschätzungen für ein verallgemeinertes Iterationsverfahren*, Arch. Rat. Mech. Anal. 6, 1960, S. 261—276.

[6] Ehrmann, H., *Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren*, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 1959, S. 45—64.

[7] Collatz, L., *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964.

Institut für Mathematik,
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
901 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62, DDR