

Archivum Mathematicum

Albert Sade

Autotopies des quasigroupes et des systèmes associatifs

Archivum Mathematicum, Vol. 4 (1968), No. 1, 1--23

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104649>

Terms of use:

© Masaryk University, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

AUTOTOPIES DES QUASIGROUPES ET DES SYSTEMES ASSOCIATIFS

A. SADE

Présenté le 13 Octobre 1967

I. GÉNÉRALITÉS

1. Introduction. L'objet de ce travail est d'étudier les méthodes de prospection et les propriétés du groupe d'autotopie d'un système multiplicatif quelconque et de ses sous-groupes. On parvient à des résultats intéressants, 1° quand le système est à division (quasigroupes), 2° quand il est associatif. La réunion des conclusions obtenues dans ces deux cas fournit les propriétés relatives aux groupes et procure une vérification des énoncés trouvés directement, [22].

2. Définitions. La terminologie utilisée est celle des auteurs faisant autorité, (Hasse, V. d. Waerden, Albert, Kurosch).

(i). Une permutation, T , appartenant au groupe symétrique \mathfrak{S}_E , sur l'ensemble E , est dite *régulière* si tous les cycles de T ont la même puissance. Si un cycle de T contient m éléments, tous les autres ont pour longueur m ; sinon, tout cycle de T a même puissance que l'infini dénombrable.

(ij). Un *groupoïde* [7], ou *système multiplicatif* [23], $S = E(\cdot)$, est un ensemble, E , avec une loi de composition (\cdot) faisant correspondre un élément de E à tout couple $(x, y) \in E^2$; $\forall x, y \in E, \exists! z \in E, x \cdot y = z$.

Pour éviter toute confusion avec les groupoïdes de Brandt [8], étudiés par Hoehnke [13], Rinow [17] et l'école de Dresden (M. Hasse [12], Michler [15]), en tant que catégories à éléments inversibles, le vocable „système“ sera préféré ici.

(ijj). Un système à *division*, ou *quasigroupe*, est un système obéissant à la loi du quotient bilatère,

$$\forall a, b \in E, \quad \exists! x, y \in E, \quad a \cdot x = b, \quad y \cdot a = b.$$

Un système est *associatif* s'il satisfait à la loi

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Certaines dénominations utilisées pour désigner une telle structure ont été galvaudées par le chauvinisme au point de les mettre hors d'usage. La locution „système associatif“ a du moins l'avantage de porter en soi sa définition.

(iv). Si E, F, H sont trois ensembles arbitraires, la structure $(EF \rightarrow H)$ avec la loi de composition $(*)$

$$\forall x \in E, \quad y \in F, \quad \exists ! z \in E, \quad x * y = z,$$

s'appelle un *système défectif*, ([18], p. 169, no 24). Tout système défectif peut être plongé dans un système ordinaire.

(v). Soit $G = E(\cdot)$ un groupe et F un sous-groupe de G . Alors la structure $E.F$, où le produit $x.y$ est défini comme dans G pour tout x de G et tout y de F , s'appelle un *groupe défectif* ou *Mischgruppe* de Loewy-Baer ([14], [4]), de *noyau* F .

(vi). Dans le système $S = E(\cdot)$ la *translation à droite* relative à l'élément a est l'application $\Delta_a = (x \rightarrow x.a)$, où x parcourt E . La *translation à gauche* est $\Gamma_a = (x \rightarrow a.x)$.

Tout quasigroupe peut être regardé ([2], p. 227) comme un système dans lequel les deux translations sont bijectives.

(vij). Un *élément non-singulier* u , d'un système $S = E(\cdot)$ est un élément pour lequel les deux translations Δ_u et Γ_u sont 1-1 de E sur E ; $\Delta_u \wedge \Gamma_u \in \mathfrak{S}_E$, ([9], p. 248); ou, ce qui revient au même, $\forall a \in E$, les équations $u.x = a$ et $y.u = a$ ont une solution et une seule en x et y . On voit sur des exemples que les éléments non-singuliers d'un système quelconque ne forment pas un ensemble fermé, en général. On sait que *l'ensemble des éléments non-singuliers d'un système associatif est un groupe par rapport à la loi de ce système*, à moins d'être vide. Nous le noterons $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\cdot)$.

(vijj). Dans un système quelconque, si u et v sont non-singuliers

$$\Delta_u = \Delta_v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \Gamma_u = \Gamma_v.$$

(ix). Si $\mathcal{B} \neq \emptyset$, la condition que le système associatif S possède une unité ([9] p. 251, 1B) est redondante. *Si S n'a qu'un élément non-singulier, celui-ci est neutre dans S .*

(x). Le groupe \mathcal{B} est isomorphe à chacun des ensembles $\{\Delta_u\}$ et $\{\Gamma_u\}$, où u parcourt \mathcal{B} .

(xi). Le *complexe relatif aux translations à droite* ([21], p. 628, N° 3.6) d'un quasigroupe $Q = E(\cdot)$ est l'ensemble des $\Delta_a^{-1}\Gamma_b$, où a et b décrivent E .

(xij). Deux systèmes sur le même ensemble, $S = E(\cdot)$ et $U = E(\cdot)$, sont *isotopes* s'il existe un ensemble ordonné de trois permutations de \mathfrak{S}_E (a, b, c) tel que

$$\forall x, y, z \in E, \quad xy = z \Leftrightarrow (xa) . (yb) = zc.$$

(a, b, c) s'appelle une *isotopie* et l'on écrit

$$S(a, b, c) = U.$$

(xijj). Si $D(*) = (EF \rightarrow H)$ est un système défectif et S un système dans lequel D est immergé, toute isotopie de S induit sur D une transformation appelée *isométrie*. Toute isomère de D est défini par trois permutations, $\xi \in \mathfrak{S}_E$, $\eta \in \mathfrak{S}_F$, $\zeta \in \mathfrak{S}_H$ et la condition

$$x * y = z \Leftrightarrow (x\xi) \circ (y\eta) = z\zeta,$$

où (\circ) est l'opération de l'isométrie de D ([18], p. 169, N° 25).

(xiv). Une *autotopie* est une isotopie d'un système sur lui-même.

(xv). Une isotopie est *homogène* si ses trois composantes sont semblables.

(xvi). Une isotopie $(p, q, 1)$ est dite *principale* si sa 3^{ème} composante est l'identique. Le *groupe des autotopies principales* d'un système S est l'ensemble $\{(X, Y, 1)\}$, noté \mathfrak{A}_p .

(xvij). Une *isotopie réduite* d'un système S est une isotopie de la forme $(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ où a et b sont deux éléments non-singuliers quelconques de S , $a, b \in \mathcal{B}$. Dans le cas des quasigroupes avec unité, (a, b) s'appelle le *couple de translation*, ([3], p. 480, N° 1.12).

(xviii). Si U est un isotope réduit de S , avec $U = S(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ et si U est isomorphe à S , ($U = SX$), l'autotopie de S , $I = (\Delta_a, \Gamma_b, 1) X^{-1}$ est dite *autotopie fondamentale* de S . Quand (a, b) parcourt \mathcal{B}^2 , l'ensemble des I s'appelle le *complexe des autotopies fondamentales* de S : $\mathfrak{A}_f = \{I\}$. Chaque I n'est définie qu'aux automorphismes près et \mathfrak{A}_f est un système de représentants des classes latérales relatives au groupe d'automorphisme \mathcal{A} de S dans le groupe d'autotopie, \mathfrak{A} .

(xix). Le *groupe des automorphismes internes* d'un système associatif $S = E()$ est l'ensemble des applications 1-1 de E sur E , $J = (x \rightarrow m^{-1}xm)$ lorsque m parcourt le groupe \mathcal{B} des éléments non-singuliers. Il est homomorphe à \mathcal{B} .

(xx). Par analogie avec la définition des groupes complets, un *système associatif est complet* s'il n'a que des automorphismes internes et si le seul élément central de \mathcal{B} est l'unité de S , ($\mathcal{B} \neq \emptyset$).

On représentera

Le groupe d'automorphisme par	\mathcal{A} ,
Le groupe d'autotopie par	\mathfrak{A} ,
Le centre de A par	\mathfrak{Z}_A ,
Le centralisateur de A par	Z_A ,
La normalité de A dans B par	$A \triangleleft B$,
L'isomorphisme de A et de B par	$A \cong B$,
Le cardinal de l'ensemble E par	$ E $,
Le produit des complexes A et B par	AB ,
Le produit direct des sous-groupes A et B par	$A \times B$.

3. Lemmes. Dans ce paragraphe on a rassemblé plusieurs propositions usuelles qui interviennent au cours des raisonnements.

(i). *Toute isotopie principale* $(X, Y, 1)$ *appliquant un système quelconque* $S = E()$, *avec élément neutre, sur un système* H , *avec élément neutre, est une isotopie réduite* $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ *où* u *et* v *sont arbitraires dans* \mathcal{B} *et réciproquement. L'élément neutre de* H *est le produit* uv *de* u *et* v *dans* S . ([9], p. 249. Th. 1A et Corr.).

(ij). *Si un hypergroupeïde, (en particulier un système* $S = E(\times)$ *) avec unité scalaire, u, est isotope d'un hypergroupeïde associatif* $G = E(*)$, $S = G(p, q, r)$, *alors* S *et* G *coïncident par l'isomorphisme* $T = (x \rightarrow xpr^{-1}q)$; $S = GT$, [20].

Cette proposition est la généralisation de l'énoncé d'Albert [(1), p. 511, Th. 2] dans le cas des quasigroupes isotopes d'un groupe.

(ijj). *Pour toute autotopie principale* $(X, Y, 1)$ *d'un système quelconque, S, on a*

$$X\{\Delta\} = \{\Delta\} \wedge Y\{\Gamma\} = \{\Gamma\},$$

où $\{\Delta\}$ et $\{\Gamma\}$ sont les ensembles consistant en toutes les translations de S .

Preuve. Si l'on soumet S à une isotopie principale quelconque $(X, Y, 1)$ et si l'on considère les translations δ et γ sur le système, S' , obtenu, on aura

$$(1) \quad \delta_{vY} = X^{-1}\Delta_v,$$

$$(2) \quad \gamma_{uX} = Y^{-1}\Gamma_u.$$

Si $(X, Y, 1)$ est une autotopie de S ,

$$\{\delta\} = \{\Delta\} = X^{-1}\{\Delta\}, \quad \{\gamma\} = \{\Gamma\} = Y^{-1}\{\Gamma\}.$$

(iv). *Tout automorphisme d'un système quelconque, S, induit un automorphisme sur l'ensemble* \mathcal{B} , *de ses éléments non-singuliers.*

(v). *Si le système* Σ *est isotope du système* S , $\Sigma = S(p, q, r) = SI$, *le groupe d'autotopie de* Σ *est le transformé par* I *de celui de* S .

(vi). *Toute isotopie* (p, q, r) *est le produit d'une isotopie principale* $(pr^{-1}, qr^{-1}, 1)$ *par un isomorphisme, r.*

(vij). *Toute isotopie appliquant un système* S , *avec unité, sur un système, U, avec unité, est le produit d'une isotopie réduite, (N° 2, xvij),* $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$, u, v *non-singuliers dans* S , *par un isomorphisme.*

(vijj). *Toute autotopie d'un système* S , *avec unité, est le produit d'une isotopie réduite* $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ *projetant* S *sur un système* U *isomorphe à* S , *par l'isomorphisme* $(U \rightarrow S)$.

Preuve. D'après (vij) une telle autotopie est de la forme $(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T$. Si elle satisfait à

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T = S,$$

on aura

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = ST^{-1} = U.$$

Donc l'isotope principal $U = S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ est isomorphe à S ; $U = ST^{-1}$, $T = (U \rightarrow S)$.

(ix). Pour qu'un système quelconque, S , soit isotope d'un système avec unité, il faut et il suffit que S possède au moins un élément non-singulier à droite et un élément non-singulier à gauche ([9], p. 249, Th. 1A; [10], p. 57).

(x). Si $G = \{X\}$ est un groupe ayant pour éléments des permutations régulières, $X \in \mathfrak{S}_E$, si e est un élément fixe arbitraire de E et F l'ensemble des éléments eX de E , alors

(a), le système défectif $E * F$, avec la loi de composition $x * y = xX_y$, où X_y est définie par $eX_y = y$, est un Mischgruppe de Loewy (N° 2, (v)), dont le noyau, F , est isomorphe à G ;

(b), les classes latérales $v * F$, relatives à F , sont des quasigroupes défectifs (N° 2, iv), dérivés de $F(*)$ par l'isotopie $(\Gamma_v, 1, \bar{\Gamma}_v)$ $v \in F$;

(c) Si E est fini, d'ordre n , $|F|$ divise n .

Preuve. (a), la permutation X_y , définie par

$$(3) \quad eX_y = y,$$

n'existe pas pour toute valeur de $y \in E$; mais, si elle existe, elle est unique, car

$$(eX = i \wedge eY = i) \Rightarrow eX = eY \Rightarrow eXY^{-1} = e.$$

Comme toutes les permutations sont régulières, si $XY^{-1} \in G$ laisse fixe l'élément e , elle contient le cycle monôme (e) ; tous ses cycles sont donc monômes et $XY^{-1} = 1$, $X = Y$. Donc, si F est l'ensemble des éléments $i \in E$ pour lesquels $\exists X$, $eX = i$, l'application de F sur $G = \{X\}$, $(x \rightarrow Xx)$ est 1-1.

Soit le système défectif $E * F$, avec la loi de composition

$$(4) \quad x * y = xX_y, \quad x \in E, \quad y \in F.$$

Si x et y sont dans F , on a, (3), $x = eX_x$, et

$$x * y = (eX_x) X_y = e(X_x X_y).$$

Si, dans G , $X_x X_y = X_z$, on aura

$$x * y = eX_z; \quad x * y = z, \quad z \in F.$$

On voit que

$$\forall x, y \in F, \quad x * y = z \Rightarrow X_x X_y = X_z.$$

Comme d'ailleurs $(x \rightarrow X_x)$ est 1-1, le groupe $G = (X)$ est isomorphe au système $F(*) \subseteq E*F$ et $F(*)$ est lui-même un groupe. Les translations de F sont

$$\Delta_a = (x \rightarrow x*a) = (x \rightarrow xX_a),$$

c'est-à-dire la restriction à F de X_a dans G . Le système défectif $E*F$ est donc un Mischgruppe dont le noyau, F , est isomorphe à $G = \{X\}$.

(b). Soit v un élément de $E - F$. Dans la classe latérale $v*F$, $v \notin F$, on a

$$\forall x, y \in F, \quad (v*x) * y = v\Delta_x\Delta_y = vX_xX_y = v(X_{x*y}).$$

Mais $x*y = z \in F$, donc

$$(v*x) * y = v*z \in v*F.$$

Le quasigroupe défectif $(v*F) * F$ est isomère du groupe $F(*)$ par $[(x \rightarrow v*x), 1, (z \rightarrow v*z)] = (\Gamma_v, 1, \Gamma_v)$.

La dernière partie est évidente.

(xi). Dans tout système multiplicatif, $S = E()$, si X est un automorphisme et m un élément non-singulier, on a $X^{-1}\Delta_m X = \Delta_{mX}$.

Preuve. $\forall a \in E$, $a\Delta_m X = (am) X$ et $aX\Delta_{mX} = (aX)(mX)$. Comme X est un automorphisme, $(am) X = (aX)(mX)$, donc

$$(5) \quad \Delta_m X = X\Delta_{aX}.$$

4. Groupe d'autotopie d'un système S. La construction du groupe d'autotopie, \mathfrak{A} , d'un système quelconque, $\Sigma = E()$, repose sur l'application successive des propositions n° 3, (ix), (v) et (vijj). Au moyen de (ix) on remplace Σ par un système S , isotope de Σ et possédant un élément neutre. Il est à observer qu'un système peut ne posséder aucun élément non-singulier et avoir néanmoins des autotopies. Ce cas est exclu ici.

Ensuite, d'après (v), la connaissance du groupe d'autotopie de S entraînera celle du groupe de Σ .

Enfin, d'après (vijj), on soumetra S à toutes les isotopies réduites $(\Delta_u, \Gamma_u, 1)$, $u, v \in \mathcal{B}$, et on construira l'ensemble de tous les isotopes réduits qui sont isomorphes à S . Si $U = S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = ST^{-1}$, on en déduira l'autotopie fondamentale (N° 2, (xvijj)) de S ,

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T = S.$$

Celle-ci n'est définie qu'aux automorphismes près. A chaque isotope réduit de S , isomorphe à S , correspond un ensemble d'autotopies qui est le produit de l'une d'elles par \mathcal{A} , groupe d'automorphisme de S . En choisissant une seule d'entre elles pour représenter cet ensemble, l'ensemble des autotopies fondamentales correspondant à tous les

couples de translation (u, v) , (n° 2, xvij), fournira le complexe des autotopies fondamentales de S : \mathfrak{A}_F .

Le groupe d'autotopie de S sera le produit de complexes $\mathfrak{A}_{p\mathcal{A}} = \mathfrak{A}$ et \mathfrak{A}_F sera un système de représentants des classes latérales par rapport à \mathcal{A} dans \mathfrak{A} . En effet, dans un système quelconque, avec au moins un élément non-singulier, les translations relatives à deux éléments non-singuliers distincts sont distinctes, (N° 2, (vijj)). De là on déduit que deux éléments quelconques du produit de complexes $\mathfrak{A}_{p\mathcal{A}}$ sont distincts car, si

$$(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T = (\Delta_w, \Gamma_s, 1) R,$$

il en résulte, par la 3ième composante, $T = R$, donc

$$\Delta_v = \Delta_w \wedge \Gamma_u = \Gamma_s$$

en enfin, $u = s$ et $v = w$, puisque $u, v, w, s \in \mathcal{B}$. Ainsi

Le groupe d'autotopie, \mathfrak{A} , d'un système quelconque avec unité, S , est le produit du complexe $\mathfrak{A}_F = \{(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T\}$ des autotopies fondamentales de S par le groupe d'automorphisme, \mathcal{A} , de S .

L'ensemble des isotopes réduits, isomorphes à S a pour cardinal l'index $\mathfrak{A} : \mathcal{A}$.

5. Calculs pratiques. On peut résumer ainsi la marche des opérations:

Pour trouver le groupe d'autotopie d'un système quelconque, Σ , (avec au moins un élément non-singulier)

1°. Remplacer Σ par un système S , avec unité, isotope de Σ .

2°. Construire tous les isotopes réduits de S .

3°. Former l'ensemble de ceux qui sont isomorphes à S ; $U = ST^{-1}$.

4°. En déduire le complexe des autotopies fondamentales de S ; $\mathfrak{A}_F = \{(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T\}$.

5°. Multiplier \mathfrak{A}_F par le groupe d'automorphisme, \mathcal{A} , de S .

6°. Revenir à Σ par l'isotopie inverse de 1°.

La prospection de ces divers isomorphismes se fait par les méthodes indiquées dans [19], qui permettent d'éviter la construction explicite de tous les isotopes réduits, à savoir.

(i). Utilisation du graphe à arêtes orientées ($x \rightarrow x^2$)

(ij). Séries des produits à droite ($u_{n+1} = u_{n-1}u_n$).

(ijj). Similitude des complexes relatifs aux translations, $(\Delta_a^{-1}\Delta_b)$ (N° 2, (xi)). Cette dernière permet de trouver directement des autotopies dans le cas des quasigroupes, quand on n'a pas en vue la totalité de \mathfrak{A} . Il suffit d'examiner la structure partitionnelle des éléments $\Delta_a^{-1}\Delta_b$ de chaque sous-complexe, $a = \text{Constante}$. Deux quasigroupes sont isotopes si les sous-complexes de l'un sont semblables aux sous-complexes de l'autre. Si a_i et b_i sont les nombres de cycles d'ordre i de deux permutations finies, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux

permutations soient semblables est que, $\forall i \in N^+$, $a_i = b_i$. Si deux quasigroupes ne sont pas isotopes cette méthode permet de le déceler immédiatement.

L'étude du groupe d'autotopie, \mathfrak{A} , d'un système S et des sous-ensembles \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_P , \mathfrak{A}_P est intéressante, (i) quand S est un quasigroupe avec unité, (ii) quand S est associatif.

II

QUASIGROUPES AVEC ÉLÉMENT NEUTRE

6. Autotopies principales. (i). *Le groupe des autotopies principales, \mathfrak{A}_P , d'un quasigroupe $Q = E(\)$, avec unité, coïncide avec l'ensemble des autotopies réduites $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$.*

(ij). *Les composantes Δ et Γ sont deux permutations semblables et régulières sur E .*

(ijj). *\mathfrak{A}_P est isomorphe au groupe formé par les éléments de l'une quelconque de ses composantes non identiques.*

(iv). *\mathfrak{A}_P est isomorphe à un sous-quasigroupe de Q , qui est donc un groupe, et dont les éléments sont les indices, m , des translations qui définissent ces autotopies principales; $\mathfrak{A}_P \cong \{m\}$. Le groupe $\{m\}$ est le noyau au milieu de Q . Si E est fini, l'ordre de ce groupe divise celui de Q .*

Preuve. (i). D'après N° 3, i, toute autotopie principale de Q est de la forme $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ où Δ, Γ sont les translations de Q . Pour que la nouvelle unité soit la même que l'ancienne, e , il faut et il suffit que $uv = e$. Puisque $(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ est une autotopie, on a

$$\forall x, y \in E, (xv)(uy) = xy,$$

en particulier, si $x = e$, $v(uy) = y$, $\Gamma_u \Gamma_v = 1$, $\Gamma_u = (\Gamma_v)^{-1}$, et l'autotopie est bien $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in E$. Réciproquement si

$$Q(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) = Q, \forall x, y \in E, (xm)y = x(my).$$

(ij). Si $(X, Y, 1)$ est une autotopie principale de Q , on a

$$\forall x, y \in E, xy = (xX)(yY) = (xX^2)(yY^2) = \dots$$

Le cycle de X qui contient l'élément x est

$$(\dots xX^{-1}, x, xX, xX^2, \dots).$$

Le cycle de Y qui contient l'élément y est

$$(\dots, yY^{-1}, y, yY, yY^2, \dots).$$

Si le premier est fini et a pour longueur m , on aura $xX^m = x$, d'où

$$xy = (xX^m)(yY^m) = x(yY^m).$$

Annulant par x , ce qui est légitime dans un quasigroupe,

$$\forall y \in E, \quad y = yY^m, \quad \text{ou} \quad Y^m = 1.$$

Laisant x fixe, on voit que tout cycle de Y a pour longueur un diviseur m' , de m . Mais, en raisonnant symétriquement sur y et x , on voit que tout cycle de X a même longueur que tout cycle de Y ; ainsi (N° 2, (i)), X et Y sont régulières et semblables.

Si le cycle $(\dots xX^{-1}, x, xX, \dots)$ est infini, tous les cycles de X et de Y sont infinis car, si un seul avait une longueur finie, m , d'après ce qui précède, tous les autres seraient d'ordre m .

(ijj). Deux autotopie principales distinctes ne peuvent pas avoir une composante non identique commune car si, par exemple $(X, Y, 1)$ et $(X, Y', 1)$ ont la composante commune X , on aura

$$\forall x, y \in E, \quad (xX)(yY) = xy = (xX)(yY'),$$

$$\forall y \in E, \quad yY = yY', \quad Y = Y'.$$

Il en résulte que les éléments d'une même composante ($\neq 1$) de \mathfrak{A}_p sont tous distincts et forment donc un groupe isomorphe au groupe des autotopies principales lui-même.

(iv). Que l'ensemble $\{m\} = F$ des indices des translations Δ_m et Γ_m soit un groupe isomorphe à \mathfrak{A}_p résulte immédiatement de (N° 3, (x)).

Le groupe déficient EF , muni de la même loi que Q , où le premier facteur est dans E et le second dans F , a pour noyau le groupe $F = \{m\}$, isomorphe à \mathfrak{A}_p . Les translations de S induisent sur l'ensemble F des permutations régulières qui sont précisément les translations du noyau.

Exemple. Soit le quasigroupe F_{14} , défini par ses translations, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 012.345$, $\Delta_2 = 021.354$, $\Delta_3 = 031524$, $\Delta_4 = 041325$, $\Delta_5 = 051423$. Le groupe des autotopies principales est du 3ième ordre et consiste en les puissances de $(012.345; 021.345; 1)$. F_{14} contient le groupe cyclique du 3ième ordre $(0, 1, 2)$, isomorphe à \mathfrak{A}_p .

Remarque. L'existence de \mathfrak{A}_p entraîne celle d'un sous-quasigroupe associatif dans Q . La réciproque n'est pas vraie: Q peut contenir un groupe sans admettre aucune autotopie principale non identique si le nucleus se réduit à l'identique.

7. Conséquence. *Pour qu'un quasigroupe fini, avec unité, soit un groupe il faut et il suffit qu'il ait même cardinal que le groupe de ses autotopies principales,*

$$|\mathfrak{A}_p| = |Q| \Leftrightarrow Q \text{ associatif.}$$

Preuve. Si Q est un groupe, il est évident que $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ est une autotopie de Q pour tout m dans E car $(xm)(m^{-1}y) = xy$; donc $|\mathfrak{A}_p| = |E|$. Réciproquement, si Q et \mathfrak{A}_p ont même puissance, d'après le N° 6,

iv, Q contient un groupe isomorphe à \mathfrak{A}_p , et du même ordre que Q ; donc Q est lui-même un groupe.

8. Partition d'égalité. (i). *L'ensemble des isotopies réduites qui appliquent le quasigroupe Q , avec unité, sur un même quasigroupe avec unité, S , est le produit du groupe des autotopies principales, \mathfrak{A}_p , de Q , par l'une quelconque des isotopies réduites qui projettent Q sur S .*

(ij). *Si k désigne le cardinal de l'ensemble des quasigroupes à unité, différents, isotopes principaux de Q , on a $|E^2| = |\mathfrak{A}_p| k$.*

(ijj). *Pour que tous les isotopes réduits de Q soient distincts il faut et il suffit que $\mathfrak{A}_p = 1$.*

Preuve. (i). L'égalité des isotopes réduits $R = Q(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ et $S = Q(\Delta_t, \Gamma_w, 1)$ entraîne l'existence de l'autotopie principale de Q ,

$$Q(\Delta_v \Delta_t^{-1}, \Gamma_u \Gamma_w^{-1}, 1) = Q.$$

Désignant celle-ci par $(X, Y, 1)$, on tire

$$\Delta_v = X \Delta_t \wedge \Gamma_u = Y \Gamma_w.$$

Ainsi, les isotopies réduites qui appliquent Q sur S sont les produits d'une autotopie principale de Q par l'isotopie réduite $(\Delta_t, \Gamma_w, 1)$ qui projette Q sur S .

Réciproquement, si $(X, Y, 1)$ est une autotopie principale quelconque de Q , on aura

$$Q(X, Y, 1) (\Delta_t, \Gamma_w, 1) = S.$$

Mais, d'après (N° 3, (ijj)), $X \Delta_t \in \{\Delta\} \wedge Y \Gamma_w \in \{\Gamma\}$.

Les produits $X \Delta_t$ et $Y \Gamma_w$ sont des translations Δ_b, Γ_a , de Q et $Q(\Delta_b, \Gamma_a, 1) = S$, de sorte que l'isotopie $(\Delta_b, \Gamma_a, 1)$ applique bien Q sur S . Ainsi, sur l'ensemble des isotopes réduits de Q , la relation d'égalité définit une partition dont les classes ont même puissance que le groupe des autotopies principales de Q .

(ij), (ijj). Les deux dernière parties sont claires.

Exemple. Dans F_{14} , défini au N° 6, chaque isotope réduit figure trois fois.

9. Partition d'isomorphisme. Les isotopies réduites d'un quasigroupe Q , avec unité, définissent une relation d'équivalence, \mathcal{R} , sur E^2 , deux éléments (a, b) et $(c, d) \in E^2$ étant congrus toutes les fois que les isotopes réduits qui ont (a, b) et (c, d) pour couple de translation sont isomorphes,

$$(6) \quad (a, b) \equiv (c, d), \quad \text{mod } \mathcal{R} \Leftrightarrow Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1) \cong Q(\Delta_c, \Gamma_d, 1).$$

L'équivalence \mathcal{R} induit sur E^2 une double partition, obtenue en laissant b fixe et faisant décrire E à l'élément a du couple de translation (a, b) , ou en laissant a fixe et faisant décrire E à b .

(i). L'ensemble des isomorphismes qui projettent les uns sur les autres les divers quasigroupes d'un même bloc est un groupe \mathcal{H} , qui coïncide avec l'ensemble des éléments distincts de la 3^{ième} composante de \mathfrak{A} et dont l'ordre est l'index de \mathfrak{A}_p dans \mathfrak{A} ; $|\mathcal{H}| = \mathfrak{A} : \mathfrak{A}_p$. Ce groupe est le même pour tous les blocs.

(ij). La double partition d'isomorphisme définie sur E^2 par les isotopies réduites d'un quasigroupe $Q = E(\)$, avec unité, est invariante par toute isotopie réduite de Q . Si $S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$; $C^{te} = a, b \in E$, est un isotope réduit arbitraire de Q , l'ensemble des quasigroupes avec unité, $Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1)$, $q, r \in E$, isotopes réduits de Q , coïncide avec l'ensemble analogue des isotopes réduits de S .

L'ensemble des isotopes réduits obtenus en laissant r constant et égal à h dans le 1^{er} cas (Q), et $r = h\Delta_a$ dans le second (S), est le même.

(ijj). Si QI est dérivé de Q par l'isotopie réduite I , si \mathcal{A}_I et \mathfrak{A}_I désignent respectivement les groupes d'automorphisme et d'autotopie de QI , alors $|\mathfrak{A}_I| = |\mathfrak{A}| = \text{Constante}$.

(iv). L'ensemble des quasigroupes réduits isomorphes à QI a pour cardinal l'index de \mathcal{A}_I dans \mathfrak{A}_I , $|C_i| = \mathfrak{A}_I : \mathcal{A}_I$. Si Q est fini d'ordre n , $\Sigma_I(\mathfrak{A} : \mathcal{A}_I) = n^2$

(v). L'ensemble des quasigroupes distincts, isotopes de Q , a pour cardinal $(n!)^3 / |\mathfrak{A}|$.

(vi). L'ensemble des quasigroupes distincts, avec unité, isotopes de Q , a pour cardinal $n^2 n! / |\mathfrak{A}|$.

Preuve. (i). Soit un quasigroupe avec unité, $Q = E(\)$, sur lequel on représente les translations par Δ et Γ . Le bloc C_0 de la partition d'isomorphisme est composé de ceux des isotopes réduits de Q qui sont isomorphes à Q .

$$Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1) = R = QT,$$

et l'isotopie $I = (\Delta_q, \Gamma_r, 1) T^{-1}$ est une autotopie de Q . Quand T décrit l'ensemble \mathcal{H} des isomorphismes qui projettent Q sur les divers éléments de C_0 , l'ensemble des I correspondantes est le groupe d'autotopie, \mathfrak{A} , de Q , ($N^\circ 4$). La 3^{ième} composante de \mathfrak{A} consiste en tous les T^{-1} (avec répétition si $\mathfrak{A}_p \neq 1$). Or il est évident que l'ensemble, \mathcal{H} , des éléments distincts de la 3^{ième} composante de \mathfrak{A} est un groupe.

L'ensemble des autotopies (X, Y, Z) qui ont en commun leur 3^{ième} composante, Z , est une classe latérale, dans \mathfrak{A} , par rapport au groupe \mathfrak{A}_p des autotopies principales, car si $(X, Y, Z) \wedge (X', Y', Z) \in \mathfrak{A}$, $(X'X^{-1}, Y'Y^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}_p$ et $(Y', X', Z) = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)(X, Y, Z)$.

$$\{(X', Y', Z)\} = \mathfrak{A}_p(X, Y, Z).$$

Donc

$$|\mathcal{H}| |\mathfrak{A}_p| = |\mathfrak{A}|.$$

Soit C_i une classe quelconque de l'équivalence, consistant en tous les isotopes réduits de Q , isomorphes à S ,

$$(7) \quad S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1).$$

C_i est aussi l'ensemble des isotopes réduits de S , isomorphes à S . En effet, soit U un isotope réduit quelconque de Q ,

$$(8) \quad U = Q(\Delta_f, \Gamma_g, 1).$$

En tenant compte de (7),

$$\begin{aligned} U &= S(\Delta_a, \Gamma_b, 1)^{-1} (\Delta_f, \Gamma_g, 1), \\ U &= S(\Delta_a^{-1} \Delta_f, \Gamma_b^{-1} \Gamma_g, 1). \end{aligned}$$

Mais, d'après (1) & (2), N° 3, (ijj), avec $X = \Delta_a$ et $Y = \Gamma_b$, on a

$$\Delta_a^{-1} \Delta_f = \delta_{f\Gamma_b} \wedge \Gamma_b^{-1} \Gamma_g = \gamma_{g\Delta_a},$$

δ et γ étant les translations de S . Enfin

$$(9) \quad U = S(\delta_{f\Gamma_b}, \gamma_{g\Delta_a}, 1).$$

Si U est isomorphe à S , les égalités (8) et (9) montrent que les isotopes réduits de Q , isomorphes à S , sont les mêmes que les isotopes réduits de S , isomorphes à S . Le groupe d'autotopie de S est le transformé (N° 3, (v)) par $(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$ de celui de Q . Donc la 3^{ième} composante de ce groupe est identique à celle de Q . D'après la première partie, le groupe \mathcal{H} relatif à C_i coïncide avec celui de C_0 .

(ij). Si l'on ne suppose rien sur l'isomorphisme de U et de S , la comparaison de (8) et de (9) montre que

$$(10) \quad S(f\Gamma_b, g\Delta_a) = Q(f, g).$$

Comme f et g décrivent E en même temps que $f\Gamma_b$ et $g\Delta_a$, l'ensemble des isotopes réduits (q, r) de Q où l'on donne à r la valeur constante h est le même que l'ensemble des isotopes réduits (q, r) de S où r garde la valeur constante $h\Delta_a$. On arrive à la conclusion analogue pour $q = i$ et $q = i\Gamma_b$.

Soit $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme,

$$C_i = \{Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1) \mid Q(q, r) \cong R\}.$$

A chaque couple de translation (q, r) correspond une classe et une seule. On a ainsi défini une application de E^2 sur \mathcal{C} , c.-à-d. un système défectif $(E * E \rightarrow \mathcal{C}) = T_Q$, où, à chaque couple (q, r) correspond la classe C_i à laquelle appartient l'isotope réduit $Q(\Delta_q, \Gamma_r, 1)$. Si l'on remplace Q par son isotope réduit $S = Q(\Delta_a, \Gamma_b, 1)$, on obtient un nouveau système

défectif, T_S , qui est dérivé du premier par l'isométrie $(\Gamma_b, \Delta_a, 1)$. Sur les tables de Cayley de T_S et de T_Q , à l'ordre près, les lignes et les colonnes sont invariantes.

(ijj) résulte immédiatement du N° 3 (v) et les trois derniers énoncés sont évidents.

Exemple I. Dans F_{14} , défini au N° 6, on a

$$|\mathcal{A}| = 3; \quad |\mathfrak{A}| = 108; \quad |\mathfrak{A}_p| = 36; \quad |\mathcal{C}| = |C_0| = 36; \\ |\mathfrak{A}_p| = 3; \quad |\mathcal{H}| = 36.$$

Exemple II. Soit F_3 , défini par ses translations $\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 01.2534;$
 $\Delta_2 = 021543; \Delta_3 = 031245; \Delta_4 = 041352; \Delta_5 = 0514.23$. On a

$$|\mathcal{A}| = 1; \quad |\mathfrak{A}| = 4; \quad |\mathfrak{A}_p| = 4; \quad |C_i| = 4, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8) \\ |\mathfrak{A}_p| = 1; \quad |\mathcal{H}| = 4.$$

Exemple III. Soit G le quasigroupe deu 5° ordre, non isomorphe au groupe cyclique, et défini par ses translations, $\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 01.234;$
 $\Delta_2 = 024.13; \Delta_3 = 032.14; \Delta_4 = 043.12$.

On a $|\mathfrak{A}_p| = 1; |\mathcal{H}| = 12; \mathcal{C} = (C_0, \dots, C_4)$

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
$ \mathcal{A} $	3	12	3	3	1
$ \mathcal{C}_i $	4	1	4	4	12
$ \mathfrak{A}_i $	12	12	12	12	12.

$r \backslash q$	0	1	2	3	4
0	C_0	C_2	C_4	C_4	C_4
1	C_1	C_3	C_3	C_3	C_3
$T_G = 2$	C_0	C_4	C_4	C_4	C_2
3	C_0	C_4	C_2	C_4	C_4
4	C_0	C_4	C_4	C_2	C_4 .

Si l'on remplace G par son isotope réduit

$$S = G(\Delta_1, \Gamma_3, 1)$$

$r \backslash q$	0	1	2	3	4
0	C_3	C_3	C_3	C_1	C_3
$T_S = 1$	C_4	C_4	C_4	C_0	C_2
2	C_4	C_4	C_2	C_0	C_4
3	C_2	C_4	C_4	C_0	C_4
4	C_4	C_2	C_4	C_0	C_4

$$T_S = T_G(03214; 01.234; 1) = T_G(\Gamma_3, \Delta_1, 1).$$

Monomorphisme. Une espèce intéressante de quasigroupes, pouvant faire l'objet d'une étude ultérieure, est celle des G -quasigroupes, ou quasigroupes avec unité dont la partition d'isomorphisme a des blocs de même puissance, $C_i = \text{Constante}$.

Exemple. Dans F_3 , défini au N° 9, ex. II, en représentant $F_3(A_q, \Gamma_r, 1)$, par son couple de translations (q, r) on a les 9 classes d'isomorphisme

$$C_0 = \{00 \equiv 40 \equiv 03 \equiv 43\},$$

$$C_1 = \{10 \equiv 20 \equiv 33 \equiv 53\},$$

$$C_2 = \{01 \equiv 02 \equiv 44 \equiv 45\},$$

$$C_3 = \{30 \equiv 50 \equiv 13 \equiv 23\},$$

$$C_4 = \{41 \equiv 42 \equiv 04 \equiv 05\},$$

$$C_5 = \{11 \equiv 52 \equiv 34 \equiv 25\},$$

$$C_6 = \{21 \equiv 32 \equiv 54 \equiv 15\},$$

$$C_7 = \{51 \equiv 12' \equiv 24 \equiv 35\},$$

$$C_8 = \{31 \equiv 22 \equiv 14 \equiv 55\}.$$

Tous les isotopes réduits d'un G -quasigroupe ont des groupes d'automorphisme du même ordre. C'est le cas, par exemple, si le complexe des autotopies homogènes se réduit à l'identique; alors $\mathcal{A} = 1$ pour tous les blocs et $|C_i| = |\mathfrak{A}|$.

Les cas limites de cette *monomorphie* correspondent d'une part, aux quasigroupes dont le groupe d'autotopie se réduit à l'identique; tous les blocs de la partition sont alors monômes, d'autre part, aux quasigroupes avec unité qui sont isomorphes à tous leurs isotopes réduits, quasigroupes envisagés en [11], [16] [5] et en [6], Chap X, p. 175, nommés G -loops par Valentin Belousov et dont l'équivalence est universelle, (une seule classe).

III. SYSTÈMES ASSOCIATIFS

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, S désigne toujours un système associatif.

11. Structure de \mathfrak{A}_p . Le groupe, \mathfrak{A}_p , des autotopies principales d'un système associatif quelconque, $S = E(\)$, a pour éléments $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ où m décrit le groupe, \mathcal{B} , (N° 2, vij), des éléments non-singuliers de S .

Preuve. D'après N° 3, (ix), (i) et (ij), tout isotope principal, $S(\Delta_u, \Gamma_v, 1)$ de S est isomorphe à S et coïncide avec lui par l'isomorphisme $\Delta_u \Gamma_v$.

$$(11) \quad S(\Delta_u, \Gamma_v, 1) = S \Delta_u \Gamma_v.$$

Pour que cet isotope principal soit égal à S il faut et il suffit que $\Delta_u \Gamma_v$ soit un automorphisme de S , ce qui exige

$$\forall x, y \in E, (v x u) (v y u) = v(x y) u.$$

Comme u et v sont non-singuliers, ce sont des éléments cancellables d'où

$$\forall x, y \in E, x v y = x y.$$

En particulier pour $x = y = e$, [si $\mathcal{B} \neq ()$, S a une unité, e , N° 2 (ix)],

$$u v = e, \quad u = v^{-1},$$

u est l'inverse de v dans le groupe \mathcal{B} . Toute autotopie principale de S est donc $(\Delta_m, \Gamma_{m^{-1}}, 1)$, où m décrit \mathcal{B} . Mais

$$\Gamma_m \Gamma_{m^{-1}} = \Gamma_{m m^{-1}} = \Gamma_e = 1,$$

donc

$$\Gamma_{m^{-1}} = (\Gamma_m)^{-1}.$$

Finalement, toute autotopie principale de S est $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in \mathcal{B}$. L'ensemble \mathfrak{A}_p de ces autotopies est visiblement un groupe isomorphe à $\{\Delta_m\}$ et par conséquent au groupe \mathcal{B} des éléments non-singuliers de S .

12. Structure de \mathfrak{A}_F . On peut adopter comme système de représentants des autotopies fondamentales le complexe $\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)\}$ où u et v décrivent le groupe \mathcal{B} des éléments non-singuliers de S . Alors \mathfrak{A}_F est un groupe, isomorphe à \mathcal{B}^2 et égal au produit direct des sous-groupes $(1, \Delta_v, \Delta_v)$ et $(\Gamma_u, 1, \Gamma_u)$.

Preuve. D'après le N° 4, toute autotopie d'un système associatif, $S = E()$, avec élément neutre, est $I = (\Delta_v, \Gamma_u, 1) T$, où u et $v \in \mathcal{B}$ et où T est l'un quelconque des isomorphismes qui appliquent $S(\Delta_v, \Gamma_u, 1)$ sur S ,

$$S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) T = S.$$

Mais on a [N° 11, équ. (11)],

$$\forall u, v \in \mathcal{B}, S(\Delta_v, \Gamma_u, 1) = S(\Delta_v \Gamma_u),$$

d'où

$$S T^{-1} = S(\Delta_v \Gamma_u).$$

Le produit $\Delta_v \Gamma_u T$ est donc un automorphisme, X , de S et

$$T = \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1} X, \quad X \in \mathcal{A}.$$

Toute autotopie de S est ainsi

$$I = (\Delta_v, \Gamma_u, 1) T = (\Delta_v \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1}; \Gamma_u \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1}; \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1}) X.$$

Comme S est associatif, $\forall x, y \in E$, $\Delta_x \Gamma_y = \Gamma_y \Delta_x$, donc

$$I = (\Gamma_u^{-1}, \Delta_v^{-1}, \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1}) X$$

ou, par un changement de notation évident, puisque $u, v \in \mathcal{B}$,

$$I = (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X, \quad X \in \mathcal{A},$$

en choisissant $X = 1$

$$\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)\}, \quad u, v \in \mathcal{B}.$$

Il est clair que, lorsque u et v décrivent \mathcal{B} , \mathfrak{A}_F décrit un groupe isomorphe à \mathcal{B}^2 .

Enfin, tout système associatif possède les autotopies évidentes $(1, \Delta_v, \Delta_v)$ et $(\Gamma_u, 1, \Gamma_u)$ et \mathfrak{A}_F est le produit direct des deux groupes qu'elles forment.

13. Structure de \mathfrak{A} . D'après le N° 4, le groupe d'autotopie de S est le produit de complexes de \mathfrak{A}_F par \mathcal{A} , groupe d'automorphisme de S

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F \cdot \mathcal{A}.$$

14. Propriétés de \mathcal{A} .

$$(i). \quad \mathcal{A} \cap \mathfrak{A}_F = 1,$$

$$(ij). \quad \mathcal{A} \cap \mathfrak{A}_F = 1.$$

(ijj). Pour que \mathcal{A} soit normal dans \mathfrak{A} il faut et il suffit que tout élément de \mathcal{A} soit permutable avec tout élément de \mathfrak{A}_F , ou, ce qui revient au même, qu'aucun élément non-singulier de S ne soit déplacé par \mathcal{A} et alors \mathfrak{A} est le produit direct des sous-groupes \mathcal{A} et \mathfrak{A}_F .

Preuve. (i) La 3^{ième} composante de tout élément de \mathfrak{A}_F étant identique, la seule autotopie principale qui puisse être un automorphisme est l'identique.

(ij). Pour que $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) \in \mathfrak{A}_F$ soit un automorphisme il faut et il suffit que ses trois composantes soient égales, or

$$\Delta_v = \Delta_v \Gamma_u \Rightarrow \Gamma_u = 1.$$

(ijj). Tout élément de \mathfrak{A} est, (N° 12).

$$(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X, \quad u, v \in \mathcal{B}, \quad X \in \mathcal{A}.$$

Soit $U \in \mathcal{A}$ un automorphisme quelconque de S . Pour que \mathcal{A} soit normal dans \mathfrak{A} il faut et il suffit que

$$X^{-1}(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)^{-1} U(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X$$

soit un automorphisme de S . soit V . Donc, en posant $XVX^{-1} = W \in \mathcal{A}$, on aura

$$(12) \quad \Gamma_u^{-1}U\Gamma_u = W,$$

$$(13) \quad \Delta_v^{-1}U\Delta_v = W,$$

$$(14) \quad \Gamma_u^{-1}\Delta_v^{-1}U\Delta_v\Gamma_u = W.$$

Portant (12) dans (14),

$$\Gamma_u^{-1}\Delta_v^{-1}U\Delta_v\Gamma_u = \Gamma_u^{-1}U\Gamma_u.$$

Simplifiant

$$\Delta_v^{-1}U\Delta_v = U.$$

Donc, d'après (13). $U = W$ et la condition cherchée est

$$\begin{cases} (\Gamma_u)^{-1}U\Gamma_u = U, \\ (\Delta_v)^{-1}U\Delta_v = U, \end{cases}$$

dont (14) résulte. Elle s'écrit

$$(15) \quad \begin{cases} U^{-1}\Gamma_u U = \Gamma_u, \\ U^{-1}\Delta_v U = \Delta_v \end{cases} \quad \forall u, v \in \mathcal{B}, \quad \forall U \in \mathcal{A}.$$

Sous cette forme elle exprime que tout élément de \mathcal{A} est permutable avec tout élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u)$ de \mathfrak{A}_F . Comme, d'autre part, (ij), $\mathcal{A} \cap \mathfrak{A}_F = 1$, on voit que, sous (15), \mathfrak{A} contient le produit direct $\mathfrak{A}_F \times \mathcal{A}$. Mais (N° 4), \mathfrak{A} est le produit de complexes $\mathfrak{A}_F \mathcal{A}$; donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F \times \mathcal{A}$.

La condition (15), d'après N° 3, (xi), équ. (5), est équivalente à la suivante

$$\Gamma_{uU} = \Gamma_u \wedge \Delta_{uU} = \Delta_v$$

ou

$$uU = u \wedge vU = v.$$

Cela signifie que \mathcal{A} laisse fixe tout élément non singulier de S .

15. Propriétés de \mathfrak{A}_p . (i). *Aux isomorphismes près, le groupe des autotopies principales, $\mathfrak{A}_p = \{(X, Y, 1)\}$, d'un système quelconque S , est invariant isotopique.*

(ij). *Le groupe des autotopies principales de S est normal dans le groupe d'autotopie,*

$$\mathfrak{A}_p \triangleleft \mathfrak{A}.$$

(ijj). *Si S est associatif, pour que \mathfrak{A}_p soit contenu dans le centre de \mathfrak{A} il faut et il suffit que \mathcal{A} appartienne au centralisateur de \mathfrak{A}_p et alors \mathcal{B} est abélien.*

Preuve. (i). Si $R = S(p, q, r) = ST$, toute autotopie principale $(X, Y, 1)$ de S devient, d'après N° 3, (v), une autotopie principale $(p^{-1}Xp, q^{-1}Yq, 1)$ de R et vice-versa. Si \mathfrak{A}'_p est le groupe des autotopies principales de R , on a

$$\mathfrak{A}'_p = T^{-1}\mathfrak{A}_pT,$$

et ainsi les deux groupes sont isomorphes.

(ij). D'après (i), si $T = (X, Y, Z)$ est une autotopie quelconque de S , la transformée d'une autotopie principale quelconque de S par T est encore une autotopie principale de S . Donc \mathfrak{A}_p est transformé en lui-même par tout élément de \mathfrak{A} ; il est normal dans \mathfrak{A} .

Il en résulte que \mathfrak{A}_p sera encore normal dans tout sous-groupe compris entre lui et \mathfrak{A} ; en particulier

$$\mathfrak{A}_p \triangleleft \mathfrak{A}_F \triangleleft \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_F.$$

On est conduit à étudier l'intersection $\mathfrak{A}_F \cap \mathfrak{A}_p$ (Cf, N° 17 infra.),

(ijj). Pour que \mathfrak{A}_p soit dans le centre de \mathfrak{A} il faut et il suffit que tout élément $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ de \mathfrak{A}_p soit permutable avec tout élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u) X$ de \mathfrak{A} pour tous u, v, m dans \mathcal{B} et tout $X \in \mathcal{A}$

$$(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u) X = (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v\Gamma_u) X (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou

$$\begin{cases} \Delta_m\Gamma_u X = \Gamma_u X \Delta_m, \\ \Gamma_m^{-1}\Delta_v X = \Delta_v X \Gamma_m^{-1}. \end{cases}$$

La condition, sur la 3^{ième} composante, est toujours satisfaite. Les deux autres, en observant que $\Delta_m\Gamma_u = \Gamma_u\Delta_m$, puisque S est associatif, et en annulant, ce qui est légitime puisque u, v, m sont non-singuliers, deviennent

$$\forall m \in \mathcal{B}, \quad \forall X \in \mathcal{A}, \quad \Delta_m X = X \Delta_m \wedge \Gamma_m X = X \Gamma_m,$$

ce qui est équivalent, comme au N° 14, in fine, à

$$mX = m.$$

Tout automorphisme de S laisse \mathcal{B} invariant terme à terme et puisque $\mathcal{B} \cong \mathfrak{A}_p$, (N° 11), \mathcal{A} est dans le centralisateur de \mathfrak{A}_p .

Que \mathcal{B} soit alors abélien résulte du fait que, n'importe quel automorphisme de S devant laisser fixe tout $p \in \mathcal{B}$, si l'on applique cela à l'automorphisme interne $\Delta_m\Gamma_m^{-1}$, (N° 2, xix), on aura

$$\forall m, p \in \mathcal{B}, \quad p \Delta_m \Gamma_m^{-1} = p$$

ou

$$p \Delta_m = p \Gamma_m \Leftrightarrow pm = mp.$$

Remarque. La comparaison de N° 14 (ijj) et de N°15 (ijj) fournit les implications suivantes,

N° 14. I $\mathcal{A} \triangleleft \mathfrak{A} \Leftrightarrow$ II, Tout élément de \mathcal{A} est permutable avec tout élément de $\mathfrak{A}_F \Leftrightarrow$ III, \mathcal{A} ne déplace aucun élément de $\mathcal{B} \Leftrightarrow$ IV, $\mathfrak{A} = \mathcal{A} \times \mathfrak{A}_F$. N° 15. V, \mathfrak{A}_F est dans le centre de $\mathfrak{A} \Leftrightarrow$ VI, \mathcal{A} est dans le centralisateur de $\mathfrak{A}_F \Leftrightarrow$ III, \mathcal{A} laisse \mathcal{B} invariant terme à terme.

On a donc, dans tout système associatif

$$I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow III \Leftrightarrow IV \Leftrightarrow V.$$

16. Propriété de \mathfrak{A}_F . \mathfrak{A}_F est normal dans \mathfrak{A} , le groupe quotient est isomorphe à \mathcal{A} .

Preuve. Tout élément de \mathfrak{A}_F est $T = (\Gamma_u, \Delta_u, \Delta_u \Gamma_u)$. Tout élément de \mathfrak{A} est $U = (\Gamma_m, \Delta_m, \Delta_m \Gamma_m) X$, $\forall m, n \in \mathcal{B}$, $\forall X \in \mathcal{A}$. La transformée de T par U est

$$(16) \quad X^{-1}[(\Gamma_m, \Delta_m, \Delta_m \Gamma_m)^{-1} T (\Gamma_m, \Delta_m, \Delta_m \Gamma_m)] X.$$

L'expression entre crochets, étant le produit de trois éléments du groupe \mathfrak{A}_F , est elle-même un élément de ce groupe. La transformée devient

$$X^{-1}(\Gamma_r, \Delta_s, \Delta_s \Gamma_r) X, \quad r, s \in \mathcal{B}.$$

Comme X est un automorphisme et comme Δ_s, Γ_r (et leur produit) sont des bijections de E , X les transforme en nouvelles translations qui sont encore des permutations de \mathfrak{S}_E ; autrement dit

$$(17) \quad \exists h, k \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(\Gamma_r, \Delta_s, \Delta_s \Gamma_r) X = (\Gamma_h, \Delta_k, \Delta_k \Gamma_h).$$

Le second membre est un élément de \mathfrak{A}_F . Tout élément de \mathfrak{A} transforme \mathfrak{A}_F en lui-même et $\mathfrak{A}_F \triangleleft \mathfrak{A}$.

Si $T, T', T'', \dots \in \mathfrak{A}_F$ et $X, X', \dots \in \mathcal{A}$, on a

$$(TX) (T'X') = X(X^{-1}TX) (T'X'),$$

d'après (17),

$$(TX) (T'X') = XT''T'X' = XT''X^{-1}(XX') = T^{iv}(XX').$$

Le groupe quotient est donc isomorphe à \mathcal{A} .

17. Propriétés de l'ensemble $\{\mathfrak{A}_P, \mathfrak{A}_F\}$. (i). *Le centralisateur de \mathfrak{A}_P dans le groupe d'autotopie est le produit de complexes $\mathfrak{A}_P \mathcal{A}_1$, où \mathcal{A}_1 désigne le sous groupe des automorphismes qui laissent fixes tous les éléments non-singuliers.*

(ij). *L'intersection de \mathfrak{A}_P et de \mathfrak{A}_F a pour éléments $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$ où m parcourt l'ensemble des éléments centraux non-singuliers de S .*

(ijj). Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:

- (a). \mathfrak{A}_p est contenu dans \mathfrak{A}_F ,
- (b). \mathcal{B} est contenu dans le centre de S ,
- (c). \mathfrak{A}_p est normal dans \mathfrak{A}_F .

$$\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{A}_F \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S \Leftrightarrow \mathfrak{A}_p \triangleleft \mathfrak{A}_F.$$

Preuve. (i). Tout élément de \mathfrak{A}_p est. (N° 11),

$$(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1), \quad m \in \mathcal{B}.$$

Tout élément de \mathfrak{A} est. (N° 12—13),

$$(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X, \quad u, v \in \mathcal{B}, \quad X \in \mathcal{A}.$$

Le second sera dans le centralisateur de \mathfrak{A}_p si

$$X^{-1}(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)^{-1} (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1).$$

ou,

$$X^{-1}(\Gamma_u^{-1} \Delta_m \Gamma_u, \Delta_v^{-1} \Gamma_m^{-1} \Delta_v, \Gamma_u^{-1} \Delta_v^{-1} \Delta_v \Gamma_u) X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou,

$$X^{-1}(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) X = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1),$$

ou enfin, si X satisfait

$$\forall m \in \mathcal{B}, \quad X^{-1} \Delta_m X = \Delta_m \wedge X^{-1} \Gamma_m^{-1} X = \Gamma_m^{-1}.$$

D'après N° 3 (xi), équ. (5),

$$\Delta_{mX} = \Delta_m \wedge \Gamma_{mX} = \Gamma_m.$$

Comme m est non-singulier, comme son image par un automorphisme, X , est encore un élément non-singulier, et d'après N° 2 vijj, $mX = m$; X ne déplace aucun élément non-singulier; $X \in \mathcal{A}_1$. Quand X_1 décrit \mathcal{A}_1 l'élément $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u) X_1$ décrit le centralisateur $\mathfrak{A}_F \mathcal{A}_1$ de \mathfrak{A}_p .

Si $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, on retrouve la remarque finale du N° 15.

(ij). Tout élément de \mathfrak{A}_p est $(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)$, $m \in \mathcal{B}$; toute autotopie fondamentale est $(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)$, $u, v \in \mathcal{B}$. Tout élément commun à ces deux groupes satisfera aux conditions nécessaires et suffisantes suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} (18) \quad \Delta_m = \Gamma_u, \\ (19) \quad \Gamma_m^{-1} = \Delta_v, \\ (20) \quad 1 = \Delta_v \Gamma_u. \end{array} \right\} \quad u, v, m \in \mathcal{B}.$$

On tire de (18) et (19)

$$\Delta_v \Gamma_u = \Gamma_m^{-1} \Delta_m,$$

d'où, d'après (20)

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \Gamma_m, \\ \forall x \in E, \quad xm &= mx. \end{aligned}$$

Cela exprime que l'élément non-singulier m est dans le centre de S ,

$$m \in \mathfrak{Z}_S.$$

Pour obtenir l'intersection de \mathfrak{U}_P et de \mathfrak{U}_F , il faut donc faire décrire à m l'intersection $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S$. On a alors

$$\mathfrak{U}_P \cap \mathfrak{U}_F = \{(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\} \cong \mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S.$$

Remarque. $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S$ n'est pas, en général, le centre de \mathfrak{B} . Par exemple \mathfrak{S}_3 a pour centre l'identité alors que tous ses sous-groupes sont abéliens.

(ij). (a) \Rightarrow (c), D'après N° 15 (ij), \mathfrak{U}_P est normal dans le groupe d'autotopie; donc il est normal dans tout sous-groupe, \mathfrak{U}_F , compris entre lui et \mathfrak{U} . Réciproquement, si \mathfrak{U}_P est normal dans \mathfrak{U}_F il est évidemment contenu dans \mathfrak{U}_F .

(a) \Rightarrow (b) résulte immédiatement de (ij), car si \mathfrak{U}_P est contenu dans \mathfrak{U}_F l'intersection de ces deux groupes est \mathfrak{U}_P et les éléments non-singuliers de S sont tous centraux; donc $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S$.

Réciproquement, si $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S$, tous les éléments de \mathfrak{B} sont centraux donc, (ij), $\mathfrak{U}_P \cap \mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_P$ ou (a).

18. Propriétés de l'ensemble $\mathfrak{U}_P, \mathfrak{U}_F, \mathfrak{U}$. (i). *Pour que \mathfrak{U} contienne le produit direct $\mathfrak{U}_P \times \mathfrak{U}_F$ il faut et il suffit que le seul élément central non-singulier de S soit e ; $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e, \mathfrak{B} \neq \emptyset$.*

(ij). *Pour que \mathfrak{U} soit égal au produit direct $\mathfrak{U}_P \times \mathfrak{U}_F$ il faut et il suffit que S soit complet, $\mathfrak{B} = \emptyset$.*

Preuve. (i). Tout élément de \mathfrak{U}_P est permutable avec tout élément de \mathfrak{U}_F car, d'après N° 17 (i), tout élément de \mathfrak{U}_P est permutable avec tout élément du produit $\mathfrak{U}_F \mathcal{A}_1$, qui contient \mathfrak{U}_F . Donc, pour que le produit direct $\Pi = \mathfrak{U}_P \times \mathfrak{U}_F$ soit défini il faut et il suffit que ces deux sous-groupes n'aient en commun que l'identité. Or, d'après N° 17, (ij), cette condition est équivalente à celle de l'énoncé: $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$.

Comme \mathfrak{U}_P et \mathfrak{U}_F sont deux sous-groupes de \mathfrak{U} , pour que \mathfrak{U} contienne leur produit direct il faut et il suffit que ce produit soit défini, c'est-à-dire que $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$.

(ij). Pour que \mathfrak{U} soit égal à Π il faut et il suffit que, en outre, ce produit contienne \mathcal{A} , autrement dit, que l'intersection de Π et de \mathcal{A} soit \mathcal{A} lui-même. Mais

$$\Pi = \mathfrak{U}_P \times \mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_P \mathfrak{U}_F.$$

Or il est facile de voir que $\mathfrak{A}_P \mathfrak{A}_F \cap \mathcal{A}$ est le groupe des automorphismes internes de S (N° 2, (xix)). En effet, appelons X un automorphisme quelconque de S et désignons par T ,

$$T = (\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1) (\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u),$$

un élément arbitraire de \mathcal{H} . Pour que T appartienne à \mathcal{A} il faut et il suffit que

$$\Delta_m \Gamma_u = \Gamma_m^{-1} \Delta_v = \Delta_v \Gamma_u = X \in \mathcal{A}.$$

D'où $u = m^{-1}$, $v = m$, $X = (x \rightarrow m^{-1}xm)$.

Quand m décrit \mathcal{B} , X décrit le groupe des automorphismes internes de S . La condition cherchée est donc que \mathcal{A} coïncide avec ce groupe, c'est-à-dire que S ne possède que des automorphismes internes. Cela, joint à la condition précédente, (i), que le seul élément central de \mathcal{B} dans S soit l'unité, exprime que S est complet, au sens du N° 2, (xx).

19. Groupes. Quand S est à la fois un quasigroupe et un système associatif, et par suite un groupe, il possède en même temps les propriétés de ces deux structures et l'on retrouve les résultats de [22].

FORMULAIRE

N° 3, ijj. $\delta_{vY} = X^{-1} \Delta_v$; $\gamma_{uX} = Y^{-1} \Gamma_u$; ($x, y \in \mathfrak{S}_E$); S quelconque avec unité.

N° 3, xi. $X^{-1} \Delta_m X = \Delta_{mX}$, $X \in \mathcal{A}$; $m \in \mathcal{B}$; S quelconque avec unité.

N° 6, N° 11. $\mathfrak{A}_P = \{(\Delta_m, \Gamma_m^{-1}, 1)\} \begin{cases} m \in \text{nucleus an milieu}; S = \text{quasi-} \\ m \in \mathcal{B}; S \text{ associatif.} \end{cases}$

N° 4, N° 12. $\mathfrak{A}_F = \{(\Gamma_u, \Delta_v, \Delta_v \Gamma_u)\}$; $u, v \in \mathcal{B}$; S associatif.

N° 4, N° 13. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P \mathcal{A}$; $S =$ quelconque, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

N° 9. $|\mathcal{H}| = \mathfrak{A}$; \mathfrak{A}_P ; $|C_i| = \mathfrak{A}$; \mathcal{A}_I quasigroup à mité; $\Sigma_I(\mathfrak{A}; \mathcal{A}_I) = |E|^2$; $S =$ quasigroupe.

N° 17. $\mathfrak{A}_P \subseteq \mathfrak{A}_F \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{Z}_S \Leftrightarrow \mathfrak{A}_P \triangleleft \mathfrak{A}_F$; S associatif.

N° 18. $\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F \subset \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$; S associatif;
 $\mathfrak{A}_P \times \mathfrak{A}_F = \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \cap \mathfrak{Z}_S = e \wedge \mathcal{A} = \{\Gamma_m^{-1} \Delta_m\}$; associatif.

RÉFÉRENCES

- [1] Adrian A. Albert, *Quasigroups I*, Trans. Amer. Math. Soc. 54, (1943), 507-519.
- [2] Antonio Almeida Costa, *Cours d'Algèbre Générale, I*. Edit. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1964.
- [3] Rafael Artzy, *Crossed-inverse and related loops*, Trans. Amer. Math. Soc. 91, (1959), 480-492.

- [4] Reinhold Baer, *Zur Einordnung der Theorie der Mischgruppen in die Gruppentheorie*, Sitz. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, (1928), 3—18.
- [5] В. Д. Белоусов, (Belousov), "Лупы с ядром индекса два, Izdat. „Karta Moldovenjaskie“. Kishinev (1965), 11—21.
- [6] В. Д. Белоусов, (Belousov), *Основы теории квазигрупп и луп*, Moscow 1967.
- [7] Otakar Borůvka, *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, Berlin, 1960.
- [8] H. Brandt, *Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*, Math. Ann. 96, (1926), 360—366.
- [9] Richard H. Bruck, *Contributions to the theory of loops*, Trans. Amer. Math. Soc. 60, (1946), 245—354.
- [10] Richard H. Bruck, *A Survey of binary Systems*, Berlin, 1958.
- [11] Richard H. Bruck, *Some Theorems on Moufang Loops*, Math. Zeitschr. 73, (1960), 59—78.
- [12] Maria Hasse, Lothar Michler, *Über die Einbettbarkeit von Kategorien in Gruppoide*, Math. Nachr. 25 (1963) 169—177.
- [13] Hans-Jürgen Hoehnke, *Zur Theorie der Gruppoide, I à IX*, Math. Nachr. 24, (1962), 137—168 et suivants.
- [14] Alfred Loewy, *Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen*, Journ. Reine Angew. Math. 157, (1927) 239—254.
- [15] Lothar Michler, *Über die Einbettbarkeit spezieller Kategorien in Brandtsche Gruppoide*, Wiss. Z. Hochsch. Sch. Magdeburg, 5 (1961), 21—27.
- [16] J. Marshall Osborn, *Loops with the weak inverse property*, Pacific J. Math. 10 (1960), 295—304.
- [17] Willi Rinow, *Über die Vervollständigung induktiver Gruppoide*, Math. Nachr., 25 (1963), 199—222.
- [18] Albert J. V. Sade, *Quasigroupes obéissant à certaines lois*, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A, 22 (1957), 151—184.
- [19] Albert J. V. Sade, *Quelques remarques sur l'isomorphisme et l'automorphisme des quasigroupes*, Abhand, Math. Sem. Univ. Hamburg, 22 (1958), 84—91.
- [20] Albert J. V. Sade, *Isomorphisme d'Hypergroupoïdes isotopes*, Pacific J. Math. 9, (1959), 583—584.
- [21] Albert J. V. Sade, *Theorie des systèmes demi-siens de groupoïdes*, Pacific J. Math. 10, (1960), 625—660.
- [22] Albert J. V. Sade, *Quasigroupes isotopes, autotopies d'un groupe*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 81, (1967), 231—239.
- [23] Hans J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, New York, (1956).