Bohumil Zástěra

Гомоморфное отображение между пространствами функций

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 3, 139--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104638`

ГОМОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ ФУНКЦИЙ

Bohumil Zástěra (Vyškov u Brna)

Поступило в редакцию 5-ого июня 1967 г.

1 ПРЕДИСЛОВИЕ

В статье: M. Novotný, J. Eichler: Über Funktionale geordneter Mengen, Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně BRNO, № 432, 133—146, 1962 исследованы свойства изоморфизмов между пространствами всех регулярных функций. Регулярной функцией считается всякая функция, выражаемая в виде разности двух изотонных функций. Главным результатом этой статьи является теорема:

Пусть G, H упорядоченные множества, Φ отображение множества $R(H)$ всех регулярных функций на множестве H на множество $R(G)$ всех регулярных функций на множестве G. Отображение Φ является изоморфизмом множества $R(H)$ на множество $R(G)$ тогда и только тогда, существует ли такое простое отображение φ множества G на множество H, что для любово $f \in R(H)$ и для всех $x \in G$ выполняется равенство

$$[\Phi(f)]\,(x) = f[\varphi(x)].$$

Изоморфизм здесь определен как простое отображение, которое одновременно группоидным изоморфизмом в отношении к операции произведения, векторовым изоморфизмом в отношении к операциям сложения и умножения на действительную константу и изоморфизмом в отношении к упорядочению.

В нашей статье мы будем пространством считать любое множество функций замкнутое в отношении к операциям сложения, произведения и умножения на действительное число. Операции определяем естественным образом; их точное определение будет приведено во втором абзаце.

Пусть $R(G)$, $R(H)$ любые пространства функций определенных на множествах G, H. Гомоморфизмом будем считать всякое отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$, которое одновременно является гомоморфизмом группоидным векторовым и полным в отношении к упорядочению. Упорядочение пространств $R(G)$, $R(H)$ определяем опять естественным способом.

Будем исследовать следующую проблему:

Пусть φ любое отображение множества G в множество H. Пусть равенство

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)] \tag{1}$$

определяет отображение Φ пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$. Какие свойства принадлежают этому отображению?

Эта проблема решается в главной теореме А, в которой и указывается, что Φ гомоморфизм.

Дальнейшей проблемой является вопрос, существует ли для любого гомоморфного отображения Φ пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$ такое отображение φ множества G в множество H, что выполняется равенство (1).

Эта проблема решается в главной теореме Б. В дальнейших абзацах приведены некоторые другие свойства Φ и исследуется вопрос, в каких условиях превращается в изоморфизм.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть G множество. *Действительной функцией* (в дальнейшем короче *функцией*) будем считать всякое отображение множества G в множество E всех действительных чисел. Множество всех функций на множестве G обозначим $F(G)$.

Пусть f, g любые функции из множества $F(G)$. В множестве $F(G)$ определяем операции *сложения*, *произведения* и *умножения на действительное число* следующими формулами:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для любого} \quad x \in G,$$
$$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x) \quad \text{для любого} \quad x \in G,$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha \,.\, f(x) \quad \text{для любого} \quad x \in G, \ \alpha \in E.$$

Множество функций замкнутое в отношении ко всем этим операциям будем называть *пространством*. Напр. множество $F(G)$ является пространством.

Между элементами пространства $F(G)$ определяем упорядочение. Для любых функций f, g из пространства $F(G)$ выполняется $f \leqq g$ тогда, если для всех $x \in G$ выполняется неравенство $f(x) \leqq g(x)$.

В дальнейшем пусть N подмножество в $F(G)$. Положим для любого $x \in G$

$$f_0(x) = \inf_{f \in N} \{f(x)\}, \quad g_0(x) = \sup_{f \in N} \{f(x)\}.$$

Если $f_0(x)$ или-же $g_0(x)$ является для всех $x \in G$ конечным действительным числом (выполняется $f_0 \in F(G)$ или-же $g_0 \in F(G)$), в таком случае функцию f_0 или-же g_0 называем *точная нижняя грань* или-же *точная верхняя грань* и будем писать

$$f_0 = \inf_{f \in N} \{f\} \quad \text{или-же} \quad g_0 = \sup_{f \in N} \{f\}.$$

Функцию, набывающую для всех $x \in G$ нулевое значение, будем называть *нуль-функцией* и обозначать o_G.

В дальнейшем пусть $x_0 \in G$, $\alpha \in E$ Положим

$$f^G_{x_0,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \neq x_0, \ x \in G \\ \alpha & \text{если} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Обозначением $f^G_{x_0,\alpha}$ функции этого типа мы будем пользоваться во всех дальнейших соображениях.

Лемма 1. *Пусть f любая функция из пространства $F(G)$, для которой выполняется неравенство $f \geqq o_G$. Тогда*

$$f = \sup_{x \in G} \{f(x) \,.\, f^G_{x,1}\}.$$

Доказательство в статье M. Novotný, J. Eichler: Über Funktionale geordneter Mengen.

Лемма 2. *Пусть $Z(G)$ множество всех функций $f \in F(G)$ вида*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in A, \text{ где } A \subseteq G, \\ 0 & \text{если } x \in G - A. \end{cases}$$

В таком случае для любой функции $f \in F(G)$ выполняется равенство $f^2 = f$ тогда и только тогда, если $f \in Z(G)$.

Доказательство в статье M. Novotný, J. Eichler: Über Funktionale geordneter Mengen.

Примечание

Если $A = O$, тогда $f(x) = 0$ для всех $x \in G$ и из того следует, что $o_G \in Z(G)$. Множество $Z(G)$ является множеством всех идемпотентных функций в отношении к операции произведения.

Из определения следует, что для любого $x \in G$ имеет силу $f^G_{x.1} \in Z(G)$. Обозначение $Z(G)$ множества всех идемпотентных функций определенных на множестве G сохраняем для всех дальнейших соображений.

3. ГОМОМОРФИЗМ

Пусть G, H множества; $R(G)$, $R(H)$ любые пространства функций, определенных на соответствующих множествах. Отображение Φ пространства функций $R(H)$ в пространство $R(G)$ будем называть гомоморфизмом, если Φ является:

1. *Полным гомоморфизмом в отношении к упорядочению;* т. е. для $N \subseteq R(H)$ имеют силу следующие выражения:

а) Если существует $\inf\limits_{f \in N} \{f\} \in R(H)$, тогда существует

$$\inf_{f \in N} \{\Phi(f)\} \in R(G)$$

и выполняется равенство

$$\Phi(\inf_{f \in N} \{f\}) = \inf_{f \in N} \{\Phi(f)\}.$$

б) Если существует $\sup\limits_{f \in N} \{f\} \in R(H)$, тогда существует $\sup\limits_{f \in N} \{\Phi(f)\} \in R(G)$ и выполянется равенство

$$\Phi(\sup_{f \in N} \{f\}) = \sup_{f \in N} \{\Phi(f)\}.$$

2. *Группоидным гомоморфизмом* в отношении к операции произведения, значит для любых функций f_1, $f_2 \in R(H)$ имеет силу формула

$$\Phi(f_1 f_2) = \Phi(f_1) \,.\, \Phi(f_2).$$

3. *Векторовым гомоморфизмом* т. е. для любых функций $f_1, f_2 \in R(H)$ и для любого $\alpha \in E$ выполняются равенства

а) $$\Phi(f_1 + f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2),$$

б) $$\Phi(\alpha f_1) = \alpha \Phi(f_1).$$

Теперь мы приведем две леммы, сила которых очевидна и которых не нужно доказывать.

Лемма 3. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H и Φ гомоморфное отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$. В дальнейшем пусть o_G, o_H нуль-*

функции на соответствующих множествах. Тогда имеют силу формулы

$$o_G \in R(G),\ o_H \in R(H),\ \Phi(o_H) = o_G.$$

Лемма 4. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H; Φ гомоморфное отображение $R(H)$ в $R(G)$. Пусть $f \in R(H)$ функция из множества $Z(H)$. Тогда имеет силу $\Phi(f) \in Z(G)$.*

Лемма 5. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ обозначают пространства функций на множествах G, H и пусть Φ обозначает векторовый гомоморфизм, изображающий $R(H)$ в $R(G)$. В дальнейшем пусть для любого множества $N \subseteq R(G)$, для которого выполняется $\sup\limits_{f \in N} \{f\} \in R(H)$, имеет силу формула*

$$\Phi\,(\sup_{f \in N} \{f\}) = \sup_{f \in N} \{\Phi(f)\}.$$

В таком случае Φ является полным гомоморфизмом в отношении к упорядочению.

Доказательство: Нам доказать, что из предположений нашей леммы для любого подмножества N в $R(H)$ следует выражение:

Если существует $\inf\limits_{f \in N} \{f\} \in R(H)$, тогда выполняется равенство

$$\Phi(\inf_{f \in N} \{f\}) = \inf_{f \in N} \{\Phi(f)\}$$

Пусть $N_0 \subseteq R(H)$ такое множество, что существует

$$\inf_{f \in N_0} \{f\} \in R(H)$$

Очевидно выполняется формула

$$\inf_{f \in N_0} \{f\} = -\sup_{f \in N_0} \{-f\};$$

обозначим $f_0 = \inf\limits_{f \in N_0} \{f\}$. Так как Φ векторовый гомоморфизм, справедливо равенство

$$\Phi(f_0) = -\Phi(\sup_{f \in N_0} \{-f\}).$$

По предположениям леммы соблюдает отображение Φ точную верхнюю грань и из того

$$\Phi(f_0) = -\sup_{f \in N_0} \{\Phi(-f)\} = -\sup_{f \in N_0} \{-\Phi(f)\}.$$

Так как опять справедлива формула

$$\inf_{f \in N_0} \{\Phi(f)\} = -\sup_{f \in N_0} \{-\Phi(f)\},$$

выполняется равенство

$$\Phi(\inf_{f \in N_0} \{f\}) = \inf_{f \in N_9} \{\Phi(f)\},$$

которое требовалось доказать.

Прежде того, чем мы выскажем теорему, введем следующие понятия.

Пусть $R(H)$ любое пространство функций на множестве H. Пусть $\{f_\nu\}_{\nu<\alpha}$ любая трансфинитная последовательность функций из пространства $R(H)$, где α любое ординальное число. Пусть $\limsup\limits_{\nu\to\alpha} f_\nu$, $\liminf\limits_{\nu\to\alpha} f_\nu$ являются символами определенными формулами

$$\limsup_{\nu\to\alpha} f_\nu = \inf_{\beta<\alpha} \{\sup_{\beta<\nu<\alpha} \{f_\nu\}\},$$

$$\liminf_{\nu\to\alpha} f_\nu = \sup_{\beta<\alpha} \{\inf_{\beta<\nu<\alpha} \{f_\nu\}\}.$$

В таком случае справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ любые пространства функций на множествах G, H и пусть мощность пространства $R(H)$ $\aleph_i$. Обозначим через Φ отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$.*

Тогда следующие выражения эквивалентны:

(А) Φ является полным гомоморфизмом в отношении к упорядочению.

(Б) Для любой трансфинитной последовательности $\{f_\nu\}_{\nu<\alpha}$ функций f_ν из пространства $R(H)$ $(\alpha < \omega_{i+1})$, выполняющей условия

$$\limsup_{\nu\to\alpha} f_\nu \in R(H), \qquad \liminf_{\nu\to\alpha} f_\nu \in R(H),$$

$$\sup_{\beta<\nu<\alpha} \{f_\nu\} \in R(H), \qquad \inf_{\beta<\nu<\alpha} \{f_\nu\} \in R(H)$$

для всех $\beta < \alpha$, справедливы равенства

$$\Phi(\limsup_{\nu\to\alpha} f_\nu) = \limsup_{\nu\to\alpha} \Phi(f_\nu), \tag{2}$$

$$\Phi(\liminf_{\nu\to\alpha} f_\nu) = \liminf_{\nu\to\alpha} \Phi(f_\nu). \tag{3}$$

Доказательство:

1. Предполагаем, что выполнеятся выражение (А). Пусть $\lim\limits_{\nu\to\alpha} \sup f_\nu \in R(H)$. Тогда имеет силу равенство

$$\Phi(\inf_{\beta<\alpha}\{\sup_{\beta<\nu<\alpha}\{f_\nu\}\}) = \inf_{\beta<\alpha}\{\Phi(\sup_{\beta<\nu<\alpha}\{f_\nu\})\} = \inf_{\beta<\alpha}\{\sup_{\beta<\nu<\alpha}\{\Phi(f_\nu)\}\}$$

при предположении, что $\sup\limits_{\beta<\nu<\alpha}\{f_\nu\} \in R(H)$ для всех $\beta < \alpha$. После заменения прямо получаем формулу (2). Аналогически доказывается формула (3).

2. Пусть выполняется выражение (Б). Пусть M множество функций из пространства $R(H)$ такое, что $\sup\limits_{f\in M}\{f\} \in R(H)$. Если M является множеством мощности $a \leqq \aleph_i$, тогда его возможно вполне упорядочить в последовательность ординального типа $\alpha \leqq \omega_{i+1}$ вида $\{f_\nu\}_{\nu<\alpha}$. Прежде того, чем мы будем продолжать в своих соображениях, наприпомним здесь об одном хорошо знакомом свойстве ординальных чисел.

Пусть ϑ, μ, ν ординальные числа и пусть $\vartheta < \mu\,.\,\nu$. Тогда существуют ординальные числа ξ, η, $\xi < \nu$, $\eta < \vartheta$ такие, что $\vartheta = \mu\,.\,\xi + \eta$.

Образуем последовательность $\{\tilde{f}_\mu\}_{\mu<\alpha\cdot\omega}$ типа $\alpha\,.\,\omega < \omega_{i+1}$ следующим образом. Для любого ординального числа $\mu_0 < \alpha\,.\,\omega$, которое возможно однозначно выразить в виде $\mu_0 = \alpha\,.\,\xi + \eta$, где $\xi < \omega$, $\eta < \mu_0$, положим $\tilde{f}_{\mu_0} = \tilde{f}_{\alpha\xi+\eta} = f_\eta$. После любого индекса μ_0 находятся все челны последовательности $\{f_\nu\}_{\nu<\alpha}$ и другие функции в последовательности $\{\tilde{f}_\mu\}_{\mu<\alpha\cdot\omega}$ не существуют. В таком случае имеет силу равенство

$$\sup_{\mu_0<\mu<\alpha\omega}\{\tilde{f}_\mu\} = \sup_{\nu<\alpha}\{f_\nu\} = \sup_{f\in M}\{f\}$$

и ясно, что

$$\inf_{\mu_0<\alpha\cdot\omega}\{\sup_{\mu_0<\mu<\alpha\cdot\omega}\{\tilde{f}_\mu\}\} = \sup_{f\in M}\{f\}.$$

В таком случае выполняется равенство

$$\Phi(\sup_{f\in M}\{f\}) = \Phi(\lim_{\mu\to\alpha\cdot\omega}\sup \tilde{f}_\mu) = \lim_{\mu\to\alpha\cdot\omega}\sup \Phi(\tilde{f}_\mu).$$

Ясно, что для последовательности $\{\Phi(\tilde{f}_\mu)\}_{\mu<\alpha\cdot\omega}$ выполняется аналоническое равенство

$$\inf_{\mu_0<\alpha\cdot\omega}\{\sup_{\mu_0<\mu<\alpha\cdot\omega}\{\Phi(\tilde{f}_\mu)\}\} = \sup_{f\in M}\Phi(f)$$

и затем

$$\lim_{\mu\to\alpha\cdot\omega}\sup\Phi(\tilde{f}_\mu) = \sup_{f\in M}\{\Phi(f)\}.$$

Имеет силу формула

$$\Phi(\sup_{f\in M}\{f\}) = \sup_{f\in M}\{\Phi(f)\}.$$

Если $\inf\limits_{f\in M}\{f\}\in R(H)$, тогда выполняется формула

$$\Phi(\inf_{f\in M}\{f\}) = \inf_{f\in M}\{\Phi(f)\},$$

которая докажется аналогически.

Из того следует, что выполняется выражение (A).

4. ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА A

Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H. Пусть φ такое отображение множества G в множество H, что при помощи равенства

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)], \tag{1}$$

имеющего силу для всех $x\in G$, $f\in R(H)$, определяется отображение Φ пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$. Тогда отображение Φ является гомоморфизмом.

Доказательство: Во первых мы докажем, что отображение Φ сохраняет операцию сложение. Пусть f_1, f_2 любые функции из пространства $R(H)$. По формуле (1) для всех $x\in G$ выполняется

$$[\Phi(f_1+f_2)](x) = (f_1+f_2)[\varphi(x)] = f_1[\varphi(x)] + f_2[\varphi(x)] = \\ = [\Phi(f_1)](x) + [\Phi(f_2)](x).$$

Из того следует

$$\Phi(f_1+f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2).$$

Аналогически доказываются для любых f_1, $f_2\in R(H)$ формулы

$$\Phi(f_1 . f_2) = \Phi(f_1) . \Phi(f_2),$$
$$\Phi(\alpha . f_1) = \alpha . \Phi(f_1) \qquad (\alpha\in E).$$

Остается доказать, что Φ является полным гомоморфизмом в отношении к упорядочению.

Пусть $N\subseteq R(H)$ обозначает такое множество функций, что $\sup\limits_{f\in N}\{f\}\in R(H)$. Положим $f_0 = \sup\limits_{f\in N}\{f\}$. Для любого $y\in H$ справедливо равенство $\sup_{f\in N}\{f(y)\} = f_0(y)$ и для любого $x\in G$ можем писать

$$[\Phi(f_0)](x) = f_0[\varphi(x)] = \sup_{f\in N}\{f[\varphi(x)]\} = \sup_{f\in N}\{[\Phi(f)](x)\}.$$

Из того следует

$$\Phi(f_0) = \Phi(\sup_{f\in N}\{f\}) = \sup_{f\in N}\{\Phi(f)\}.$$

Так как Φ векторовый гомоморфизм, по лемме 5 является и полным гомоморфизмом в отношении к упорядочению и теорема справедлива.

Лемма 6. *Пусть выполняются предположения главной теоре мы A. Пусть $R_0(G) = \{g/g = \Phi(f),\ f\in R(H)\}$. Тогда $R_0(G)$ подпространство пространства $R(G)$.*

Примечание. Сила леммы 6 следует непосредственно из свойств гомоморфизма Φ. В дальнейших соображениях, как правило, ограничимся на предположение, что пространство $R(G)$ является множеством всех образов функций из пространства $R(H)$ при гомоморфном отображении Φ, значит Φ отображает пространство $R(H)$ на пространство $R(G)$.

Следствие теоремы A.

Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H. Пусть φ отображение множества G в множество H. Определим на множестве G разложение

$$\overline{G} = \{\overline{x}/x_1,\ x_2\in\overline{x} \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2);\ x_1,\ x_2\in G\}.$$

Пусть равенство

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)]$$

справедливое для всех $x\in G$, $f\in R(H)$ определяет отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$. Пусть x_1, $x_2\in\overline{x}$, где $\overline{x}$ любой класс разложения $\overline{G}$.

Тогда для любой функции g пространства $R(G)$ выполняется

$$g(x_1) = g(x_2).$$

Доказательство: Путсь $g\in R(G)$. Так как Φ отображает пространство $R(H)$ на пространство $R(G)$, существует функция $f\in R(H)$ такая, что $g = \Phi(f)$. Пусть x_1, $x_2\in\overline{x}$, $\overline{x}\in\overline{G}$. По формуле (1) можем писать

$$g(x_1) = [\Phi(f)](x_1) = f[\varphi(x_1)] = f[\varphi(x_2)] = \\ = [\Phi(f)](x_2) = g(x_2).$$

5. ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА Б

В существующих соображениях мы рассматривали свойства отображения Φ пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$ определенное при помощи отображения φ множества G в множество H формулой

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)]. \tag{1}$$

Теперь положим себе вопрос, если для любого гомоморфного отображения Φ пространства функций $R(H)$ на пространство функций $R(G)$ существует отображение φ множества G в множество H такое, что выполняется формула (1) для любого $f \in R(H)$, $x \in G$. Этот вопрос мы будем решить в следующих соображениях. Мы будем постоянно предполагать, что для всех $y \in H$ имеет силу $f^H_{y,1} \in R(H)$.

Лемма 7. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H и пусть для любого $y \in H$ имеет силу $f^H_{y,1} \in R(H)$. В дальнейшем пусть Φ обозначает отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$. Положим $g = \Phi(f^H_{y,1})$ для любово $y \in H$. Тогда g является идемпотентной фуныцией на множстее G.*

Доказательство: Справедливость леммы 7 следует непосредственно из леммы 4, так как выполняется $f^H_{y,1} \in Z(H)$.

Примечание. По лемме 7 возможно к всякому $y \in H$ присоединить при помощи функции $f^H_{y,1}$ множество $N \subseteq G$ такое, что

$$[\Phi(f^H_{y,1})](x) = 1$$

тогда и только тогда, если $x \in N$. Такое множество будем во всех следующих соображениях обозначать $N(y)$.

Лемма 8. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H и пусть для всякого $y \in H$ выполняется $f^H_{y,1} \in R(H)$. Пусть Φ гомоморфное отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$. Тогда для любых элементов $y_1, y_2 \in H$, $y_1 \neq y_2$ выполняется, что множества $N(y_1)$, $N(y_2)$ взаимно не пересекающие.*

Доказательство: Видно, что для $y_1, y_2 \in H, y_1 \neq y_2$ выполняется

$$f^H_{y_1,1} \cdot f^H_{y_2,1} = o_H, \tag{4}$$

где o_H нуль-функция на H. Предположим, что

$$N(y_1) \cap N(y_2) \neq 0.$$

Из того следует, что существует $x_0 \in N(y_1) \cap N(y_2)$, для которого справедливы равенства

$$[\Phi(f^H_{y_1,1})](x_0) = 1, \ [\Phi(f^H_{y_2,1})](x_0) = 1.$$

Так как гомоморфизм Φ сохраняет операцию произведения, возможно писать

$$[\Phi(f^H_{y_1,1} \cdot f^H_{y_2,1})](x_0) = [\Phi(f^H_{y_1,1})](x_0) \cdot [\Phi(f^H_{y_2,1})](x_0) = 1.$$

Но из формулы (4) следует

$$[\Phi(f^H_{y_1,1} \cdot f^H_{y_2,1})](x) = [\Phi(o_H)](x) = o_G(x) = 0$$

для всех $x \in G$. Мы получили противоречие и значит

$$N(y_1) \cap N(y_2) = 0.$$

Лемма 9. *Пусть $R(G)$, $R(H)$, Φ выполняют предположения леммы 8. Пусть существует функция $f \in R(H)$ такая, что $[\Phi(f)](x_0) \neq 0$. Тогда существует $y_0 \in H$ такое, что $x_0 \in N(y_0)$.*

Доказательство: Так как Φ сохраняет операцию произведения, имеет силу $\Phi(f^2) = [\Phi(f)]^2$ и видно, что $[\Phi(f^2)](x_0) \neq 0$ лишь тогда, если $[\Phi(f)](x)_0 \neq 0$. Пусть $o_H \in R(H)$ нуль-функция. По лемме 1 выполняется

$$f^2 = \sup_{y \in H} \{f^2(y) \cdot f^H_{y,1}\}$$

и современно $f^2 \geqq o_H$. Так как Φ полный гомоморфизм в отношении к упорядочению, возможно писать

$$\Phi(f^2) = \sup_{y \in H} \{f^2(y) \cdot \Phi(f^H_{y,1})\}.$$

По предположениям леммы $[\Phi(f^2)](x_0) \neq 0$. Из неравенства $f^2 \leqq o_H$ следует неравенство $\Phi(f^2) \geqq o_G$ и имеет силу

$$[\Phi(f^2)](x_0) = \sup_{y \in H} \{f^2(y) \cdot [\Phi(f^H_{y,1})](x_0)\} \geqq 0.$$

Если бы для всех $y \in H$ выполнялось равенство $[\Phi(f^H_{y,1})](x_0) = 0$, тогда бы, видимо, выполнялось современно равенство

$$\sup_{y \in H} \{f^2(y) \cdot [\Phi(f^H_{y,1})](x_0)\} = 0.$$

Из того следует, что существует $y_0 \in H$ такое, что $[\Phi(f^H_{y_0,1})](x_0) = 1$ и $x_0 \in N(y_0)$.

Следствие. *Пусть* $G_0 = \bigcup\limits_{y \in H} N(y)$. *Тогда для любых* $x \in G - G_0$, $f \in R(H)$ *справедливо равенство* $[\Phi(f)](x) = 0$.

Лемма 10. *Для любой функции* f *на множестве* H *и любого элемента* $y_0 \in H$ *справедлива формула* $f \cdot f^H_{y_0,1} = f(y_0) \cdot f^H_{y_0,1}$

Главная теорема Б. *Пусть* $R(G)$, $R(H)$ *пространства функций на множествах* G, H *и пусть* $f^H_{y,1} \in R(H)$ *для всех* $y \in H$. *Пусть* Φ *гомоморфное отображение пространства* $R(H)$ *на пространство* $R(G)$. *Положим* $G_0 = \bigcup\limits_{y \in H} N(y)$. *Определим отображение* φ *множества* G_0 *в множество* H *следующим образом:*

Равенство $y = \varphi(x)$ *выполняется в том случае, если* $x \in N(y)$. *Тогда для любой функции* $f \in R(H)$ *выполняются формулы:*

1. $[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)]$ *для всех* $x \in G_0$,
2. $[\Phi(f)](x) = 0$ *для всех* $x \in G - G_0$.

Доказательство: Однозначнотсь отображения φ непосредственно следует из леммы 8. Равенство $[\Phi(f)](x) = 0$, имеющее силу для всех $x \in G - G_0$, приведено уже в следствии леммы 8. Остается доказать равенство $[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)]$ для всех $x \in G_0$. Пусть x любой элемент из множества G_0. Существует $y \in H$ такое, что $x \in N(y)$ и значит $y = \varphi(x)$. Из того следует равенство

$$[\Phi(f^H_{y,1})](x) = 1.$$

Если $f \in R(H)$ любая функция, тогда имеет силу

$$[\Phi(f)](x) = [\Phi(f)](x) \cdot [\Phi(f^H_{y,1})](x) = [\Phi(f \cdot f^H_{y,1})](x).$$

Заменением по лемме 10 получим формулу

$$[\Phi(f)](x) = [\Phi(f(y) \cdot f^H_{y,1})](x).$$

Так как Φ сохраняет операцию умножения действительным числом, возможно последнюю формулу привести в вид

$$[\Phi(f)](x) = f(y) \cdot [\Phi(f^H_{y,1})](x) = f(y).$$

Так как $y = \varphi(x)$, заменением получим равенство

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)],$$

что требовалось доказать.

Следствие. *Пусть* $R(G)$, $R(H)$ *пространства функций на множествах* G, H *и пусть* $f^H_{y,1} \in R(H)$ *для всех* $y \in H$. *Пусть* Φ *гомо-*

морфное отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$. Если $y_0 \in H$; $x_1, x_2 \in N(y_0)$, тогда для любой функции $f \in R(H)$ справедливо равенство

$$[\Phi(f)](x_1) = [\Phi(f)](x_2).$$

Доказательство: Положим $G_0 = \bigcup_{y \in H} N(y)$. Из того следует, что $x_1, x_2 \in G_0$ и $y_0 = \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, где φ отображение, определенное в теореме Б. По этой теореме видимо выполняется

$$[\Phi(f)](x_1) = f[\varphi(x_1)] = f[\varphi(x_2)] = [\Phi(f)](x_2).$$

6. ИЗОМОРФИЗМ

Если гомоморфное отображение Φ пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$ одно-однозначное и обратное отображение Φ^{-1} пространства $R(G)$ на пространство $R(H)$ тоже гомоморфное, тогда отображение Φ зовем изоморфизмом.

Лемма 11. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H. Пусть φ отображение множества G на множество H. Пусть формула*

$$(1) \qquad [\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)],$$

имеющая силу для всех $x \in G$, $f \in R(H)$, определяет отображение Φ пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$.

Тогда отображение Φ одно-однозначное.

Доказательство: Изоберем любые функции $f_1, f_2 \in R(H)$; $f_1 \neq f_2$. Тогда существует $y_0 \in H$ такое, что $f_1(y_0) \neq f_2(y_0)$. Так как φ отображает G на H, существует $x_0 \in G$, для которого выполняется $y_0 = \varphi(x_0)$ и следует $f_1[\varphi(x_0)] \neq f_2[\varphi(x_0)]$. Заменением по формуле (1) получим

$$[\Phi(f_1)](x_0) \neq [\Phi(f_2)](x_0).$$

Это значит, что $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$ и отображение Φ одно-однозначно.

Теорема 2. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H. Пусть φ отображает множество G на множество H. В дальнейшем пусть формула*

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)],$$

которая выполняется для всех $x \in G$, $f \in R(H)$, определяет отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$.

Тогда это отображение Φ является изоморфизмом.

Доказательство: По главной теореме А Φ гомоморфизм и по лемме 11 Φ одноодпозначно. Остается доказать, что обратное отображение Φ^{-1} также гомоморфизм. Ясно, что Φ^{-1} сохраняет все три операции пространства функций. Докажем, что Φ^{-1} полный гомоморфизм в отношении к упорядочению.

Пусть $N \subseteq R(G)$, $\sup\limits_{g \in N} \{g\} \in R(G)$. Положим

$$g_0 = \sup_{g \in N} \{g\}, \quad f_0 = \Phi^{-1}(g_0). \tag{5}$$

Докажем, что для множества $M = \{f / f = \Phi^{-1}(g),\ g \in N\}$ выполняется

$$f_0 = \sup_{f \in M} \{f\}.$$

Так как $g_0 = \Phi(f_0)$, возможно для любого $x \in G$ писать

$$g_0(x) = [\Phi(f_0)]\,(x) = f_0[\varphi(x)].$$

Одновременно для всех $x \in G$ имеет силу

$$g_0(x) = \sup_{g \in N} \{g(x)\} = \sup_{f \in M} \{[\Phi(f)]\,(x)\} = \sup_{f \in M} \{f[\varphi(x)].$$

Из того следует, что для всех $x \in G$ справедливо равенство

$$f_0[\varphi(x)] = \sup_{f \in M} \{f[\varphi(x)]\}.$$

Так как φ есть отображение множества G на множество H, значит, к любому $y \in H$ существует $x \in G$ такое, что $\varphi(x) = y$ и для любого $y \in H$ выполняется

$$f_0(y) = \sup_{f \in M} \{f(y)\}.$$

Из того следует сила равенства

$$f_0 = \sup_{f \in M} \{f\}$$

и после заменения по формулам (5) получим

$$\Phi^{-1}(g_0) = \Phi^{-1}(\sup_{g \in N} \{g\}) = \sup_{g \in N} \{\Phi^{-1}(g)\}.$$

Значит, отображение Φ^{-1} сохраняет точную верхнюю грань. В виду того, что Φ^{-1} современно векторный гомоморфизм, это отображение по лемме 5 полный гомоморфизм в отношении к упорядочению.

Теорема 3. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства функций на множествах G, H и пусть $f^H_{y,1} \in R(H)$ для всех $y \in H$. В дальнейшем пусть Φ гомоморфное отображение пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$. Если для всех $y \in H$ множество $N(y)$ не пусто, тогда отображение Φ изоморфизм.*

Доказательство: Положим $G_0 = \bigcup_{y \in H} N(y)$. Пусть φ отображение множества G_0 в множество H определенное в предположениях главной теоремы Б. Так как $N(y)$ всегда не пустое множество, итак существует для любого $y \in H$ такое $x \in G$, что $x \in N(y)$, то есть $y = \varphi(x)$. Из того следует, что φ отображает множество G_0 на множество H. Определим пространство функций $R(G_0)$ на множестве G_0 следующим образом. Функция $\tilde{g}$ приналдежает пространству $R(G_0)$ в том случае, если существует функция $g \in R(G)$ такая, что $\tilde{g}(x) = g(x)$ для всех $x \in G_0$. Так как $g(x) = 0$ для всех $x \in G - G_0$ (смотри следствие леммы 9), существует ко всякой функции $\tilde{g} \in R(G_0)$ только одна функция $g \in R(G)$ такая, что $\tilde{g}(x) = g(x)$ для всех $x \in G_0$. Ясно, что это присоединение определяет отображение $R(G_0)$ на $R(G)$, которое является изоморфизмом. Существует гомоморфное отображение $\tilde{\Phi}$, отображающее $R(H)$ на $R(G_0)$ такое, что для любого $x \in G_0$ выполняется

$$[\tilde{\Phi}(f)](x) = [\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)].$$

Отображение φ множества G_0 на множество H определяет равенством

$$[\tilde{\Phi}(f)](x) = f[\varphi(x)]$$

отображение $\tilde{\Phi}$ пространства $R(H)$ на пространство $R(G_0)$ и значит, по теореме 2 $\tilde{\Phi}$ является изоморфизмом. Отображение Φ является изоморфизмом, потому что оно является суперпозицией двух изоморфизмов.

Примечание. Предположение, что $N(y) \neq 0$ для всех $y \in H$ возможно заменить эквивалентным предположением, что $\Phi(f^H_{y,1}) \neq o_G$ для всех $y \in H$.

7. ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ НА УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Во всех наших предположениях мы предполагали, что при помощи отображения φ множества G в множество H формулой

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)], \tag{1}$$

имеющей силу для всех $f \in R(H)$, $x \in G$, определяется отображение Φ пространства $R(H)$ на пространство (или в пространство) $R(G)$. Теперь приведем пример пространств функций, когда возможно постановить достаточные условия для отображения φ множества G в множество H таким образом, что формула (1) прямо определяет отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$.

Предположим, что G, H упорядоченные множества. Мы скажем, что функция f определенная на множестве H *изотонная*, если для любых $y_1, y_2 \in H$, $y_1 \leqq y_2$ справедливо неравенство $f(y_1) \leqq f(y_2)$. Аналогично определяется изотонная функция на множестве G.

Лемма 12. *Множество всех функций определенных на множестве G, выражаемых в виде разности двух изотонных функций образует пространство.*

Лемму 12 не будем доказывать. Замкнутость приведенного пространства функций в отношении к всем соответствующим операциям не трудно удостоверяется.

Теорема 4. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства всех функций выражаемых в виде разности двух изотонных функций, определенных на упорядоченных множествах G, H. Пусть φ является изотонным отображением множества G в множество H. Тогда формула*

$$(1) \qquad [\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)],$$

справедливая для всех $f \in R(H)$, $x \in G$ определяет гомоморфное отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$.

Доказательство: Возьмем функцию $f \in R(H)$; возможно писать $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 изотонные функции на множестве H. Видно, что $f_1, f_2 \in R(H)$, $\Phi(f) = \Phi(f_1) - \Phi(f_2)$. Докажем, что функции $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$ изотонные. Пусть $x_1, x_2 \in G$ $x_1 \leqq x_2$. Так как φ изотонное отображение, выполняется $\varphi(x_1) \leqq \varphi(x_2)$ и так как f_1, f_2 изотонные функции, справедливы неравенства

$$f_1[\varphi(x)] \leqq f_1[\varphi(x_2)].$$
$$f_2[\varphi(x_1)] \leqq f_2[\varphi(x_2)].$$

Если мы заменим по формуле (1), получим неравенства

$$[\Phi(f_1)](x_1) \leqq [\Phi(f_1)](x_2),$$
$$[\Phi(f_2)](x_1) \leqq [\Phi(f_2)](x_2).$$

Так как элементы x_1, $x_2 \in G$, $x_1 \leqq x_2$ избраны произвольно, значит функции $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$ изотонные. Итак образ $\Phi(f)$ любой функции $f \in R(H)$ выражаемый в виде разности двух изотонных функций и значит, выполняется $\Phi(f) \in R(G)$.

Формула (1) определяет отображение пространства $R(H)$ в пространство $R(G)$ и по теореме А Φ есть гомоморфизм.

Примечание: Обратное утверждение, что к любому гомоморфному отображению Φ $R(H)$ в $R(G)$ существует изотонное отображение G в H такое, что выполняется формула (1), не справедливо. (Смотри соответствующий пример в статье M. Novotný, J. Eichler: Über Funktionale geordneter Mengen.)

Теорема 5. *Пусть $R(G)$, $R(H)$ пространства всех функций, выражаемых в виде разности двух изотонных функций на множествах G, H. Тогда к любому гомоморфному отображению Φ пространства $R(H)$ на пространство $R(G)$ существует отображение φ множества G в множество H такое, что выполняется равенство*

$$[\Phi(f)](x) = f[\varphi(x)]. \tag{1}$$

Доказательство: Не трудно удостоверяется, что $f^H_{y,1} \in R(H)$, $f^G_{x,1} \in R(G)$ для всех $y \in H$, $x \in G$. Итак к любому $x \in G$ существует функция $g \in R(G)$ такая, что $g(x) \neq 0$ и значит $G_0 = \bigcup_{y \in H} N(y) = G$. По главной теореме Б существует отображение φ множества G в множество H такое, что выполняется формула (1) для всех $f \in R(H)$, $x \in G$.

ЛИТЕРАТУРА

Г. Биркгоф: (Garrett Birkhoff) Теория структур (Москва 1952).

M. Novotný, J. Eichler: Über Funktionale geordneter Mengen (Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No. 432, 133—146, 1962).