Archivum Mathematicum

K. Neumann

Über darstellungen von Verbänden mit o-Idealen gerichteter Gruppen

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 1, 61--73

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104651`

ÜBER DARSTELLUNGEN VON VERBÄNDEN MIT o-IDEALEN GERICHTETER GRUPPEN

K. NEUMANN, HALLE (SAALE)

Eingegangen am 23. März 1967, Neufassung am 3. Januar 1968

EINFÜHRUNG

Die o-Ideale einer gerichteten Gruppe G formen einen vollständigen Verband $\mathscr{J}_0(G)$, der im allgemein kein Teilverband des Normalteilerverbandes von G ist. Es scheint nicht ganz einfach zu sein, die Klasse aller zu o-Idealverbänden von gerichteten Gruppen isomorphen Verbände zu charakterisieren. Daher dürfte es von Interesse sein, hinreichende Bedingungen für einen Verband anzugeben, damit er dieser Klasse angehört. Das bisher einzige Resultat in dieser Richtung scheint ein Satz von P. Conrad [4] zu sein, nach dem sich jeder Verband 2^N [1]), wo N ein dualer Baum ist, als Verband aller l-Ideale einer Verbandsgruppe darstellen läßt.

In § 2 werden wir zeigen, daß der Idealverband jeder verallgeimenerten Booleschen Algebra eine Darstellung als l-Idealverband einer Verbandsgruppe gestattet (Satz 2.2). Gleichzeitig erhalten wir eine Art der Umkehrung eines Satzes von F. Šik [8]; und zwar läßt sich jede Boolesche Algebra als die Boolesche Algebra aller o-direkten Faktoren einer gerichteten (sogar Verbands-) Gruppe darstellen (Satz 2.3). In 3.3 verwenden wir das von Conrad—Harvey—Holland [3] eingeführte gemischte Produkt teilweise geordneter Gruppen, um zu zeigen, daß jeder Verband 2^N, wo N eine teilweise geordnete Menge ist, als o-Idealverband einer gerichteten Gruppe darstellbar ist (Satz 3.2). Dabei ergibt sich auch der oben erwähnte Satz von P. Conrad (Satz 3.3).

Die weitgehende Parallelität von Resultaten und Beweisen in den Paragraphen 2 und 3 wirft die Frage einer gemeinsamen Verallgemeinerung der verwendeten Methoden und der Ergebnisse auf; diese Frage wird am Ende von § 3 als Problem formuliert.

Eine erste Fassung des vorliegenden Artikels enthielt im wesentlichen nur den Satz 2.3. Für deren sorgfältige Durchsicht und einige Hinweise möchte ich Herrn Prof. F. Šik und für manches fruchtbare Gespräch über den Gegenstand und die Gestaltung der jetzigen Fassung Herrn Prof. E. T. Schmidt danken.

---

[1]) Mit 2^N bezeichnen wir den Verband aller ordnungserhaltenden Abbildungen der teilweise geordneten Menge N in die zweielementige Kette 2.

§ 1. VORBEMERKUNGEN

Die Bedeutung verwendeter Zeichen wird im allgemeinen klar aus dem Text hervorgehen. Für die benutzten Begriffe und Fakten bezüglich teilweise geordneter (tw. g.) Gruppen sei auf das Buch [5] von L. Fuchs verwiesen. Einige von ihnen seien an dieser Stelle erläutert; Fußnoten werden ansonsten kurze Erklärungen enthalten.

Eine tw. g. Gruppe G heißt gerichtet, wenn jedes ihrer Elemente eine gemeinsame obere (untere) Schranke mit dem Einheitselement e besitzt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Gruppe G von ihrem positiven Kegel $G^+ = \{g \in G; g \geqq e\}$ erzeugt wird. Die tw.g. Gruppe heißt Verbandsgruppe, wenn sie bezüglich der in ihr erklärten Ordnungsrelation einen Verband darstellt; G ist linear geordnet, wenn je zwei ihrer Elemente miteinander vergleichbar sind. Natürlich ist jede linear georndete Gruppe eine Verbandsgruppe und jede solche wieder eine gerichtete Gruppe.

Eine Untergruppe G_1 von G heißt konvex, wenn sie zugleich eine konvexe Untermenge der tw. g. Menge G in der üblichen Bedeutung ist. Dieser Sachverhalt wird auch dadurch beschrieben, daß aus $e \leqq f_2 \leqq f_1$, $f_1 \in G_1$ stets $f_2 \in G_1$ folgt. Ein o-Ideal von G ist jeder konvexe gerichtete Normalteiler. In Verbandsgruppen ist dieser Begriff äquivalent dem des l-Ideals, d.h. eines konvexen Normalteilers und Teilverbandes von G. G heißt o-einfach, wenn kein anderes o-Ideal als $\{e\}$ — und wenn G gerichtet ist, dieses selbst — vorhanden ist. Eine leichte Überlegung bereichtigt uns dann, die Forderung „nichttriviale o-einfache gerichtete Gruppe“ in den Sätzen 2.1 und 3.1 durch die äquivalent „o-einfache, nicht trivial geordnete Gruppe“ zu ersetzen, wenn „nicht trivial geordnet“ $G^+ \neq \{e\}$ bedeutet.

Bei allen Gruppenkonstruktionen werden die Ausgangsgruppen als nichttrivial ($G \neq \{e\}$) vorausgesetzt und wir weisen deshalb nur an den wichtigsten Stellen auf diesen Tatbestand hin. Für Untergruppen G_α ($\alpha \in A$) (A ist eine Indexmenge) von G bedeutet $\langle\{G_\alpha;\ \alpha \in A\}\rangle$ die von den G_α in G erzeugte Untergruppe.

Zwei Untergruppen G_1 und G_2 der tw. g. Gruppe G heißen komplementäre o-direkte Faktoren von G, wenn sie komplementäre direkte Faktoren sind und aus $e \leqq f_1 f_2$, $f_i \in G_i$ stets $f_i \in G_i^+$ $(i = 1, 2)$ folgt. Unter dem o-kartesischen Produkt der tw. g. Gruppen G_λ $(\lambda \in M)$ verstehen wir das kartesische Produkt $\Pi^* G_\lambda$ $(\lambda \in M)$ mit der Produktordnung „$f_1 \leqq f_2$ genau dann, wenn $f_1(\lambda) \leqq f_2(\lambda)$ für alle $\lambda \in M$ gilt“. Sind alle Faktoren G_λ gleich einer festen tw. g. Gruppe G, so sprechen wir von der o-kartesischen Potenz G^M der tw. g. Gruppe G. Das direkte Produkt ΠG_λ $(\lambda \in M)$ ist das beschränkte direkte Produkt im üblichen Sinne.

Für ein Element f eines der Produkte bezeichnet $s(f)$ stets die Teilmenge aller der $\lambda \in M$, für welche $f(\lambda) \neq e_\lambda$ gilt.

§ 2. DARSTELLUNG DES IDEALVERBANDES EINER VERALLGEMEINERTEN BOOLESCHEN ALGEBRA

Bekanntlich läßt sich jede verallgemeinerte Boolesche Algebra B auf natürliche Weise isomorph als Teilverband in die Boolesche Algebra $B(M)$ aller Teilmengen der Menge M aller echten dualen Primideale von B einbetten (vgl. M. H. Stone [9]). Dabei wird das kleinste Element von B gerade auf $\emptyset \in B(M)$ und — wenn B eine Boolesche Algebra ist — das größte gerade auf $M \in B(M)$ abgebildet. Von nun an fassen wir die fest vorgebene, aber sonst beliebige verallgemeinerte Boolesche Algebra B stets als Teilverband von $B(M)$ im Sinne dieser natürlichen Einbettung auf. Die Elemente von $B(M)$ werden wir mit $\emptyset, a, b, \ldots, M$ bezeichnen, die von M durch kleine griechische Buchstaben.

Für eine beliebige fest gewählte tw. g. Gruppe $G \neq \{e\}$ bilden wir nun die o-kartesische Potenz G^M. Jedem $a \in B(M)$ ordnen wir die Menge $G(a)$ aller derjenigen $f \in G^M$ zu, die auf a einen konstanten und sonst den Wert e haben, für welche also $f(\lambda) = f(\mu) \in G$ für $\lambda, \mu \in a$ und $f(\gamma) = e$ für $\gamma \notin a$ gilt. Offenbar ist $G(a)$ eine Untergruppe von G^M, und zwar ist $G(\emptyset) = \{e\}$ und $G(a) \cong_0 G$ für $a \neq \emptyset$. Aus $a \neq b$ folgt $G(a) \cap G(b) = \{e\}$. Ist $a \cap b = \emptyset$, so gilt $G(a \cup b) \subseteq \langle G(a), G(b) \rangle$ und außerdem sind in diesem Falle $G(a)$ und $G(b)$ elementweise vertauschbar.

Wir betrachten den Idealverband $\mathscr{J}(B)$ von B mit den Operationen $\wedge$ und $\vee$. Jedem Ideal $I \in \mathscr{J}(B)$ ordnen wir diejenige Untergruppe $H(I, G)$ von G^M zu, die von allen $G(a)$ mit $a \in I$ erzeugt wird, $H(I, G) = \langle \{G(a); a \in I\} \rangle$. Diese betrachten wir als tw. g. Gruppe mit der Ordnung, die von der auf G^M definierten Produktordnung induziert wird. Ist I ein Hauptideal $(a]$, so schreiben wir einfacher $H(a, G)$ für $H((a], G)$.

Definition. *Die tw.g. Untergruppe $H(B, G)$ von G^M heißt die B-Potenz der tw. g. Gruppe G.*

Für ein Element f aus G^M mit $f \in H(I, G)$ für $I \in \mathscr{J}(B)$ existieren endlich viele Elemente $f_i \in G(a_i)$ mit $a_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n)$, so daß $f = f_1 \ldots f_n$ ist. Dann ist aber $s(f) \leqq \bigcup_{i=1}^{n} a_i = a \in I$. Aus Lemma 2.1 wird später sogar $s(f) \in I$ ersichtlich. Ist nun umgekehrt ein Element von G^M gegeben, welches in $H(B, G)$ liegt und für das $s(f) \leqq a$ für ein $a \in B$ gilt, so muß $f \in H(a, G)$ sein. Nach der Definition von $H(B, G)$ ist nämlich $f = f_1 \ldots f_n$, $f_i \in G(a_i)$, $a_i \in B$. Wir bilden die Durchschnitte $a_i' = a_i \cap a \in B$, die Elemente $f_i' \in G(a_i')$ mit $f_i'(\lambda) = f_i(\lambda)$ für $\lambda \in a_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$ und ihr Produkt $f' = f_1' \ldots f_n' \in H(a, G)$. Wegen $s(f) \leqq a$ folgt $f'(\lambda) = f(\lambda)$ für alle $\lambda \in M$ und deshalb ist in der Tat $f' = f \in H(a, G)$.

Definition. *Sei* $f \in H(I, G)$. *Eine Produktdarstellung* $f = f_1 \ldots f_n$ *mit* $e \neq f_i \in G(a_i)$, $a_i \in I$, $I \in \mathcal{J}(B)$ *und* $a_i \cap a_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *heißt eine Normaldarstellung von* f *bezüglich* I.

Lemma 2.1 *Für jedes* $I \in \mathcal{J}(B)$ *besitzt jedes Element* $f \neq e$ *aus* $H(I, G)$ *eine Normaldarstellung bezüglich* I.

Beweis. Vorerst befassen wir uns mit dem Fall $I = B$. Wir zeigen zunächst, daß jedes Produkt $e \neq f = f_1 \ldots f_k f_{k+1}$, $e \neq f_i \in G(a_i)$, $a_i \in B$, in welchem $f_1 \ldots f_k$ eine Normaldarstellung von sich selbst ist, eine Normaldarstellung bezüglich B besitzt. Wir bezeichnen dazu mit $\bar{a}_{k+1}$ bzw. $\bar{a}$ das relative Komplement von a_{k+1} bzw. $\bigcup_{i=1}^{k} a_i$ im Intervall $[\emptyset, \bigcup_{i=1}^{k+1} a_i]$. Nun setzen wir $a_i' = a_i \cap a_{k+1}$, $a_i'' = a_i \cap \bar{a}_{k+1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $a_{k+1}'' = \bar{a} \cap a_{k+1}$. Die so erhaltenen Teilmengen von M liegen alle in B und sind paarweise disjunkt. Wir betrachten Elemente $f_i' \in G(a_i')$ mit $f_i'(\lambda) = f_i(\lambda) f_{k+1}(\lambda)$ für $\lambda \in a_i'$, $f_i'' \in G(a_i'')$ mit $f_i''(\mu) = f_i(\mu)$ für $\mu \in a_i''$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $f_{k+1}'' \in G(a_{k+1}'')$ mit $f_{k+1}''(\gamma) = f_{k+1}(\gamma)$ für $\gamma \in a_{k+1}''$. Durch Rechnung ergibt sich $f = f_1' \ldots f_k' f_1'' \ldots f_{k+1}''$. Werden aus diesem Produkt alle Faktoren, die gleich e sind gestrichen, so erhalten wir die gewünschte Normaldarstellung von f bezüglich B.

Nun läßt sich jedes Element $f \neq e$ von $H(B, G)$ in der Form $f = f_1 \ldots f_n$, $e \neq f_i \in G(a_i)$, $a_i \in B$ schreiben. Den Nachweis für die Existenz einer Normaldarstellung von f führen wir durch Induktion nach der Anzahl l der Faktoren in einem solchen Produkt. Für $l = 1$ ist nichts zu beweisen. Falls für alle Produkte dieser Art mit weniger als n Faktoren die Existenz einer Normaldarstellung bezüglich B bewiesen ist, so können wir in dem Produkt $f_1 \ldots f_{n-1} f_n = f$ den Faktor $f_1 \ldots f_{n-1}$ durch eine Normaldarstellung ersetzen und werden auf den oben behandelten Fall geführt.

Ist nun $e \neq f \in H(I, G)$, so gilt $s(f) \leqq a$ für ein geeignetes $a \in I$. Wenn $f = f_1 \ldots f_n$, $f_i \in G(a_i)$ eine Normaldarstellung von f bezüglich B ist, so gilt offensichtlich $s(f) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$. Dann folgt aber $s(f) \in I$ und das Produkt ist eine Normaldatstellung von f bezüglich I[2]).

Lemma 2.2 *Seien* G *eine tw.g. (gerichtete) Gruppe,* B *eine verallgemeinerte Boolesche Algebra und* $I_1 \subseteq I_2$ *Ideale von* B. *Dann ist die Untergruppe* $H(I_1, G)$ *der Untergruppe* $H(I_2, G)$ *der* B*-Potenz* $H(B, G)$ *ein konvexer Normalteiler (o-Ideal) in* $H(I_2, G)$.

Beweis. Sei $f_i \in H(I_i, G)$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $s(f_1') = s(f_1) \in I_1$ nach Lemma 2.1 für $f_1' = f_2 f_1 f_2^{-1}$. Da daraus $f_1' \in H(I_1, G)$ folgt, ist die Normal-

---

[2]) Werden in einer gegebenen Normaldarstellung eines Elementes f passende Faktoren zusammengefaßt, so erhält man eine eindeutige Normaldarstellung für f.

teilereigenschaft gezeigt. Gilt $e \leqq f_2 \leqq f_1$, so erhalten wir wegen $f_i(\lambda) \geqq e$ für alle $\lambda \in M$ $(i = 1, 2)$, daß $s(f_2) \subseteq s(f_1) \in I_1$ gilt, woraus mit $f_2 \in \in H(I_1, G)$ die Konvexität dieser Untergruppe in $H(I_2, G)$ folgt.

Wir müssen nun noch zeigen, daß mit G stets auch $H(I, G)$ für $I \in \mathcal{J}(B)$ gerichtet ist. Für ein beliebiges Element $f \in H(I, G)$ sei $f = f_1 \ldots f_n$, $f_i \in G(a_i)$, $a_i \in I$ eine Normaldarstellung bezüglich I. Für jedes $f_i(\lambda) = g_i$, $\lambda \in a_i$ existiert eine gemeinsame obere Schranke $g'_i \in G$ mit dem Einheitselement e; da ja G gerichtet ist. Die Elemente $f'_i \in G(a_i)$ mit $f'_i(\lambda) = g'_i$ für $\lambda \in a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ werden multipliziert und $f' = f'_1 \ldots f'_n \in H(I, G)$ ist eine gesuchte obere Schranke von f und e in $H(I, G)$.

Lemma 2.3 *Ist G eine Rieszgruppe (Verbandsgruppe, linear geordnete Gruppe), so ist die B-Potenz $H(B, G)$ von G eine Rieszgruppe (Verbandsgruppe, verbandsgeordnete Vektorgruppe)*[3]).

Beweis. Sei G eine Rieszgruppe. Nach Lemma 2.2 ist $H(B, G)$ gerichtet. Es genügt also zu zeigen, daß zu jedem Elemententripel $e < f_i \in H(B, G)$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $f_1 \leqq f_2 f_3$ Elemente $f'_j \in H(B, G)$ mit $e \leqq f'_j \leqq f_j$ $(j = 2, 3)$ existieren, so daß $f_1 = f'_2 f'_3$ gilt. Offenbar ist $s(f_1) \leqq s(f_2) \cup s(f_3) = s(f_2 f_3)$ und diese sind in B enthalten. Wir betrachten nun Normaldarstellungen $f_i = f_{i,1} \ldots f_{i,n_i}$ bezüglich B mit $f_{i,j} \in \in G(a_{i,j})$, $a_{i,j} \in B$ und die Elemente $a'_{i,j} = s(f_1) \cap a_{i,j} \in B$ $(j = 1, \ldots, n_i;$ $i = 1, 2, 3)$. Es gilt $s(f_1) = \bigcup_{j=1}^{n_i} a'_{i,j} \cup \bar{a}_i$, wo $\bar{a}_i$ das relative Komplement von $\bigcup_{j=1}^{n_i} a'_{i,j}$ im Intervall $[\emptyset, s(f_1)]$ $(i = 1, 2, 3)$ ist. Damit erhalten wir drei direkte Vereinigungsdarstellungen von $s(f_1)$ in B, die eine ebensolche gemeinsame Verfeinerung $s(f_1) = \bigcup_{k=1}^{m} b_k$, $b_k \in B$, $b_k \cap b_l = \emptyset$ $(k \neq l)$ besitzen. Auf jedem der b_k ist f_i konstant, d.h. es gilt $f_i(\lambda) = f_i(\mu) = g_{i,k} \in G$ $(i = 1, 2, 3)$ für λ, $\mu \in b_k$ und es ist $e \leqq g_{1,k} \leqq g_{2,k}\, g_{3,k}$; $(k = 1, \ldots, m)$. Da G Rieszgruppe ist, existieren Elemente $g'_{j,k}$ mit $e \leqq g'_{j,k} \leqq g_{j,k}$ $(j = 2, 3)$ und $g_{1,k} = g'_{2,k} g'_{3,k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Mit den Elementen $f'_{j,k} \in G(b_k)$, $f'_{j,k}(\lambda) = g'_{j,k}$, $\lambda \in b_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ bilden wir die Produkte $f'_{j,1} \ldots f'_{j,m}$ $(j = 2, 3)$ und erhalten so die gesuchten Elemente f'_2, f'_3.

Wir wenden uns nun dem Beweis der zweiten Behauptung des Lemmas zu, die Richtigkeit der letzten ist daraus unmittelbar zu ersehen.

---

[3]) Eine gerichtete Gruppe ist eine Rieszgruppe, wenn zu jedem Element f, welches einer Ungleichung $e \leqq f \leqq f_1 f_2$ mit positiven f_1 und f_2 genügt, Elemente f'_i mit $e \leqq f'_i \leqq f_i$ $(i = 1, 2)$ und $f = f'_1 f'_2$ existieren. Für andere Charakterisierungen und Eigenschaften solcher Gruppen vgl. L. Fuchs [5] S. 156—160.

Eine Untergruppe eines o-kartesischen Produktes von linear geordneten Gruppen, die zugleich Teilverband ist, heißt eine verbandsgeordnete Vektorgruppe.

Es ist nur zu zeigen, daß für jedes $e \neq f \in H(B, G)$ und das Einheitselement e die kleinste gemeinsame obere Schranke $f \vee e$ in $H(B, G)$ existiert. Ist $f = f_1 \ldots f_n, f_i \in G(a_i)$ eine Normaldarstellung bezüglich B, so betrachte man die Elemente $f'_i \in G(a_i)$ mit $f'_i(\lambda) = f_i(\lambda) \vee e$ für $\lambda \in a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, wobei die Vereinigung in G zu verstehen ist. $f' = f'_1 \ldots f'_n$ ist die Vereinigung von f und e in G^M; $H(B, G)$ also eine Verbandsuntergruppe von G^M und für linear geordnetes G eine verbandsgeordnete Vektorgruppe.

Lemma 2.4 *Sei $G \neq \{e\}$ eine tw. g. (gerichtete, Verbands-)Gruppe und B eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Die Abbildung $I \to H(I, G)$ des Idealverbandes $\mathscr{J}(B)$ in den Untergruppenverband der B-Potenz $H(B, G)$ von G ist ein vollständiger Verbandsisomorphismus in den Verband aller konvexen Normalteiler (o-Ideale, l-Ideale) von $H(B, G)$. Der Bildbereich $\{H(I, G);\ I \in \mathscr{J}(B)\}$ ist ein vollständiger Teilverband des Normalteilerverbandes von $H(B, G)$.*

Beweis. Um die Eineindeutigkeit der Abbildung zu beweisen, wollen wir für zwei Ideale $I_1, I_2 \in \mathscr{J}(B)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I_2 \nsubseteq I_1$ annehmen. Dann existiert ein $b \in I_2$, $b \notin I_1$ und es gilt $G(b) \subseteq \subseteq H(I_2, G)$. Wäre $H(I_1, G) = H(I_2, G)$, so besäße jedes Element $f \in G(b)$ eine Normaldarstellung bezüglich I_1, $f = f_1 \ldots f_n$, $f_i \in G(a_i)$, $a_i \in I_1$ und mit $b = s(f) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i \in I_1$ folgte ein Widerspruch zur Annahme. Aus $I_1 \neq I_2$ folgt $H(I_1, G) \neq H(I_2, G)$.

Sei nun $\{I_\alpha, \alpha \in A\}$ ein beliebiges System von Idealen aus $\mathscr{J}(B)$. Offenbar gilt $H(\bigwedge_\alpha I_\alpha, G) \subseteq \bigcap_\alpha H(I_\alpha, G)$, wobei auf der rechten Seite der mengentheoretische Durchschnitt steht. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, betrachten wir ein $f \in \bigcap_\alpha H(I_\alpha, G)$. Dann ist $s(f) \in I_\alpha$ $(\alpha \in A)$ und damit $s(f) \in \bigwedge_\alpha I_\alpha$ und $f \in H(\bigwedge_\alpha I_\alpha, G)$.

Auch $\langle\{H(I_\alpha, G);\ \alpha \in A\}\rangle \subseteq H(\bigvee_\alpha I_\alpha, G)$ ist wegen der Definition von $H(I, G)$ trivial. Die Inklusion in der anderen Richtung ist bewiesen, wenn für jedes $c \in \bigvee_\alpha I_\alpha$ auch $G(c) \subseteq \langle\{H(I_\alpha, G);\ \alpha \in A\}\rangle$ gilt. Für geeignete $b_i \in I_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt aber $c = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$. In der verallgemeinerten Booleschen Algebra B läßt sich diese Darstellung durch eine direkte Vereinigung $c = \bigcup_{i=1}^{n} c_i$, $c_i \cap \bigcup_{j \neq i} c_j = \emptyset$, $c_i \in I_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ersetzen. Dann folgt aber

$$G(c) \subseteq G(\bigcup_{i=1}^{n} c_i) \subseteq \langle\{G(c_i);\ i = 1, \ldots, n\}\rangle \subseteq$$
$$\subseteq \langle\{H(I_{\alpha_i}, G);\ i = 1, \ldots, n\}\rangle \subseteq \langle\{H(I_\alpha, G);\ \alpha \in A\}\rangle.$$

Daraus geht hervor, daß die Abbildung ein vollständiger Verbandsisomorphismus und die letzte Behauptung des Lemmas richtig ist.

Die restlichen Behauptungen sind Folgerungen aus Lemma 2.2 und 2.3.

Lemma 2.5 *Besitzt das Ideal I der verallgemeinerten Booleschen Algebra B ein Komplement im Idealverband $\mathcal{J}(B)$, so ist die Gruppe $H(I, G)$ ein o-direkter Faktor der B-Potenz $H(B, G)$ von G.*

Beweis. Wir beweisen: Sind I_1 und I_2 relative Komplemente voneinander im Intervall $(\emptyset, I]$ des Idealverbandes $\mathcal{J}(B)$, so sind $H(I_1, G)$ und $H(I_2, G)$ komplementäre o-direkte Faktoren von $H(I, G)$. Nach Lemma 2.4 müssen diese Gruppen komplementäre direkte Faktoren von $H(I, G)$ im gruppentheoretischen Sinne sein. Sei also $e \leqq f \in H(I, G)$ und $f = f_1 f_2, f_i \in H(I_i, G)$. Wegen $s(f_i) \in I_i$ und $s(f_1) \cap s(f_2) = \emptyset$ erhalten wir $f(\lambda) = f_i(\lambda)$ für $\lambda \in s(f_i)$; wegen $f \geqq e$ und der Definition der Ordnung in G^M folgt $f_i \geqq e$ $(i = 1, 2)$, was gerade zu zeigen war.

Satz 2.1 *Sei B eine verallgemeinerte Boolesche Algebra und $G \neq \{e\}$ eine o-einfache gerichtete Gruppe. Der Verband $\mathcal{J}_0(H(B, G))$ aller o-Ideale der B-Potenz $H(B, G)$ von G ist vollständig isomorph zum Idealverband $\mathcal{J}(B)$ von B und ein vollständiger Teilverband des Normalteilerverbandes von $H(B, G)$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.4 braucht nur jedem o-Ideal K von $H(B, G)$ ein Ideal $J(K) \in \mathcal{J}(B)$ zugeordnet zu werden, für welches $K = H(J(K), G)$ gilt.

Für ein o-Ideal K betrachten wir die Teilmenge $J(K) = \{a \in B; G(a) \subseteq K\}$ von B. Wir bemerken dazu, daß aus $G(a)^+ \cap K \neq \{e\}, a \in B$ auch $a \in J(K)$ folgt. Die von der Einheitsuntergruppe verschiedene von $G(a)^+ \cap K$ in $G(a)$ erzeugte Untergruppe liegt in K und ist ein o-Ideal von $G(a) \simeq_0 G$, wegen der o-Einfachheit von G also selbst gleich $G(a)$, woraus die Behauptung folgt. Da nun $\{e\} = G(\emptyset)$ stets in K enthalten ist, kann $J(K)$ nie leer sein. Sei $a_1 \geqq a_2 \neq \emptyset$; $a_1, a_2 \in B$ und $a_1 \in J(K)$. Nach den Voraussetzungen existiert ein $g \in G$ mit $g > e$. Die Elemente $f_i \in G(a_i)$ mit $f_i(\lambda) = g$ für $\lambda \in a_i$ $(i = 1, 2)$ erfüllen die Ungleichung $f_1 \geqq f_2 > e$. Aus der Konvexität von K folgt $f_2 \in G(a_2)^+ \cap K$, also $a_2 \in J(K)$. Mit a_1, a_2 liegt nun auch $a_3 = a_1 \cap a_2$ in $J(K)$. Aus den Elementen $f_i \in G(a_i) \subseteq K$ mit $f_i(\lambda) = g > e$ für $\lambda \in a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bilden wir das Produkt $f = f_1 f_2 f_3^{-1} \in G(a_1 \cup a_2)$ und $f(\lambda) = g$ für $\lambda \in a_1 \cup a_2$. Mit einem ähnlichen Schluß wie eben folgt $a_1 \cup a_2 \in J(K)$; $J(K)$ ist also für jedes o-Ideal K ein Ideal von B.

Wegen der Definition von $J(K)$ ist $H(J(K), G) \subseteq K$ trivial. Das einzige o-Ideal K mit $K^+ = \{e\}$ ist die Einheitsuntergruppe $H(\emptyset, G)$. Ist $K^+ \neq \{e\}$, so sei $f > e$ ein Element aus K. Nach dem Lemma 2.1 besitzt f eine Normaldarstellung bezüglich $B, f = f_1 \ldots f_n, e \neq f_i \in G(a_i)$, $a_i \in B$. Es folgt $f \geqq f_i > e$ und wegen der Konvexität von K erhalten wir $a_i \in J(K)$ für $i = 1, .., n$. Somit ist $f \in H(J(K), G)$, also ist $K^+ \subseteq$

$\subseteq H(J(K), G)$, und da K gerichtet ist, auch $K \subseteq H(J(K), G)$, was den Beweis des Satzes abschließt.

Da die (komutative) additive Gruppe der reellen Zahlen linear geordnet und o-einfach ist, weiterhin von C. G. CHEHATA [1], A. H. CLIFFORD [2], B. H. NEUMANN [6] und L. S. RIEGER [7] auch nichtkommutative solche Gruppen angegeben wurden[4]), erhalten wir aus Satz 2.1 und Lemma 2.3 den

Satz 2.2. *Zu jeder verallgemeinerten Booleschen Algebra B existieren sowohl kommutative als auch nichtkommutative gerichtete (sogar verbandsgeordnete Vektor-) Gruppen H, deren Verbände $\mathscr{J}_0(H)$ ($\mathscr{J}_l(H)$) aller ihrer o-Ideale (l-Ideale) zum Idealverband $\mathscr{J}(B)$ isomorph sind.*

Beschränken wir uns auf den Fall gewöhnlicher Boolescher Algebren B, so wissen wir, daß im Idealverband $\mathscr{J}(B)$ die Hauptideale $(a]$, $a \in B$ einen zu B isomorphen Teilverband bilden und genau diejenigen Ideale sind, die ein Komplement besitzen. Satz 2.1, Lemma 2.3 und 2.5 und die obige Bemerkung führen uns dann auf

Satz 2.3. *Zu jeder Booleschen Algebra B existieren sowohl kommutative als auch nichtkommutative gerichtete (sogar verbandsgeordnete Vektor-) Gruppen H, deren Verbände $\mathscr{D}(H)$ aller ihrer o-direkten Faktoren zu B isomorph sind.*

Dieses Resultat stellt eine Art Umkehrung zu einem Satz von F. ŠIK [8] dar, der besagt, daß die Gesamtheit $\mathscr{D}(H)$ aller o-direkten Faktoren einer gerichteten Gruppe H stets eine Boolesche Algebra bildet, die Teilverband des Normalteilerverbandes von H ist.

§ 3. DARSTELLUNG DER VERBÄNDE 2^N

Sei N eine tw. g. Menge. Eine Teilmenge S von N heißt ein Segment von N, wenn aus $\gamma \in S$ und $\gamma \geqq \delta \in N$ stets $\delta \in S$ folgt. Die Menge aller Segmente von N bildet bezüglich der mengentheoretischen Operationen $\cap$ und $\cup$ einen vollständigen Teilverband $\mathscr{S}(N)$ von $B(N)$, dessen größtes Element N und dessen kleinstes $\emptyset$ ist. Es ist wohlbekannt, daß $\mathscr{S}(N)$ zum Verband 2^N aller ordnungserhaltenden Abbildungen der tw. g. Menge N in die zweielementige Kette $\mathbf{2}$ isomorph ist. Für eine trivial geordnete Menge N gilt natürlich $\mathscr{S}(N) = B(N)$.

Nunmehr wenden wir uns einer von CONRAD—HARVEY—HOLLAND [3] eingeführten Gruppenkonstruktion zu, die sich als außerordentlich nützlich beim Studium der Verbandsgruppen erwies. Für die Beweise der in unserer Einführung enthaltenen Behauptungen vgl. [3], wobei auf einige Benennungsunterschiede zu achten ist[5]).

[4]) L. Fuchs erwähnt in [5], S. 136 von T. Lloyd stammende Beispiele algebraisch einfacher Verbandsgruppen, die nicht linear geordnet sind.

[5]) Vgl. auch L. Fuchs [5], S. 48.

Sei N eine tw. g Menge und $\{G_\lambda;\ \lambda \in N\}$ eine Familie nichttrivialer tw. g. Gruppen. Mit V^*G_λ bezeichnen wir diejenige Untergruppe des kartesischen Produktes Π^*G_λ $(\lambda \in N)$, die aus allen Elementen f besteht, für welche $s(f)$ der Maximalbedingung genügt. Offenbar ist das direkte Produkt ΠG_λ $(\lambda \in N)$ eine Untergruppe von V^*G_λ. Jedem $f \in V^*G_\lambda$ wird die Teilmenge $s'(f)$ aller derjenigen $\gamma \in s(f)$ zugeordnet, für welche aus $\gamma < \delta \in N$ stets $f(\delta) = e_\delta$ folgt.

Definition. *Die mit der Ordnungsrelation „$f > e$ genau dann, wenn $f \neq e$ und $f(\gamma) > e_\gamma$ für alle $\gamma \in s'(f)$" versehene Gruppe V^*G_λ wird das komplette gemischte Produkt der tw. g. Gruppen G_λ $(\lambda \in N)$ über der tw. g. Menge N genannt und mit $V^*(N, G_\lambda)$ bezeichnet. Das mit der induzierten Ordnung versehene direkte Produkt ΠG_λ $(\lambda \in N)$ heißt das gemischte Produkt $V(N, G_\lambda)$.*

Jedem Segment $S \in \mathscr{S}(N)$ ordnen wir diejenige Untergruppe des (kompletten) gemischten Produktes $V(N, G_\lambda)$ $(V^*(N, G_\lambda))$ zu, die aus allen Elementen f dieses Produktes mit $s(f) \subseteq S$ und dem Einheitselement besteht und bezeichnen sie vorläufig mit $W(S, G_\lambda)$ $(W^*(S, G_\lambda))$.

Lemma 3.1. *Die Untergruppe $W(S, G_\lambda)$ $(W^*(S, G_\lambda))$ von $V(N, G_\lambda)$ $(V^*(N, G_\lambda))$ ist o-isomorph mit dem (kompletten) gemischten Produkt $V(S, G_\lambda)$ $(V^*(S, G_\lambda))$ der tw. g. Gruppen $G_\lambda (\lambda \in S)$ über der tw. g. Menge S, wobei die Ordnungsrelation von S diejenige des Segmentes S in N ist.*

Beweis. Jedem $f \in W^*(S, G_\lambda)$ werde als Bild das Element f' von $V^*(S, G_\lambda)$ zugeordnet, für welches $f'(\lambda) = f(\lambda)$ für alle $\lambda \in S$ gilt. Offenbar vermittelt diese Abbildung die gewünschten o-Isomorphismen.

Nunmehr können wir, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, für W stets V schreiben. Offenbar gelten $V(\emptyset, G_\lambda) = \{e\}$ und $V(S_1, G_\lambda) \subseteq$ $\subseteq V(S_2, G_\lambda)$ für Segmente $S_1 \subseteq S_2$ (entsprechend in $V^*(N, G_\lambda)$).

Lemma 3.2 *Seien N eine tw. g. Menge, $S_1 \subseteq S_2$ Segmente von N und $\{G_\lambda,\ \lambda \in N\}$ eine Familie von tw. g. (gerichteten) Gruppen. Dann ist die Untergruppe $V(S_1, G_\lambda)$ der Untergruppe $V(S_2, G_\lambda)$ des gemischten Produktes $V(N, G_\lambda)$ ein konvexer Normalteiler (o-Ideal) von $V(S_2, G_\lambda)$. Die gleiche Behauptung gilt für die entsprechenden Untergruppen des kompletten gemischten Produktes.*

Beweis. Die Normalteilereigenschaft ist trivial. Sei $e < f_2 < f_1$ mit $f_i \in V(S_i, G_\lambda)$ $(i = 1, 2)$ und $\gamma \in s'(f_2) \neq \emptyset$. Wir können zeigen, daß γ kleiner als ein geeignetes $\gamma' \in s'(f_1)$ ist, woraus $s(f_2) \subseteq S_1$ und damit $f_2 \in V(S_1, G_\lambda)$ folgt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann müßte $f_1(\gamma) = e_\gamma$ sein und γ läge auch in $s'(f_1f_2^{-1})$. Dies stellt aber wegen $f_1f_2^{-1}(\gamma) = e_\gamma f_2^{-1}(\gamma) < e_\gamma$ einen Widerspruch zu $f_1f_2^{-1} > e$ dar. Durch wörtliche Übertragung dieser Überlegungen läßt sich die Konvexität auch im Falle des kompletten gemischten Produktes beweisen.

Um zu zeigen, daß die entsprechenden Gruppen gerichtet sind, genügt es wegen Lemma 3.1 offensichtlich, diese Tatsache für $V(N, G_\lambda)$

$(V^*(N, G_\lambda))$ zu beweisen. Wir geben für das Einselement e und ein beliebiges Element $f \in V^*(N, G_\lambda)$ eine gemeinsame obere Schranke an. Für jedes $\gamma \in s'(f)$ existiert nach Voraussetzung über die G_λ eine gemeinsame obere Schranke $g_\gamma \in G_\gamma$ von e_γ und $f(\gamma)$, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $> e_\gamma$ annehmen können. Das Element f' mit $f'(\gamma) = g_\gamma$ für $\gamma \in s'(f)$ und $f'(\lambda) = f(\lambda)$ für $\lambda \notin s'(f)$ liegt wegen $s(f) = s(f')$ in $V^*(N, G_\lambda)$ und ist $> e$. Da $f'f^{-1}(\lambda) = e_\lambda$ für $\lambda \notin s'(f)$ und $f'f^{-1}(\gamma) = g_\gamma f(\gamma)^{-1} \geqq e_\gamma$ für $\gamma \in s'(f)$ gilt, folgt $f' \geqq f$, womit die gemeinsame obere Schranke gefunden ist. Wegen $s(f) = s'(f)$ liegt mit f außerdem auch f' in $V(N, G_\lambda)$, so daß unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Lemma 3.3 (CONRAD—HARVEY—HOLLAND[3]) *Das (komplette) gemischte Produkt $V(N, G_\lambda)$ $(V^*(N, G_\lambda))$ der tw. g. Gruppen $G_\lambda (\lambda \in N)$ über der tw. g. Menge N ist genau dann eine Verbandsgruppe, wenn*

(1) *N ein dualer Baum ist, d. h. kein Paar von unvergleichbaren Elementen aus N besitzt eine gemeinsame untere Schranke, und*

(2) *G_λ für in N minimale λ eine Verbandsgruppe und sonst eine linear geordnete Gruppe ist.*

Beweis. Siehe [3].

Lemma 3.4 *Sei N eine tw. g. Menge und $\{G_\lambda;\, \lambda \in N\}$ eine Familie von nichttrivialen tw. g. (gerichteten) Gruppen. Die Abbildung $S \to V^*(S, G_\lambda)$ des Segmentverbandes $\mathcal{S}(N)$ in den Untergruppenverband des kompletten gemischten Produktes $V^*(N, G_\lambda)$ ist ein ($\cap$ — vollständiger) Verbandsisomorphismus in den Verband aller konvexen Normalteiler (o-Ideale) von $V^*(N, G_\lambda)$. Der Bildbereich $\{V^*(S, G_\lambda);\, S \in \mathcal{S}(N)\}$ ist ein ($\cap$ — vollständiger) Teilverband des Normalteilerverbandes von $V^*(N, G_\lambda)$. Für das gemischte Produkt gelten diese Aussagen in der schärferen Form, die wir durch Ersetzen von „$\cap$-vollständig" durch „vollständig" erhalten.*

Beweis. Die Eineindeutigkeit der Abbildung bedarf hier keines Beweises. Sei $\{S_\alpha;\, \alpha \in A\}$ eine beliebige Familie von Segmenten aus $\mathcal{S}(N)$. Wegen der Definition der $V^*(S, G_\lambda)$ $(V(S, G_\lambda))$ sieht man sofort ein, daß die Abbildung ein vollständiger $\cap$-Homomorphismus ist.

Offensichtlich ist auch die Inklusion $\langle\{V^*(S_\alpha, G_\lambda);\, \alpha \in A\}\rangle \subseteq V^*(\bigcup_\alpha S_\alpha, G_\lambda)$. Sei $f \in V^*(S_1 \cup S_2, G_\lambda)$. Wir setzen $t_1' = S_1 \cap s'(f)$. t_1 sei die Menge aller $\gamma \in s(f)$, die kleiner oder gleich einem $\gamma' \in t_1'$ sind, t_2 die Komplementärmenge von t_1 in $s(f)$. Damit wurde $s(f)$ in disjunkte, der Maximalbedingung genügende Teilmengen t_1, t_2 mit $t_1 \cup t_2 = s(f)$ zerlegt. Die Elemente mit $f_i(\gamma) = f(\gamma)$ für $\gamma \in t_i$ und $f_i(\lambda) = e_\lambda$ für alle übrigen λ liegen dann wegen $t_i \subseteq S_i$ in $V^*(S_i, G_\lambda)$ $(i = 1, 2)$. Offenbar gilt nun $f = f_1 f_2 \in \langle V^*(S_1, G_\lambda),\ V^*(S_2, G_\lambda)\rangle$. Somit ist die umgekehrte Inklusion für endliche Vereinigungen von Segmenten bewiesen. Für das gemischte Produkt ist der Beweis wörtlich zu übertragen.

Für das gemischte Produkt wollen wir nun $f \in V(\bigcup_\alpha S_\alpha, G_\lambda)$ annehmen. Da $s'(f)$ endlich ist, $s'(f) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \bigcup_\alpha S_\alpha$, existieren α_i mit $\gamma_i \in S_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, woraus $s'(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_{\alpha_i}$ und $s(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_{\alpha_i}$ folgen. Dann ist $f \in V(\bigcup_{i=1}^n S_{\alpha_i}, G_\lambda)$ und nach dem eben Bewiesenen ist dies gleich dem Erzeugnis der $V(S_{\alpha_i}, G_\lambda)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Somit ist f ein Element der von den $V(_{\alpha_i}, G_\lambda)$ $(\alpha \in A)$ erzeugten Gruppe, was gerade zu zeigen war.

Aus dem bisherigen Beweisgang und Lemma 3.2 folgt die Richtigkeit aller Behauptungen des Lemmas[6]).

Satz 3.1 *Seien N eine tw. g. Menge und $\{G_\lambda; \lambda \in N\}$ eine Familie von nichttrivialen o-einfachen gerichteten Gruppen. Der Verband $\mathcal{J}_0(V(N, G_\lambda))$ aller o-Ideale des gemischten Produktes $V(N, G_\lambda)$ der $G_\lambda(\lambda \in N)$ ist vollständig isomorph zum Segmentverband $\mathcal{S}(N)$ und ein vollständiger Teilverband des Normalteilerverbandes von $V(N, G_\lambda)$.*

Beweis. Wegen Lemma 3.4 genügt es, jedem o-Ideal K von $V(N, G_\lambda)$ ein Segment $T(K) \in \mathcal{S}(N)$ zuzuordnen, für welches $V(T(K), G_\lambda) = K$ gilt.

Für jedes $\delta \in N$ bezeichnen wir mit $G(\delta)$ diejenige Untergruppe von $V(N, G_\lambda)$, die aus dem Einheitselement e und allen $f \in V(N, G_\lambda)$ mit $s(f) = \{\delta\}$ gebildet wird. Bekanntlich ist $V(N, G_\lambda) = \langle\{G(\delta); \delta \in N\}\rangle$. Man sieht leicht ein, daß $G(\delta)$ o-isomorph mit G_δ ist.

Für ein o-Ideal K von $V(N, G_\lambda)$ betrachten wir die Teilmenge $T(K) = \{\gamma \in N; G(\gamma) \subseteq K\}$ von N. Mit der gleichen Schlußweise wie beim Beweis von Satz 2.1 folgt aus $G(\gamma)^+ \cap K \neq e$ wegen der o-Einfachheit von G_γ stets $\gamma \in T(K)$. Sei $\gamma_1 \in T(K)$, $\gamma_1 > \gamma_2 \in N$. Für $g_i \in G^+_{\gamma_i}$ und die Elemente $f_i \in G(\gamma_i)$ mit $f_i(\gamma_i) = g_i$ $(i = 1, 2)$ gilt $f_1 > f_2 > e$ in $V(N, G_\lambda)$. Aus $G(\gamma_1) \subseteq K$ und der Konvexität von K schließen wir wegen $f_2 \in G(\gamma_2)^+ \cap K$ auf $\gamma_2 \in T(K)$; $T(K)$ ist stets ein Segment von N.

Wegen der Definition von $T(K)$ ist $V(T(K), G_\lambda) \subseteq K$ trivial. Das einzige o-Ideal mit $K^+ = \{e\}$ ist die Einheitsuntergruppe $V(\emptyset, G_\lambda)$. Ist $K^+ \neq \{e\}$, so sei $f > e$ ein Element aus K. Wir werden zeigen, daß aus der Endlichkeit von $s(f)$ die Beziehung $s(f) \subseteq T(K)$ und daraus wegen $\langle K^+\rangle = K$ natürlich auch $K \subseteq V(T(K), G_\lambda)$ folgt, was den Beweis des Satzes beendet.

Sei $\delta \in s(f)$, $\delta \notin s'(f)$ (falls so etwas möglich ist). Dann wählen wir ein Element $e_\delta \neq g \in G^+_\delta$ und finden, daß für $f' \in G(\delta)$ mit $f'(\delta) = g$ die Gleichungen $s'(ff'^{-1}) = s'(f)$ und $ff'^{-1}(\gamma) = f(\gamma)$für $\gamma \in s'(f)$ richtig sind,

[6]) Um die Vollständigkeit des Isomorphismus zu beweisen, wurde nur die Endlichkeit von $s'(f)$, nicht aber die von $s(f)$ benötigt. Vgl. aber den Beweis von Satz 3.1.

woraus wegen $s(f) \supseteq s(ff'^{-1})$ auch $f \geqq f'$ folgt. Aus der Bemerkung am Anfang des Beweises erhalten wir $\delta \in T(K)$ $(\delta \in s(f) \setminus s'(f))$.

Wenn also das Element f selbst nicht die entsprechende Gestalt hat, können wir nun schließen, daß das Element $\bar{f}$ mit $s(\bar{f}) = s'(\bar{f}) = s'(f)$ und $\bar{f}(\gamma) = f(\gamma)$ für $\gamma \in s'(f)$ ebenfalls K^+ angehört. Dabei haben wir die Endlichkeit zumindest von $s(f) \setminus s'(f)$ ausgenutzt. Nun werden wir auch die von $s'(f)$ benötigen. Sei $s'(\bar{f}) = s'(f) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. Für die Elemente $e < f_j \in G(\gamma_j)$ mit $f_j(\gamma_j) = f(\gamma_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ erhalten wir $\bar{f}f_j^{-1}(\gamma_k) = \bar{f}(\gamma_k)$ für $k \neq j$ $(k = 1, \ldots, m)$ und $\bar{f}f_j^{-1}(\lambda) = e_\lambda$ in allen anderen Fällen. Somit ist $\bar{f} > f_j > e$ und die Konvexität von K sichert uns wieder $\gamma_j \in T(K)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Damit ist aber $s(f) \subseteq T(K)$ bewiesen.

Nun verweisen wir wieder auf die schon bekannten o-einfachen linear geordneten Gruppen und erhalten aus Satz 3.1 und Lemma 3.2 den

Satz 3.2 *Zu jeder teilweise geordneten Menge N existieren sowohl kommutative als auch nichtkommutative gerichtete Gruppen V, deren Verbände $\mathcal{J}_0(V)$ aller o-Ideale von V zum Segmentverband $\mathcal{S}(N)$ (zum Verband 2^N) isomorph sind.*

Ist L ein endlicher distributiver Verband und N die tw. g. Menge aller seiner vom größten Element verschiedenen $\cap$-irreduziblen Elemente, so ist bekanntlich $L \cong \mathcal{S}(N)$.

Korollar. *Jeder endliche distributive Verband L ist isomorph zum Verband $\mathcal{J}_0(V)$ aller o-Ideale einer geeigneten gerichteten Gruppe V.*

Der Satz 3.1 zusammen mit Lemma 3.3 liefert

Satz 3.3 (P. CONRAD [4]) *Zu jedem dualen Baum N existieren kommutative (und nichtkommutative) Verbandsgruppen V, deren Verbände $\mathcal{J}_l(V)$ aller l-Ideale von V zum Segmentverband $\mathcal{S}(N)$ (zum Verband 2^N) isomorph sind.*

Ein Vergleich der Paragraphen 2 und 3 führt die Parallelität der Resultate und Beweise bei den auf den ersten Blick so verschieden anmutenden Gruppenkonstruktionen deutlich vor Augen. Wir können nun die in der Einleitung erwähnte Frage in präzisierter Form stellen.

Problem. *Kann man eine Gruppenkonstruktion für tw. geordnete Gruppen angeben, die jene der in § 2 eingeführten B-Potenz und die des gemischten Produktes als Spezialfälle enthält? Wenn ja, läßt sich diese zum Beweis einer gemeinsamen Verallgemeinerung der Sätze 2.2 und 3.2 (3.3) für gerichtete (Verbands-) Gruppen verwenden und wie lautet diese?*

LITERATUR

[1] C. G. Chehata, *An algebraically simple ordered group*, Proc. London Math. Soc. 2, (1952), 183—197.

[2] A. H. Clifford, *A noncommutative ordinally simple linearly ordered group*, Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951), 902—903.

[3] Conrad—Harvey—Holland, *The Hahn embedding theorem for abelian lattice-ordered groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 108, (1963), 143—169.

[4] P. Conrad, *The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group*, Czechosl. Math. J. 15 (90), (1965), 101—123.

[5] L. Fuchs, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen, Budapest*, 1966.

[6] B. H. Neumann, *On ordered groups*, Amer. J. Math. 71, (1949), 1—18.

[7] L. S. Rieger, *O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách*, Věstník Král. České Spol. Nauk, 1946, No. 6; 1947, No. 1; 1948, No. 1.

[8] F. Šik, *Über direkte Zerlegungen gerichteter Gruppen*, Math. Nachr. 25, (1963), 2, 95—110.

[9] M. H. Stone, *Boolean algebras and their relation to topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, (1934), 197—202.

Mathematisches Institut
Universität, Halle (Saale)
Deutsche Demokratische Republik