Archivum Mathematicum

František Fiala

Verbandsgruppen mit o-kompakten Komponentenverbänden

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 4, 177--184

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104643`

VERBANDSGRUPPEN MIT o-KOMPAKTEN KOMPONENTENVERBÄNDEN

Von František Fiala in Brno

Eingegangen am 5. Mai 1967

$G = (G_x : x \in M)$ sei eine Realisierung einer Verbandsgruppe (l-Gruppe) $\mathfrak{G}$. In [5] wurde der Begriff des durch die Realisierung G induzierten topologischen Raumes (Bezeichnung (M, G)) eingeführt. Dabei wurde das System aller Untermengen der Form $Z(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$, $f \in G$, als Basis für die abgeschlossenen Mengen in M gewählt. Ferner wurde die Γ-, Π- und Π'-Realisierung zu einer l-Gruppe mit Realisierung konstruiert. Dabei bezeichnet $\Gamma(\Pi, \Pi')$ den Verband aller Komponenten (aller Hauptokomponenten, aller Dualhauptkomponenten) der l-Gruppe G.

In einem unveröffentlichten Manuskript hat F. Šik den folgenden Satz bewiesen.

(I) *Ist* $G = (G_x : x \in M)$ *die* Π'-*Realisierung einer* l-*Gruppe* $\mathfrak{G}$, *dann gilt:*

A. *Ist der Verband* Γ o-*kompakt, dann gilt* $\Gamma = \Pi = \Pi'$ *und der Verband* $\mathfrak{M}(M, G)$ *ist ein Unterverband des Verbandes* $\mathfrak{N}(M,G)$.

B. *Ist* $\Pi = \Pi'$, $\mathfrak{N}(M, G) = \mathfrak{M}(M, G)$, *dann ist der Verband* Γ o-*kompakt.*

C. *Ist der Verband* G o-*kompakt und ist die Summe aller von* G *verschiedenen Kompanenten nicht gleich* G, *dann* $\mathfrak{N}(M, G) = \mathfrak{M}(M, G)$, *d. h. der topologische Raum* (M, G) *ist diskret.*

F. Šik hat ferner die Annahme ausgesprochen, daß dieser Satz auch für die l-Gruppe ohne Realisierung gilt, wenn man den topologischen Raum (M, G) durch den topologischen Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ aller Ultraantifilter in Verband Π' erzetzt.

Dieser Beitrag enthält einen Beweis des verallgemeinerten Satzes (2.6, 2.8).

1. Wir führen jetzt die Grundbegriffe und die Hilfsbehauptungen ein.

1.1. G sei eine l-Gruppe. Wir nennen zwei Elemente $a, b \in G$ *disjunktiv*, wenn $|a| \wedge |b| = 0$ gilt (in Zeichen $a\delta b$). Für $\emptyset \neq A \subseteqq G$ setzen wir

$$A' = \{x : x \in G, x\delta y \textit{ für jedes } y \in A\}.$$

$\emptyset \neq A \subseteqq G$ nennt man *die Komponente in* G, wenn $\emptyset \neq B \subseteqq G$ derartig existiert, daß $A = B'$ gilt. Für $a \in G$ bezeichnen wir $a' = \{a\}'$, $a'' = (a')'$. a' nennen wir *die Dualhauptkomponente*, a'' *die Hauptkomponente.*

Offensichtlich ist jede Haupt- bzw. Dualhauptkomponente durch das positive Element $|a|$ erzeugt.

Die durch die mengentheoretische Inklusion geordnete Menge Γ aller Komponenten in G bildet eine vollständige Boolesche Algebra ([3], Teorema 1).

Die Mengen Π bzw. Π' aller Haupt- bzw. Dualhauptkomponenten in G sind Unterverbände des Verbandes Γ, in denen für $a, b \in G^+$

$$(1) \qquad a'' \vee_\Gamma b'' = (a \vee_G b)'' = (a + b)'', \quad a'' \wedge_\Gamma b'' = (a \wedge_G b)'',$$

$$(2) \qquad a' \vee_\Gamma b' = (a \wedge_G b)', \quad a' \wedge_\Gamma b' = (a \vee_G b)' = (a + b)'$$

gilt ([4], Theorema 1).

Der Verband Γ ist durch den Unterverband Π $\bigvee$-erzeugt und durch den Unterverband Π' $\bigwedge$-erzeugt ([**5**], 2.1).

1.2. L sei ein Verband. Eine nichtleere Untermenge $x \subseteqq L$ nennen wir *den Antifilter (A. f.) in L*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $a, b \in x \Rightarrow a \vee b \in x$;
2. $a \in x$, $c \leqq a \Rightarrow c \in x$;
3. existiert $1 \in L$, dann $1 \bar{\in} x$.

Einen maximalen A. f. in L nennen wir *den Ultraantifilter (U. a. f.) in L*. Die Menge aller U. a. f. in L bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(L)$.

L sei nun ein distributiver Verband mit dem größten Element 1. Wir führen eine Topologie in die Menge $\mathfrak{U}(L)$ derart ein, daß wir alle Mengen der Form

$$\mathfrak{U}a = \{x : x \in \mathfrak{U}(L), a \in x\}$$

für $a \in L$ als Basis für offene Mengen nehmen. Der topologische Raum $\mathfrak{U}(L)$ ist Hausdorffsch ([4], IV, Teorema A).

1.3. Hilfssatz. *Ein A. f. in einem Booleschen Verband ist ein U. a. f. dann und nur dann, wenn er von je zwei komplementären Elementen genau eines enthält.*

Beweis. [5], 4.1.

1.4. Einen A. f. x in L nennen wir *einfach, wenn*

$$a, b \in L, a \wedge b \in x \Rightarrow a \in x \text{ oder } b \in x$$

gilt.

Nach [5], 4.3, *ist in einem Booleschen Verband jeder U. a. f. ein einfacher A. f. und umgekehrt.*

Ist L ein distributiver Verband, $a, b \in L$, $b \nleqq a$, dann existiert ein einfacher A. f. x in L derart, daß $a \in x$, $b \bar{\in} x$ gilt (Es folgt aus [8], Satz 66).

1.5. Hilfssatz. *B sei ein Boolescher Verband. Dann sind folgende Bedingungen für $a, b \in B$ äquivalent:*

1. $a \leqq b$,
2. $\mathfrak{U}b \subseteqq \mathfrak{U}a$.

Ist eine dieser Inklusionen scharf, dann ist auch die andere scharf.

Beweis. Siehe [1], 3.1. 1 $\Rightarrow$ 2. Ist $a \leqq b$, dann gilt für jedes $x \in \mathfrak{U}b$, daß $b \in x$, also $a \in x$, und deshalb gilt $x \in \mathfrak{U}a$, d. h. $\mathfrak{U}b \subseteqq \mathfrak{U}a$.

2 $\Rightarrow$ 1. Es sei $a \nleqq b$. Nach 1.4 existiert ein einfacher A. f. x in B derart, daß $b \in x$ und $a \bar{\in} x$. Nach 1.4 ist x U. a. f. in B. Daraus folgt $x \in \mathfrak{U}b$ und $x \bar{\in} \mathfrak{U}a$, d. h. $\mathfrak{U}b \nsubseteqq \mathfrak{U}a$.

Beweis der Schlußbehauptung. $a \lneqq b \Rightarrow \mathfrak{U}b \subseteqq \mathfrak{U}a$ und es existiert ein einfacher A. f. (= U. a. f.) in B derart, daß $a \in y$, $b \bar{\in} y$ (1.4) $\Rightarrow \mathfrak{U}b \subsetneqq \mathfrak{U}a \Rightarrow a \lneqq b$.

1.6. Hilfssatz. *B sei ein Boolescher Verband. Dann ist $\{\mathfrak{U}a : a \in B\}$ auch eine Basis für abgeschlossene Mengen im topologischen Raum $\mathfrak{U}(B)$.*

Beweis. Nach 1.2 ist $\{\mathfrak{U}a : a \in B\}$ die Basis für offene Mengen im Raum $\mathfrak{U}(B)$. Daraus folgt, daß $\{\mathfrak{U}(B) \backslash \mathfrak{U}a : a \in B\}$ die Basis für abgeschlossene Mengen im Raum $\mathfrak{U}(B)$ ist. Nach 1.3 enthält ein $x \in \mathfrak{U}(B)$ genau eines von je zwei komplementären Elementen a, $a' \in B$. Also $\mathfrak{U}a' = \mathfrak{U}(B) \backslash \mathfrak{U}a$ und $\mathfrak{U}a = \mathfrak{U}(B) \backslash \mathfrak{U}a'$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

1.7. L sei ein Verband. Einen A. f. x in L nennen wir *den Haupt-A. f.*, wenn ein Element $a \in L$ so existiert, daß

$$x = \{b : b \in L, b \leqq a\}$$

gilt. Wir sagen auch, daß *der A. f. x durch das Element a erzeugt ist.*

Ein U. a. f. in L ist ein Haupt-A. f. in L genau dann, wenn er durch ein Dualatom des Verbandes L erzeugt ist ([1], 4.3).

1.8. Hilfssatz. *B sei ein Boolescher Verband. Ein U. a. f. x in B ist ein isolierter Punkt des Raumes $\mathfrak{U}(B)$ genau dann, wenn x ein Haupt-A. f. in B ist.*

Beweis. Die Behauptung ist eine einfache Verallgemeinerung von [1], 4.4.

1.9. P sei ein topologischer Raum im Sinne Bourbakis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}(P)$ den Verband aller abgeschlossenen Mengen in P, mit $\mathfrak{M}(P)$ den Verband aller regulären abgeschlossenen Mengen, d. h. derjenigen Mengen in P, die die abgeschlossenen Hüllen offener Mengen in P sind. Die Verbandsoperationen in diesen Verbänden sind folgendermassen definiert:

$$A, B \in \mathfrak{N}(P) \Rightarrow A \vee_{\mathfrak{N}} B = A \cup B, \quad A \wedge_{\mathfrak{N}} B = A \cap B,$$

$$A, B \in \mathfrak{M}(P) \Rightarrow A \vee_{\mathfrak{M}} B = A \cup B, \quad A \wedge_{\mathfrak{M}} B = \overline{\mathrm{Int}\,(A \cap B)}.$$

2. Wir werden nun die kompakt erzeugten Verbände untersuchen. In der Literatur sind verschiedene Definitionen der Kompakterzeugtheit eingeführt. In [2] findet man folgende Definition: Einen Verband L nennen wir *kompakt erzeugt*, wenn 1. L vollständig ist, 2. jedes Element von L das Supremum von kompakt erzeugten Elementen ist. Dabei bezeichnet man ein Element $a \in L$ als *kompakt*, wenn folgende Bedingung gilt: Ist $a \leqq \bigvee A$ für eine Untermenge $A \subseteqq L$, dann gibt es eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$, so daß $a \leqq \bigvee B$ gilt.

F. Šik führt in [7] einen Begriff der Kompakterzeugtheit für beliebige (nicht notwendig vollständige) Verbände folgendermassen ein.

2.1. Es sei $\alpha \geqq \aleph_0$ eine beliebige Kardinalzahl. Einen Verband L nennen wir *α-kompakt erzeugt*, wenn jedes Element von L das Supremum α-kompakt erzeugter Elemente ist. Dabei heißt ein Element $a \in L$ *α-kompakt*, wenn die folgende Bedingung gilt: Ist $a \leqq \bigvee A$ für eine Untermenge $A \subseteqq L$, card $A \leqq \alpha$, dann gibt es eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$ derart, daß $a \leqq \bigvee B$ gilt.

Ist $\alpha =$ card L, nennen wir den Verband L kürzer *kompakt erzeugt* und das Element *a kompakt*.

Im Folgenden werden wir uns mit einer anderen Art der Kompaktheit beschäftigen.

2.2. L sei ein Verband, $A \subseteqq L$. Wir zeichnen

$$A^* = \{b : b \in L, \, b \geqq a \text{ gilt für alle } a \in A\}.$$

Den Verband L nennen wir *o-kompakt*, wenn er folgende Eigenschaft hat:

Ist $A^* \neq \emptyset$ für $\emptyset \neq A \subseteqq L$, dann existiert eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$ derart, daß $A^* = B^*$ gilt.

Die Beziehungen zwischen den eingeführten Begriffen zeigt folgende Behauptung.

2.3. Hilfssatz. *Ist L ein von oben bedingt vollständiger Verband, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Verband L ist o-kompakt.*
2. *Jedes Element $a \in L$ ist kompakt* (Def. 2.1).
3. *Ist $A^* \neq \emptyset$ für $\emptyset \neq A \subseteqq L$, dann existiert eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$ derart, daß $\bigvee B = \bigvee A$.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. $a \in L$ sei beliebig. Gilt $a \leqq \bigvee A$ für eine Untermenge $A \subseteqq L$, dann gilt $A^* \neq \emptyset$ und offenbar $A^* = \{b : b \in L, b \geqq \bigvee A\}$. Der Voraussetzung gemäß existiert eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$ so, daß $A^* = B^*$. B ist endlich, deshalb existiert $\bigvee B$ und gilt $\bigvee B \in A^*$ Daraus ergibt sich $a \leqq \bigvee B$ und daher ist das Element a kompakt (2.1).

$2 \Rightarrow 3$. Es sei $A^* \neq \emptyset$ für $\emptyset \neq A \subseteqq L$. Der Verband L ist von oben bedingt vollständig, deshalb $\bigvee A$ existiert und $\bigvee A \in A^*$ gilt. Das Element $a = \bigvee A$ ist kompakt und offenbar gilt $a(= \bigvee A) \leqq \bigvee A$. Der Voraussetzung gemäß existiert eine endliche Untermenge $B \subseteqq A$

derartig, daß $a(= \bigvee A) \leqq \bigvee B$. Die umgekerhte Ungleichung ist offensichtlich, deshalb ist $\bigvee B = \bigvee A$.

$3 \Rightarrow 1$. Ist evident.

2.4. Hilfssatz. *L sei ein distributiver Verband mit den größten und kleinsten Elementen 1 und 0. Es sei $\bigcap\{x : x \in \mathfrak{U}(L)\} = 0$. Der topologische Raum $\mathfrak{U}(L)$ ist kompakt genau dann, wenn L ein Boolescher Verband ist.*

Beweis. [4], Teorema 2.

2.5. Satz. *Wenn B ein vollständiger Boolescher Verband ist, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Verband B ist endlich.*
2. *Der Verband B ist o-kompakt.*
3. $\mathfrak{M}[\mathfrak{U}(B)] = \mathfrak{N}[\mathfrak{U}(B)]$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Offenbar.

$2 \Rightarrow 3$. Wir zeigen, daß der Raum $\mathfrak{U}(B)$ diskret ist. Es sei $x \in \mathfrak{U}(B)$ ein beliebiges Element. Nach 1.6 ist $\{\mathfrak{U}a : a \in B\}$ die Basis für abgeschlossene Mengen, deshalb existiert eine Untermenge $\emptyset \neq A \subseteqq B$ derart, dass die abgeschlossene Hüle $\bar{x}$ gleich $\bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$ ist. Der Voraussetzung gemäß existiert $\bigvee A = b$. B ist o-kompakt, d. h. es gibt eine endliche Untermenge $\emptyset \neq A_1 \subseteqq A$ derart, daß $\bigvee A_1 = \bigvee A = b$ (2.3). Wir zeigen, daß $\bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a = \bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$ gilt. Offenbar $\bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a \subseteqq \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a$. Es sei nun $y \in \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a$. Daraus ergibt sich, daß $a \in y$ für alle $a \in A_1$. Die Menge A_1 ist endlich, deshalb $\bigvee A_1 = b \in y$. Für alle $a \in A$ ist $a \leqq b$, also $\mathfrak{U}b \subseteqq \mathfrak{U}a$ (1.5) und daher $\mathfrak{U}b \subseteqq \bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$. Daraus folgt $y \in \mathfrak{U}b \subseteqq \subseteqq \bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$, d. h. $\bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a \subseteqq \bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$. Es gilt also $\bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a = \bigcap_{a \in A} \mathfrak{U}a$. Daraus ergibt sich, daß $\bar{x} = \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{U}a$, wobei A_1 endlich ist. Die Menge $\mathfrak{U}a$ ist für alle $a \in B$ offen (1.2) und deshalb ist die Menge $\bar{x}$ als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von offenen Mengen auch offen. $\mathfrak{U}(B)$ ist ein Hausdorffscher Raum (1.2), daher ist $\bar{x} = x$ eine offene Menge und $\mathfrak{U}(B)$ ist diskret. Es ist evident, daß $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(B)] = \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(B)]$.

$3 \Rightarrow 1$. Der Raum $\mathfrak{U}(B)$ ist offensichtlich diskret. Es gibt ferner für jedes $a \in B$, $a \neq 0$, einen einfachen A. f. (= U. a. f.) y in B derart, daß $0 \in y$, $a \bar{\in} y$ (1.2). Daraus folgt $\bigcap\{x : x \in \mathfrak{U}(B)\} = 0$. Nach 2.4 ist $\mathfrak{U}(B)$ kompakt und daher endlich. Jeder U. a. f. in B ist ein Haupt-A. f. (1.8) und ist deshalb durch ein Dualatom in B erzeugt (1.7). B ist also ein dual-atomarer vollständiger Boolescher Verband mit endlicher Anzahl der Dualatome und daher endlich ([8], Satz 44).

2.6. Satz. *G sei eine l-Gruppe. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Verband Γ ist endlich.*
2. *Der Verband Γ ist o-kompakt.*
3. $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Gamma)] = \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(\Gamma)]$.
4. $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Pi')] = \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(\Pi')]$ *und* $\Pi = \Pi'$.

Beweis. Der Verband Γ aller Komponenten in G ist ein vollständiger Boolescher Verband (1.1). Die Äquivalenz der Bedingungen 1 bis 3 folg somit aus 2.5.

$2 \Rightarrow 4$. Der Verband Γ ist durch den Unterverband Π $\bigvee$-erzeugt (1.1). Für $K \in \Gamma$ ist also $K = \bigvee_{\Gamma, a \in K^+} a''$. Der Voraussetzung gemäß und nach 2.3 existiert eine endliche Untermenge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteqq K^+$ so, daß $K = \bigvee_{\Gamma\, i=1}^{n} a_i''$ gilt. Nach (1) in 1.1 ist $K = \bigvee_{\Gamma\, i=1}^{n} a_i'' = (\bigvee_{G\, i=1}^{n} a_i)''$, d. h. $K \in \Pi$. Daraus folgt $\Gamma \subseteqq \Pi$. Die umgekehrte Inklusion ist evident, also $\Pi = \Gamma$. $K \in \Gamma$ sei beliebig. Dann ist $K' \in \Pi$ und daher $K = K'' \in \Pi'$, d. h. $\Gamma \subseteqq \Pi'$. Die umgekehrte Inklusion ist ebenfalls evident und so erhalten wir zusammen $\Gamma = \Pi = \Pi'$. Der zweite Teil der Bedingung folgt aus 2.5.

$4 \Rightarrow 1$. Aus $\Pi = \Pi'$ folgt, daß $\mathfrak{U}(\Pi')$ kompakt ist ([4], Teorema 6). Gemäß 1.2 ist $\mathfrak{U}(\Pi')$ ein Hausdorffscher Raum. Aus der Voraussetzung $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Pi')] = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}(\Pi')]$ folgt, daß $\mathfrak{U}(\Pi')$ diskret ist. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{U}(\Pi')$ endlich ist. Nach [1], 4.10, ist der Verband Γ endlich.

2.7. Ist G eine l-Gruppe, dann nennen wir ein Element $a \in G$ *eine schwache Einheit*, wenn $a' = 0$ (= Null der Gruppe G) ist.

2.8. Satz. *G sei eine l-Gruppe. Ist der Verband G o-kompakt und ist die Summe aller von G verschiedenen Komponenten nicht gleich G, dann $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Pi')] = \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(\Pi')]$, d. h. der topologische Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist diskret.*

Beweis. $X \in \mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Pi')]$ wählen wir beliebig, doch so, daß $X \neq \emptyset$ ist. Die Mengen $\mathfrak{U}(\Pi')\backslash\mathfrak{U}a'$, $a \in G^+$, bilden im Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ eine Basis für die abgeschlossenen Mengen. Es gibt daher eine Menge $A = \{a_\iota : \iota \in J\} \subseteqq \subseteqq G^+$ derart, daß $X = \bigcap_{\iota \in J} [\mathfrak{U}(\Pi')\backslash\mathfrak{U}a_\iota']$. Wir zeigen indirekt, daß a_ι keine schwache Einheit in G für $\iota \in J$ bildet. Ist a_{ι_0} eine schwache Einheit in G für $\iota_0 \in J$, dann gilt $a_{\iota_0}' = 0$, daher gilt $a_{\iota_0}' \in x$ für jedes $x \in \mathfrak{U}(\Pi')$. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{U}(\Pi')\backslash\mathfrak{U}a'_{\iota_0} = \emptyset$ gilt, was im Widerspruch zur Voraussetzung $X \neq \emptyset$ steht. Nach [6], 7.19, existiert ein $a \in G$ derart, daß $a \geqq a_\iota$ für alle $\iota \in J$ gilt, d. h. $A^* \neq \emptyset$. Der Voraussetzung gemäß existiert eine endliche Untermenge $\emptyset \neq A_1 = \{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteqq A$ so, daß $A_1^* = A^*$ ist. Offensichtlich gilt $\bigcap_{\iota \in J} [\mathfrak{U}(\Pi')\backslash\mathfrak{U}a_\iota'] \subseteqq \bigcap_{i=1}^{n} [\mathfrak{U}(\Pi')\backslash\mathfrak{U}a_i']$. Wir zeigen, daß auch die umgekehrte Inklusion gilt. Es sei

$x \,\bar{\in} \bigcap_{\iota \in J} [\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_\iota]$. Dann existiert ein $\iota_0 \in J$ derart, daß $x \in \mathfrak{U} a'_{\iota_0}$ ist, d. h. $a'_{\iota_0} \in x$. Für ein beliebiges $a \in A^*$ gilt $a_{\iota_0} \leqq a$ und daher $a' \subseteqq a'_{\iota_0}$. Daraus folgt $a' \in x$. Setzen wir voraus, daß $x \in \bigcap_{i=1}^{n} [\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_i]$, dann $a'_i \,\bar{\in}\, x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Daraus folgt $\bigwedge_{i=1}^{n}{}_{\Gamma}\, a'_i \,\bar{\in}\, x$ (1.4). Es gilt $\bigvee_{i=1}^{n}{}_{G}\, a_i \in A_1^* = A^*$ und dabei gilt gemäß (2) in 1.1, daß $(\bigvee_{i=1}^{n}{}_{G}\, a_i)' = \bigwedge_{i=1}^{n}{}_{\Gamma}\, a'_i \,\bar{\in}\, x$, was im Widerspruch damit steht, daß $a' \in x$ für ein beliebiges $a \in A^*$ gilt. Daher ist $x \,\bar{\in} \bigcap_{i=1}^{n} [\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_i]$. Es gilt also $X = \bigcap_{\iota \in J} [\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_\iota] = \bigcap_{i=1}^{n} [\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_i]$. Jede Menge $\mathfrak{U}(\Pi') \backslash \mathfrak{U} a'_i$ ist auch offen, deshalb ist X offen und $X \in \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(\Pi')]$. Also $\mathfrak{N}[\mathfrak{U}(\Pi')] = \mathfrak{M}[\mathfrak{U}(\Pi')]$.

LITERATUR

[1] F. Fiala: Über einen gewissen Ultraantifilterraum, Math. Nachr. 33 (1967), 231—249.
[2] E. T. Schmidt: Über die Kogruenzverbände der Verbände, Public. Math. Debrecen 9 (1962), 243—256.
[3] Ф. Шик: К теории структурно упорядоченных групп, Czechoslovak Math. J. 6 (81), 1—25 (1956).
[4] F. Šik: Compacidad de ciertos espacios de ultraantifiltros, Mem. Fac. Cie. Univ. Habana 1, ser. mat., fasc. 1°, 19—25 (1963).
[5] F. Šik: Estructura y realizaciones de grupos reticulados I, II, Mem. Fac. Cie. Univ. Habana 1, ser. mat., fasc. 2° y 3°, 1—29 (1964).
[6] F. Šik: Struktur und Realisierungen von Verbandsgruppen III, Mem. Fac. Cie. Univ. Habana 1, ser. mat., fasc. 4° y 5°, 1—20 (1966).
[7] F. Šik: Archimedische kompakt erzeugte Verbandsgruppen, Math. Nachr. (im Druck).
[8] G. Szász: Einführung in die Verbandstheorie, Budapest 1962.