Ivo Rosenberg

Maximale Gegenketten im Verband 3^n

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 4, 185--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104644`

MAXIMALE GEGENKETTEN IM VERBAND 3^n

IVO ROSENBERG, Brno

Eingegangen am 21. Juni 1967

In [3] und [2] ist die maximale Gegenkette (d. h. eine total ungeordnete Menge) im Verband 2^n bestimmt. In [3] ist dieses Problem äquivalent folgendermassen formuliert: Im System aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist das maximale Teilsystem der durch Inklusion nicht vergleichbaren Mengen zu bestimmen. In [2] findet sich folgende Formulierung: Es ist die Menge zu bestimmen, welche die maximale Anzahl von untereinander nicht vergleichbaren Booleschen Vektoren enthält. In dieser Arbeit bestimmen wir die maximale Gegenkette im Verband 3^n und eine Ungleichung für maximale Gegenketten in k^n.

In § 1 verwenden wir die Bezeichnungen aus [2].

§ 1

$k > 2$ und $n \geqq 2$ seien natürliche Zahlen. Der Verband k^n ist die Menge aller n-Tupeln der ganzen Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $0 \leqq \alpha_i \leqq k (i = 1, 2, \ldots, n)$, die wie folgt geordnet ist:

(1) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \alpha_i \leqq \beta_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Es läßt sich leicht ableiten, daß die Höhe [4] des Elementes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$ gleich $h(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ ist.

Offenbar gilt:

Hilfssatz 1. *Es sei α, $\beta \in k^n$, $\alpha \neq \beta$. Wenn $h(\alpha) = h(\beta)$, dann sind α und β unvergleichbare Elemente.*

Bezeichnen wir mit S_r die Menge aller Elemente aus k^n mit der Höhe $r\ [r = 0, 1, \ldots, (k - 1)\ n]$. Nach dem Hilfssatz 1 ist S_r eine Gegenkette. Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige, nichtleere Gegenkette in k^n. Für $r = 0, 1, \ldots \ldots, (k - 1)n$ werden wir $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M} \cap S_r$ schreiben. Es ist also $\mathfrak{M}_r$ die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{M}$ mit der Höhe r. Bezeichnen wir mit τ bzw. mit σ die kleinste, bzw. größte Zahl mit Eigenschaft, daß $\mathfrak{M}_\tau \neq \emptyset$ bzw. $\mathfrak{M}_\sigma \neq \emptyset$ ist. Offenbar ist

(2)
$$\mathfrak{M} = \bigcup_{r=\tau}^{\sigma} \mathfrak{M}_r.$$

Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ die Menge aller Elemente aus $S_{\tau+1}$, die größer sind als zumindest ein Element von $\mathfrak{M}_\tau$. Die Elemente aus $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ und die Elemente aus $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\tau$ sind unvergleichbar. Wenn nämlich ein mit $\beta \in \mathfrak{N}_{\tau+1}$ vergleichbares $\alpha \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\tau$ existierte, dann wäre $\alpha > \beta$ [denn $h(\alpha) \geqq \tau + 1$ und $h(\beta) = \tau + 1$] und wegen der Definition von $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ würde $\gamma \in \mathfrak{M}_\tau$ derart existieren, daß $\beta > \gamma$ und $\alpha > \beta > \gamma$ wäre, was im Widerspruch damit steht, daß α, γ Elemente der Gegenkette $\mathfrak{M}$ sind. Da die Elemente von $\mathfrak{N}_{\tau+1} \subseteqq S_{\tau+1}$ untereinander unvergleichbar sind und auch die Elemente von $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\tau$ untereinander unvergleichbar sind, ist

$$\mathfrak{N}_{\tau+1} \cup \bigcup_{r=\tau+1}^{\sigma} \mathfrak{M}_r \tag{3}$$

eine Gegenkette. Wenn wir beweisen, daß card $\mathfrak{M}_\tau <$ card $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ ist, dann ist $\mathfrak{M}$ nach (3) offenbar keine maximale Gegenkette.

§ 2

Es sei λ eine nichtnegative, ganze Zahl, V_λ die Menge aller k-Tupeln $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ von nichtnegativen, ganzen Zahlen der Art, daß

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = n, \qquad \sum_{i=0}^{k-1} i a_i = \lambda. \tag{4}$$

Es sei $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in V_\lambda$. Wir sagen, daß $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ den Typ a hat, wenn sich zwischen den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gerade a_i Zahlen i befinden ($i = 0, 1, \ldots, k - 1$), d. h. wenn zwischen den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a_0 Nullen, a_1 Einser u. s. w. auftreten.

Es sei τ die in (2) angeführte Zahl. Für $a \in V_\tau$ bezeichnen wir die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{M}_\tau$ des Typs a mit U_a. Ganz analog bezeichnen wir mit W_b die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ des Typs $b (b \in V_{\tau+1})$. Offenbar gilt:

$$\sum_{a \in V_\tau} \text{card } U_a = \text{card } \mathfrak{M}_\tau, \quad \sum_{b \in V_{\tau+1}} \text{card } W_b = \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}. \tag{5}$$

Es sei $0 \leqq i < k - 1$. Für jedes $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in V_\tau$ setzen wir

$$\varphi_i(a) = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1} + 1, a_{i+2}, \ldots, a_{k-1}). \tag{6}$$

Wenn $a_i > 0$ ist, dann ist offenbar $\varphi_i(a) \in V_{\tau+1}$.

Wir betrachten ein beliebiges Element $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n') \in U_a$. Es läßt sich leicht überprüfen, daß gerade a_i Elemente $\beta \in W_{\varphi_i(a)}$ solcher Art existieren, daß $\alpha' < \beta$. Tatsächlich entsteht jedes solche Element aus α' so, daß wir irgendein Element α_j' gleich i durch das Element $i + 1$ ersetzen. Wir haben gerade a_i solcher Möglichkeiten. In Anbetracht dessen, daß $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ alle Elemente aus $S_{\tau+1}$ die größer als zumindest ein Element aus $\mathfrak{M}_\tau$ sind, bekommen wir so alle Elemente $\beta \in W_{\varphi_i(a)}$ für die $\alpha' < \beta$ ist.

So haben wir festgestellt, daß die Anzahl aller geordneten Paare (α, β) mit $\alpha \in U_a$, $\beta \in W_{\varphi_i(a)}$ und $\alpha < \beta$ stets gleich a_i card U_a ist.

Wir betrachten ein beliebiges Element $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_n) \in W_{\varphi_i(a)}$. Leicht können wir uns vergewissern, daß höchstens $a_{i+1} + 1$ Elemente $\alpha \in U_a$ der Art, daß $\alpha < \beta'$ bestehen. Tatsächlich erhalten wir aus dem Element β' die Elemente aus U_a so, daß wir in β irgendein Element β'_j gleich $i + 1$ durch das Element i ersetzen. Solche Möglichkeiten bestehen höchstens $a_{i+1} + 1$, denn so können wir auch Elemente erhalten, die zwar in S_τ, aber nicht in $\mathfrak{M}_\tau$ gehören. Es ist daher die Anzahl aller geordneten Paare (α, β) mit $\alpha \in U_a$, $\beta \in W_{\varphi_i(a)}$ und $\alpha < \beta$ stets $\leqq (a_{i+1} + 1)$ card $W_{\varphi_i(a)}$. Daraus folgt:

$$a_i \operatorname{card} U_a \leqq (a_{i+1} + 1) \operatorname{card} W_{\varphi_i(a)}. \tag{7}$$

Der Einfachheit halber setzen wir $W_{\varphi_i(a)} = \emptyset$ im Falle, daß $a_i = 0$. Die Ungleichung (7) gilt dann offenbar auch im Falle, daß $a_i = 0$.

§ 3

Hilfssatz 2: *Es sei* $0 < \tau < \frac{(k-1)(n-1)}{2}$. *Dann ist*

$$\operatorname{card} \mathfrak{M}_\tau < \operatorname{card} \mathfrak{N}_{\tau+1}. \tag{8}$$

Beweis: Es sei $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in V_\tau$. Wir setzen $s_l = l(k-l)$ $(l = 1, 2, \ldots, k-1)$ und für $c = (c_0, \ldots, c_{k-1}) \in V_\tau \cup V_{\tau+1}$ wir bezeichnen

$$w(c) = \sum_{l=1}^{k-1} s_l c_l. \tag{9}$$

Aus (6) und (9) geht hervor, daß

$$w(\varphi_i(a)) = w(a) + k - 1 - 2i. \tag{10}$$

Für $1 \leqq j \leqq k-1$ ist $-(k-2) \leqq 2j - k \leqq k-2$ und daher $(2j - k)^2 \leqq (k-2)^2$. Daraus bekommen wir $4j^2 - 4jk + k^2 \leqq k^2 - 4k + 4$. Daraus ergibt sich $s_j = j(k-j) \geqq k-1$ und um so eher $s_j > k-3$. Da $\tau > 0$, so ist für $a \in V_\tau$ mindestens eine von den Zahlen $a_0, \ldots, a_{k-1}$ positiv und daher nach (9) $w(a) > k-3$. Aus (10) folgt dann $w(\varphi_i(a)) > 0$ $(a \in V_\tau, i = 0, 1, \ldots, k-2)$.

Jede Ungleichung (7) multiplizieren wir auf beiden Seiten mit den positiven Zahlen $s_{i+1}/w(\varphi_i(a))$ und addieren alle diese Ungleichungen:

$$\sum_{a \in V_\tau} \operatorname{card} U_a \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1} a_i}{w(\varphi_i(a))} \leq \sum_{a \in V_\tau} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1}(a_{i+1} + 1) \operatorname{card} W_{\varphi_i(a)}}{w(\varphi_i(a))}. \tag{11}$$

Zu jedem $b = (b_1, \ldots, b_{k-1}) \in V_{\tau+1}$ und $0 \leqq i \leqq k-2$ existiert höchstens ein $a \in V_\tau$ so, daß $\varphi_i(a) = b$ (wenn $b_{i+1} > 0$). Durch Einfügung einiger nichtnegativer Zahlen auf der rechten Seite von (11) bekommen wir also

$$(12) \qquad \sum_{a \in V_\tau} \text{card } U_a \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1} a_i}{w(\varphi_i(a))} \leq \sum_{b \in V_{\tau+1}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{s_j b_j \text{ card } W_b}{w(b)}.$$

Nach (9) und (5) ist die rechte Seite von (12) gleich:

$$(13) \qquad \sum_{b \in V_{\tau+1}} \text{card } W_b \frac{1}{w(b)} \sum_{j=1}^{k-2} s_j b_j = \sum_{b \in V_{\tau+1}} \text{card } W_b = \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}.$$

Setzen wir weiter

$$(14) \qquad \gamma_a = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1} a_i}{w(\varphi_i(a))}.$$

Aus (12) und (14) ergibt sich

$$(15) \qquad \sum_{a \in V_\tau} \gamma_a \text{ card } U_a \leq \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}.$$

Nach (10) bekommen wir

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1} a_i}{w(a) + k - 1} \leq \sum_{i=0}^{k-2} \frac{s_{i+1} a_i}{w(\varphi_i(a))} = \gamma_a.$$

Hier gilt das Gleichheitzeichen nur, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-2} = 0$ ist, in den übrigen Fällen gilt das Zeichen $<$. Aus der Definition von s_{i+1} folgt $s_{i+1} = s_i + k - 1 - 2i$. Da $a \in V_\tau$, folgt aus (4) und (9):

$$(17) \quad \sum_{i=0}^{k-2} s_{i+1} a_i = \sum_{i=0}^{k-2} (s_i + k - 1 - 2i)\, a_i = w(a) + (k-1)\, n - 2\tau$$

und daher ergibt sich aus (16)

$$(18) \qquad 1 + \frac{(k-1)(n-1) - 2\tau}{w(a) + k - 1} \leq \gamma_a,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-2} = 0$ ist. Daher ist $1 \leqq \gamma_a$ für alle $a \in V_\tau$. Da $\mathfrak{M}_\tau \neq \emptyset$ ist, so existiert ein $d \in V_\tau$ mit card $U_d \neq \emptyset$. Wenn dabei $1 < \gamma_d$ ist, dann ergibt sich aus (5) und (16):

$$\text{card } \mathfrak{M}_\tau = \sum_{a \in V_\tau} \text{card } U_a < \sum_{a \in V_\tau} \gamma_a \text{ card } U_a = \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}.$$

Damit ist der Hilfssatz für diesen Fall bewiesen.

Es bleibt noch der Fall, daß $\gamma_c = 1$ für jedes $c \in V_\tau$ mit card $U_c \neq \emptyset$ ist. Wenn aber $\gamma_c = 1$ ist, dann ist nach (18) vor allem $\tau = \frac{1}{2}(k-1)(n-1)$ und weiter ist $c = (c_0, 0, 0, \ldots, 0, c_{k-1})$. Nach (4) ist dann $(k-1)\, a_{k-1} = \frac{1}{2}(k-1)(n-1)$ und daher ist $a_{k-1} = \frac{n-1}{2}$. Ebenfalls nach (4) ist auch $a_0 + a_{k-1} = n$, d. h. $a_0 = \frac{n+1}{2}$. Es ist also

$$c = \left(\frac{n+1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \frac{n-1}{2}\right).$$

Es existiert also gerade ein c, für welches $\gamma_c = 1$ sein kann. Dann ist aber $\mathfrak{M}_\tau = U_c$. Für $a = c$ und $i = 0$ bekommen wir aus (7) und (5):

$$\frac{n+1}{2} \text{ card } U_c = \text{card } W_{\varphi_0(c)} \leq \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}.$$

und daher ist

$$\text{card } \mathfrak{M}_\tau = \text{card } U_c \leq \frac{2}{n+1} \text{ card } \mathfrak{N}_{\tau+1} < \text{card } \mathfrak{N}_{\tau+1}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 1: *Jedes Element α einer beliebigen maximalen Gegenkette im Verband $\mathbf{k}^n$ hat die Höhe $h(\alpha)$ welche*

$$\frac{k-1}{2}(n-1) < h(\alpha) < \frac{k-1}{2}(n+1) \tag{19}$$

erfüllt.

Beweis: Nehmen wir an, daß $\mathfrak{M}$ eine maximale Gegenkette in $\mathbf{k}^n$ ist, und daß in (1) $\tau \leq \frac{k-1}{2}(n-1)$ ist. Nach dem Hilfssatz 2 ist card $\mathfrak{M}_\tau <$ card $\mathfrak{N}_{\tau+1}$ und daher hat die Gegenkette (2) mehr Elemente als die Gegenkette (1). Das ist jedoch ein Widerspruch und daher ist

$$\tau > \frac{k-1}{2}(n-1).$$

Bezeichnen wir

$$\mathfrak{M}' = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^n \mid (k-1-\alpha_1, \ldots, k-1-\alpha_n) \in \mathfrak{M}\}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{M}'$ ebenfalls eine Gegenkette und auch eine maximale Gegenkette ist. $\mathfrak{M}_\sigma \neq \emptyset$ und so existiert ein $(\beta_1,$

$\ldots, \beta_n) \in \mathfrak{M}_\sigma$ (welches die Höhe σ hat). $\mathfrak{M}'$ enthält dann ein Element $(k - 1 - \beta_1, \ldots, k - 1 - \beta_n)$, das die Höhe,

$$\sum_{i=1}^{n} (k - 1 - \beta_i) = n(k - 1) - \sigma$$

hat. Nach dem ersten Teil des Beweises haben die Elemente der Gegenkette $\mathfrak{M}'$ die Höhe $> \frac{k-1}{2}(n - 1)$. Also ist $\sigma < \frac{k-1}{2}(n + 1)$ und damit ist der Beweis beendet.

Für $k = 3$ bekommen wir aus Satz 1 die

Folgerung: Im Verband $\mathbf{3}^n$ ist die Menge aller Elemente $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n$ die einzige maximale Gegenkette.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige maximale Gegenkette im Verband $\mathbf{3}^n$. Für $\alpha \in \mathfrak{M}$ ist nach Satz 1: $n - 1 < h(\alpha) < n + 1$. Es ist also $h(\alpha) = n$ und $\mathfrak{M}$ ist eine Teilmenge der Gegenkette S_n aller Elemente mit der Höhe n. Es ist daher $\mathfrak{M} = S_n$.

Zum Schluß bestimmen wir für $k = 3$ die Anzahl der Elemente aus S_n. Dazu bestimmen wir die Anzahl der n-Tupeln aus S_n, die gerade l Zweier haben $\left(0 \leq l \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Jedes solche n-Tupel hat also l Zweier, l Nullen und $n - 2l$ Einser. Die Anzahl solcher n-Tupeln beträgt also $\binom{n}{l}\binom{n-l}{l}$ und die Anzahl der Element von S_n ist gleich

$$s_n = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{l}\binom{n-l}{l}. \tag{20}$$

So ist z. B. $s_2 = 3$, $s_3 = 7$, $s_4 = 51$, $s_6 = 141$ und $s_7 = 393$.

LITERATUR

[1] Birkhoff G.: Lattice Theory. Rev. Ed. New York 1948.
[2] Micheev V. M.: O množestvach soderžaščich naibol'šeje čislo poparno nesravnimich bulevych vektorov. Problemy kibernetiky 2 (1959) S. 69—71.
[3] Sperner E.: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Zeitschfrit 27 (1928) S. 544—548.
[4] Szasz G.: Einführung in die Verbandstheorie. Teubner Leipzig 1962.