Archivum Mathematicum

Květomil Stach

Die vollständigen Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 3, 117--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104637

Terms of use:

© Masaryk University, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

DIE VOLLSTÄNDIGEN KUMMERSCHEN TRANSFORMATIONEN ZWEIDIMENSIONALER RÄUME VON STETIGEN FUNKTIONEN

Květomil STACH (OSTRAVA)

Eingegangen am 13. März 1967

EINLEITUNG

O. Borůvka hat in seinen Arbeiten (1)—(5) die sogenannten Kummerschen Transformationen zweier Differentialgleichungen 2. Ordnung betrachtet. Einen sehr wichtigen Teil dieser Arbeiten bildet das Studium der vollständigen Transformationen. Die vollständigen Transformationen sind diejenigen Transformationen, die ganze Lösungen einer Differentialgleichung in ganze Lösungen einer anderen Differentialgleichung transformieren.

Auf Veranlassung von O. Borůvka habe ich in meiner Arbeit [6] die Frage studiert, inwieweit sich die Eigenschaften der Kummerschen Transformationen von Lösungen zweier Differentialgleichungen auf zwei beliebige zweidimensionalen Funktionsräume übertragen lassen.

In der vorliegenden Arbeit werde ich dieses Studium fortsetzen. Ich will die Frage beantworten, welche Eigenschaften die zwei Funktionsräume haben müssen, um vollständig aufeinander transformierbar zu sein. Das Hauptergebnis ist im Satz 4,6 enthalten. Es zeigt sich, daß die Existenz der Transformation von der Zerlegung der Extrempunkte in beiden Funktionsräume abhängt und nicht davon, ob die Funktionen der Räume differenzierbar sind.

Da alle diese Fragen sehr eng mit den allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen, die in der Arbeit [6] erörtet worden sind, zusammenhängen, werden wir oft auf diese Arbeit verweisen. Diese Hinweise werden wir mit der Vorzahl 6 bezeichnen. Z. B. S. 6,2,5 bedeutet den Satz 2,5 aus dieser Arbeit.

Ich möchte mich bei S. Trávníček und J. Voráček von der Palacký-Universität in Olomouc für ihre wertvollen Ratschläge bezüglich dieser Arbeit und bei E. Spitz von der Bergakademie in Ostrava für die sorgfältige Sprachenkorrektur herzlichst bedanken.

§ 1 DIE PHASEN DES RAUMS

Vereinbarung 1,1: Wir werden die folgende Bezeichnung benützen: S, S_1, S_2 sind lineare zweidimensionale Räume von stetigen Funktionen, die an den Intervallen $i = (a;\ b)$; $i_1 = (a_1;\ b_1)$; $i_2 = (a_2;\ b_2)$ definiert sind (D. 6,1,2). (Dabei sind a, a_1, a_2 reelle Zahlen oder $-\infty$; b, b_1, b_2 reele Zahlen oder $+\infty$.) Wir werden immer voraussetzen, daß sie regulär und von einem bestimmten Typus sind. (D. 6,1,4; D. 6,1,5; D. 6,2,1).

Vereinbarung 1,2: Die Funktion $y \equiv 0$ wollen wir aus unseren Erwägungen immer ausschließen.

Definition 1,1: Wir sagen, daß die Funktione $\alpha(t)$ eine **Phase des Raums** S ist, wenn eine solche Basis $(u;\ v)$ des Raums S existiert, daß $\alpha(t)$ eine Phase der Basis $(u;\ v)$ ist. (D. 6,2,5).

Satz 1,1: Es seien α_1 und α_2 Phasen des Raums S, die im Punkt $t_0 \in \in (a;\ b)$ gleichzeitig von rechts fallend (wachsend) sind [D. 6,2,4]. Dann sind sie im Punkt t_0 von links entweder beide fallend, oder beide wachsend.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 6,3,1.

Satz 1,2: Es sei α irgendeine Phase des Raums S. Die Punkte $t_1 \in i$, $t_2 \in i$ sind gerade dann miteinander konjugiert [D. 6,1,6], wenn eine ganze Zahl k so existiert, daß

R. 1,1 $$\alpha(t_2) = \alpha(t_1) + k\pi$$

ist.

Beweis: Es sei $(u;\ v)$ irgendeine Basis des Raums S, deren Phase die Phase α ist. Bezeichnen wir $h(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$ für alle t, für die $v(t) \neq 0$ ist. Nach S. 6,2,4 gilt im ganzen Definitionsbereich der Funktion h die Gleichheit

R. 1,2 $$h(t) = \operatorname{tg} \alpha(t).$$

Wenn $h(t)$ in irgendwelchem Punkt t_0 nicht definiert ist, ist

R. 1,3 $$\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

wobei m eine ganze Zahl ist.

I. Es seien t_1, t_2 miteinander konjugiert. Dann existiert eine Funktion $y = c_1u + c_2v$, die in den Punkten t_1 und t_2 die Nullstellen hat. Nach S. 6,2,1 ist also entweder $h(t_1) = h(t_2)$, oder die Funktion $h(t)$ ist gleichzeitig in den Punkten t_1 und t_2 nicht definiert. Nach R. 1,2 oder R. 1,3 ist also R. 1,1 erfüllt.

II. Es sei R. 1,1 erfüllt.

a) Es sei $\alpha(t_2) \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ (m ganz). Dann ist $h(t_2) = \operatorname{tg} \alpha(t_2) = \operatorname{tg} [\alpha(t_1) + k\pi] = \operatorname{tg} \alpha(t_1) = h(t_1)$. Wählen wir reelle zahlen c_1 und c_2 so, daß $h(t_2) = -\frac{c_2}{c_1}$ und konstruieren wir die Funktion $y = c_1 u + c_2 v$. Nach S. 6,2,1 ist $y(t_2) = y(t_1) = 0$. Folglich t_1 und t_2 sind konjugiert.

b) Wenn $\alpha(t_2) = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ist, so ist nach R. 1,1 auch $\alpha(t_1) = \frac{\pi}{2} + (m - k)\pi$ und deshalb ist $v(t_1) = v(t_2) = 0$. Folglich t_1 und t_2 sind konjugiert.

Satz 1,3: Es sei α irgendeine Phase des Raums S. Die Punkte t_1 und t_2 seien zwei benachbarte miteinander konjugierte Punkte. Dann ist

R. 1,4 $$\alpha(t_2) = \alpha(t_1) + \varepsilon\pi,$$

wobei $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

Beweis: Zufolge S. 6,2,4 ist α eine stetige Funktion. Unser Satz ist also eine unmittelbare Folgerung des vorigen Satzes.

Satz 1,4: Es seien t_1 und t_2 benachbarte konjugierte Punkte. Ferner seien α_1 und α_2 zwei beliebige Phasen des Raums S, die im Punkt t_1 von links (rechts) entweder gleichzeitig wachsend oder gleichzeitig fallend sind. Dann ist $\alpha(t_2) = \alpha_i(t_1) + \varepsilon\pi$ ($i = 1,2$), wobei die Zahl ε für beide Phasen dieselbe ist und es ist entweder $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = \pm 1$.

Beweis: Setzen wir z. B. voraus, daß $t_1 < t_2$ ist und daß die Phasen α im Punkt t_1 von rechts wachsend sind. Nach S. 1,3 ist $\alpha_i(t_2) = \alpha_i(t_1) + \varepsilon_i\pi$, wobei ε_i entweder 0 oder ± 1 sind. Da α_i im Punkt t_1 von rechts wachsend sind, existiert eine rechte Umgebung O des Punktes t_1, so daß $\alpha_i(t) > \alpha_i(t_1)$ für $t \in O$ ist. Da t_1 und t_2 benachbarte konjugierte Punkte sind, kann also nicht $\varepsilon_i = -1$ sein.

Es sei z. B. $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$. Dann ist $\alpha_1(t_1) = \alpha_1(t_2)$. Da die Funktion α_1 im Punkt t_1 von rechts wachsend ist, muß sie auf dem Intervall $(t_1; t_2)$ ein absolutes Maximum $M \neq \alpha(t_1)$ haben. Bezeichnen wir $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k$ alle Punkte des Intervalls $(t_1; t_2)$, in denen $\alpha_1(t) = M$ ist. Die Punkte $\eta_l (l = 1, 2, \ldots, k)$ sind also miteinander konjugiert, sie sind alle Extrempunkte und es existieren im Intervall $(t_1; t_2)$ keine weiteren mit η_l konjugierten Punkte. Nach D. 6,2,1 und 6,2,2 ist $k < \infty$.

Nach S. 6,3,1 hat die Funktion α_2 in den Punkten η_1 auch Extremwerte. Es können dabei folgende Möglichkeiten eintreten:

1. In allen Punkten η_l hat die Funktion α_2 ein Maximum.
2. In allen Punkten η_l hat die Funktion α_2 ein Minimum.
3. Es existiert ein Index i so, daß die Funktion α_2 in einem aus den Punkten η_i und η_{i+1} ein Maximum und in dem anderen ein Minimum besitzt.

Wir werden jetzt zeigen, daß alle diese Möglichkeiten zum Widerspruch führen.

Im Fall 1. hat die Funktion α_2 im Punkt η_k ein Maximum. Dann existiert ein Punkt $\xi > \eta_k$ so, daß

$$\alpha_2(\xi) < \alpha_2(\eta_k) < \alpha_2(t_2)$$

ist. Daraus folgt, daß auf dem Intervall $(\xi;\, t_2)$ ein Punkt ξ_0 so existieren muß, daß $\alpha_2(\xi_0) = \alpha_2(\eta_k)$ ist. Das ist aber unmöglich, da auf dem Intervall $(\eta_k;\, t_2) \supset (\xi;\, t_2)$ kein mit η_k konjugierter Punkt existiert.

Im Fall 2. bekommen wir auf ähnliche Weise das Resultat, daß auf dem Intervall $(t_1;\, \eta_1)$ ein mit η_1 konjugierter Punkt existieren müßte.

Im Fall 3. bekommen wir einen Widerspruch in der Behauptung, daß im Intervall $(\eta_i;\, \eta_{i+1})$ ein mit η_i konjugierter Punkt existiere.

Auf ähnliche Weise bekommen wir einen Widerspruch auch im Fall $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$.

Also es ist entweder $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ oder $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. In anderen Fällen verläuft der Beweis auf ähnliche Weise.

Satz 1,5: Es seien α_1 und α_2 Phasen des Raums S und t_1, t_2 miteinander konjugierte Punkte des Intervalls i. Es seien α_1 und α_2 im Punkt t_1 gleichzeitig von rechts fallend (wachsend). Dann sind sie im Punkt t_2 von links entweder beide fallend oder beide wachsend und es gilt: $\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_1) = \alpha_1(t_2) - \alpha_2(t_2)$.

Beweis: I. Es seien t_1 und t_2 zwei benachbarte miteinander konjugierte Punkte, $t_1 < t_2$. Nach S. 1,4 existiert die Zahl ε so, daß

R. 1,4 $$\alpha_i(t_2) = \alpha_i(t_1) + \varepsilon\pi (i = 1, 2).$$

Wenn α_i im Punkt t_1 von rechts wachsend sind, so ist entweder $\varepsilon = 0$ und die Funktionen α_i sind im Punkt t_2 von links fallend, oder es ist $\varepsilon = 1$ und die Funktionen α sind im Punkt t_2 von links wachsend. Wenn α_i im Punkt t_1 von rechts fallend sind, so ist entweder $\varepsilon = 0$ und die Funktionen α_i sind im Punkt t_2 von links wachsend, oder es ist $\varepsilon = -1$ und die Funktionen α_i sind im Punkt t_2 von links fallend.

Durch subtrahieren der Gleichungen R. 1,4 bekommen wir

$$\alpha_1(t_2) - \alpha_2(t_2) = \alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_1).$$

II. Wenn t_1 und t_2 nicht benachbarte konjugierte Punkte sind, konstruieren wir alle mit t_1 konjugierte Punkte τ_m die zwischen t_1 und t_2 liegen. Nach I. gilt unsere Behauptung im Punkt τ_1, nach S. 1,1 und I. gilt sie auch im Punkt τ_2, u. s. w. bis wir zum Punkt t_2 kommen. Damit ist der Beweis unseres Satzes zur Ende geführt.

Satz 1,6: Es sei α eine Phase des Raums S, die im Punkt $t_1 \in i$ von rechts fallend (wachsend) ist. Es sei $t_2 > t_1$, $t_2 \in i$ so, daß auf dem Intervall $(t_1; t_2)$ keine mit t_1 und t_2 konjugierte Punkte sind. Es seien t_1 und t_2 nicht miteinander konjugiert. Dann ist die Funktion α im Punkt t_2 von links fallend (wachsend).

Beweis: Es sei α im t_1 von rechts fallend. Nach den Voraussetzungen des Satzes ist $\alpha(t_1) > \alpha(t)$ für jedes $t \in (t_1; t_2\rangle$. Setzen wir voraus, daß α im t_2 von links wachsend ist. Dann existiert ein Punkt $t_3 < t_2$ so, daß $\alpha(t_3) < \alpha(t_2) < \alpha(t_1)$ ist. Also es existiert ein Punkt $t_0 \in (t_1; t_3)$ so, daß $\alpha(t_0) = \alpha(t_2)$ ist. Das ist aber unmöglich, da auf dem Intervall $(t_1; t_2)$ kein mit t_2 konjugierter Punkt existiert. Deshalb ist α im t_2 von links fallend.

Wenn α im t_1 von rechts wachsend ist, ist der Beweis auf ähnliche Weise erbracht.

Satz 1,7: Es seien α_1 und α_2 Phasen des Raums S und es existiere ein Punkt t_1 so, daß α_1 und α_2 gleichzeitig im Punkt t_1 von rechts oder von links fallend (wachsend) sind. Dann sind sie in jedem Punkt $t \in (a; b)$ von links gleichzeitig entweder wachsend oder fallend. Der Satz tritt nicht außer Kraft, wenn wir in der Behauptung die Worte von links durch die Worte von rechts ersetzen.

Beweis: Es seien z. B. α_1 und α_2 im Punkt t_1 von rechts wachsend.

I. Es sei $t_2 \in (a; b)$, $t_1 < t_2$, t_2 mit t_1 nicht konjugiert und es existiere auf dem Intervall $(t_1; t_2)$ kein mit t_1 oder t_2 konjugierter Punkt. Nach S. 1,6 sind α_1 und α_2 im Punkt t_2 von links wachsend. Nach S. 1,1 sind α_1 und α_2 im Punkt t_2 gleichzeitig von rechts wachsend oder fallend.

II. Es sei t_2 mit t_1 konjugiert. Dann ist die Behauptung unseres Satzes eine Folgerung von S. 1,5.

III. Es sei t_2 ein beliebiger mit t_1 nicht konjugierter Punkt des Intervalls $(t_1; b)$. Bezeichnen wir $t_1 = t_{11} < t_{12} < \ldots < t_{1k} < t_2$ alle mit t_1 konjugierten Punkte und $t_1 < t_{2m} < \ldots < t_{21} = t_2$ alle mit t_2 konjugierten Punkte, die im Intervall $\langle t_1; t_2\rangle$ liegen. Dann existieren die Indexe k_0 und m_0 so, daß $1 \leqq k_0 \leqq k$, $1 \leqq m_0 \leqq m$, $t_{1k_0} < t_{2m_0}$ ist, und daß auf dem Intervall $(t_{1k_0}; t_{2m_0})$ keine mit t_1 und t_2 konjugierten Punkte existieren. Dann gilt die Behauptung unseres Satzes im Punkt t_{1k_0} nach II., im Punkt t_{2m_0} nach I. und im Punkt t_2 wieder nach II.

Auf ähnliche Weise können wir den Beweis für den Fall $t_2 < t_1$ führen. Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung 1,1: Nach dem gerade bewiesenen Satz können wir alle Phasen des Raums **S** in zwei Klassen einteilen. In die erste Klasse können wir diejenigen Phasen einreihen, die im beliebig gewählten Punkt t_0 von links wachsend sind, und in die zweite Klasse diejenigen, die in demselben Punkt t_0 von links fallend sind.

Definition 1,2: Wir sagen, daß die Phasen α_1 und α_2 des Raums **S übereinstimmend** sind, wenn sie zu derselben Klasse (siehe Bemerkung 1,1) gehören. Anderseits sagen wir, daß sie **entgegengesetzt** sind.

Satz 1,8: Es seien α_1 und α_2 übereinstimmende Phasen des Raums **S** und $t_1 \in \mathrm{i}$ so, daß $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_1)$ ist. Dann ist für jedes $t \in \mathrm{i}$: $\alpha_2(t) - \pi < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) + \pi$.

Beweis: Wir werden z. B. die Ungleichheit $\alpha_1(t) < \alpha_2(t) + \pi$ beweisen. Wir werden voraussetzen, daß diese Ungleichheit für irgendeines $t \in (a; b)$ falsch ist. Dann muß ein solches $t_2 \in \mathrm{i}$ existieren, daß $\alpha_1(t_2) = \alpha_2(t_2) + \pi$ ist. Aus S. 1,5 folgt, daß t_1 und t_2 miteinander nicht konjugiert sind. Es sei z. B. $t_1 < t_2$. Bezeichnen wir $t_1 = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k$ alle mit t_1 konjugierten Punkte, die auf dem Intervall $\langle t_1; t_2\rangle$ liegen. Ebenso bezeichnen wir $\eta_l < \ldots < \eta_2 < \eta_1 = t_2$ alle mit t_2 konjugierten und im Intervall $\langle t_1; t_2\rangle$ liegenden Punkte. Aus S. 1,5 folgt:

R. 1,5 $$\alpha_1(\xi_i) = \alpha_2(\xi_i) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, k,$$

R. 1,6 $$\alpha_1(\eta_j) = \alpha_2(\eta_j) + \pi \text{ für } j = 1, 2, \ldots, l.$$

Folglich existieren solche Indexen $r (1 \leqq r \leqq k)$ und s $(1 \leqq s \leqq l)$, daß $\xi_r < \eta_s$ ist und daß auf dem Intervall $(\xi_r; \eta_s)$ kein mit ξ_r und η_s konjugierter Punkt ist. Es sei z. B. α_1 im Punkt ξ_r von rechts wachsend. Dann sind auch α_2 und $\alpha_2 + \pi$ im Punkt ξ_r von rechts wachsend. Da auf dem Intervall $(\xi_r; \eta_s\rangle$ kein mit ξ_r konjugierter Punkt ist, muß

R. 1,7 $$\alpha_1(\xi_r) < \alpha_1(\eta_s) < \alpha_1(\xi_r) + \pi$$

und

R. 1,8 $$\alpha_2(\xi_r) < \alpha_2(\eta_s)$$

sein. Aus R. 1,8, R. 1,5 und R. 1,6 bekommen wir

$$\alpha_1(\xi_r) < \alpha_1(\eta_s) - \pi,$$

d. h.

$$\alpha_1(\xi_r) + \pi < \alpha_1(\eta_s),$$

was im Widerspruch zu R. 1,7 steht. Auf ähnliche Weise bekommen wir den Widerspruch auch in anderen möglichen Fällen.

Aus diesem Satz und aus der Stetigkeit der Funktionen α_1 und α_2 folgt unmittelbar der nächste:

Satz 1,9: Es seien α_1 und α_2 übereinstimmende Phasen des Raums S. Dann existiert eine ganze Zahl k so, daß

$$\alpha_2(t) + (k - 1)\,\pi < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) + (k + 1)\,\pi$$

für jedes $t \in \mathrm{i}$ ist.

Satz 1,10: Es sei α die Phase der Basis (u, v) und α_1 die Phase der Basis (u_1, v_1). Es sei $u_1 = c_{11}u + c_{12}v$, $v_1 = c_{21}u + c_{22}v$. Die Phasen α und α_1 sind übereinstimmend oder entgegensetzt je nachdem, ob die Determinante $D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$ positiv oder negativ ist.

Beweis: Wählen wir irgendeinen Punkt t_0 so, daß $v(t_0) \neq 0$, $v_1(t_0) \neq 0$ setzen wir z. B. voraus, daß $\alpha(t)$ im Punkt t_0 von rechts wachsend ist. Dann existiert eine rechte Umgebung O des Punktes t_0 so, daß für $t \in \mathrm{O}$ gilt:

$$v(t) \neq 0, \qquad v_1(t) \neq 0, \qquad \alpha(t) > \alpha(t_0).$$

Folglich gilt für $t \in \mathrm{O}$:

$$v(t)\,.\,v(t_0) > 0, \qquad v_1(t)\,.\,v_1(t_0) > 0, \qquad \frac{u(t)}{v(t)} > \frac{u(t_0)}{v(t_0)},$$

also

$$u(t)\,.\,v(t_0) - v(t)\,.\,u(t_0) > 0.$$

Weiter ist:

$$\frac{u_1(t)}{v_1(t)} - \frac{u_1(t_0)}{v_1(t_0)} = \frac{u_1(t)\,.\,v_1(t_0) - u_1(t_0)\,.\,v_1(t)}{v_1(t)\,.\,v_1(t_0)} =$$

$$= \frac{(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\,[u(t)\,.\,v(t_0) - u(t_0)\,.\,v(t)]}{v_1(t)\,.\,v_1(t_0)} =$$

$$= D\,.\,\frac{u(t)\,.\,v(t_0) - u(t_0)\,.\,v(t)}{v_1(t)\,.\,v_1(t_0)}.$$

Da

$$\frac{u(t)\,.\,v(t_0) - u(t_0)\,.\,v(t)}{v_1(t)\,.\,v_1(t_0)} > 0$$

ist, ist $\dfrac{u_1(t)}{v_1(t)} - \dfrac{u_1(t_0)}{v_1(t_0)}$ positiv oder negativ je nachdem, ob die Determinante D positiv oder negativ ist. Daraus folgt, daß $\dfrac{u_1(t)}{v_1(t)}$ und deshalb auch $\alpha_1(t)$ im Punkt t_0 von rechts wachsend oder fallend ist, je nachdem ob die Determinante D positiv oder negativ ist. Nach S. 1,7 ist unser Satz bewiesen.

§ 2 BESTIMMTE UND UNBESTIMMTE PHASEN

Definition 2,1: Wir sagen, daß die im Intervall $(a; b)$ definierte Funktion $f(t)$ nach links (rechts) oszilliert, wenn sie unendlich viele Nullstellen hat, deren Häufungspunkt der Punkt $a(b)$ ist.

Satz 2,1: Es sei $\alpha(t)$ irgendeine Phase des Raums S und es existiere ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t)$. Es seien u_1 und v_1 zwei Funktionen, des Raums S, die nach links oszillieren. Dann sind u_1 und v_1 abhängig. Ähnliches gilt auch für $\lim\limits_{t\to b-} \alpha(t)$.

Beweis: Bezeichnen wir $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = L$. Es sei $(u; v)$ eine solche Basis des Raums S, daß $\alpha(t)$ die Phase dieser Basis ist. Setzen wir voraus, daß u_1 und v_1 unabhängig sind und nach links oszillieren. Wir können also die fallenden Punktfolgen $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ so wählen, daß $u_1(\xi_n) = 0 = v_1(\eta_m)$, $u_1(\eta_m) \neq 0 \neq v_1(\xi_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a = \lim\limits_{m\to\infty} \eta_m$ für alle natürliche Zahlen n, m ist.

Da u_1, v_1 unabhängig sind, existieren solche Zahlen c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, daß $u = c_{11}u_1 + c_{12}v_1$, $v = c_{21}u_1 + c_{22}v_1$ ist. Da auch u und v unabhängig sind, ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

also

R. 2,1 $$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0.$$

Konstruieren wir jetzt die Charakteristik h der Basis $(u; v)$

$$h(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{c_{11}u_1(t) + c_{12}v_1(t)}{c_{21}u_1(t) + c_{22}v_1(t)}.$$

für alle t, für die $v(t) \neq 0$ ist.

a) Es sei zuerst $c_{21} \neq 0 \neq c_{22}$. Bezeichnen wir $\dfrac{c_{11}}{c_{21}} = k_1$, $\dfrac{c_{12}}{c_{22}} = k_2$.

Wegen R. 2,1 ist $k_1 \neq k_2$ und es gilt für natürliche n, m:

$$h(\xi_n) = \frac{c_{11}u_1(\xi_n) + c_{12}v_1(\xi_n)}{c_{21}u_1(\xi_n) + c_{22}v_1(\xi_n)} = \frac{c_{12}v_1(\xi_n)}{c_{22}v_1(\xi_n)} = k_2$$

$$h(\eta_m) = k_1.$$

Aus der Definition der Funktion $\alpha(t)$ [D. 6,2,5 und S. 6,2,4] folgt:

R. 2,2-a $$\operatorname{tg} \alpha(\xi_n) = k_2,$$

R. 2,2-b $$\operatorname{tg} \alpha(\eta_m) = k_1.$$

Daraus erhalten wir, daß zu jedem Punkt ξ_n eine ganze Zahl r_n so existiert, daß

R. 2,3 $$\alpha(\xi_n) = \operatorname{arctg} k_2 + r_n\pi$$

ist. Die unendliche Folge $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ muß aber mindestens einen Häufungspunkt r haben. Wäre $r = \infty$ oder $r = -\infty$, so würden wir aus R. 2,3 erhalten, daß die Funktion α in der Umgebung des Punktes a unbeschränkt wäre, was aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t)$ endlich ist, stände. So muß r endlich sein. Da aber r_n ganze Zahlen sind, bedeutet die vorige Behauptung, daß für unendlich viele Indexe n $r_n = r$ sein muß. Daraus geht hervor, daß in jeder Umgebung des Punktes a in unendlich vielen Punkten ξ_n die Gleichheit

$$\alpha(\xi_n) = \operatorname{arctg} k_2 + r\pi$$

erfüllt ist. Folglich ist

$$L = \operatorname{arctg} k_2 + r\pi.$$

Ähnlicherweise gilt auch

$$L = \operatorname{arctg} k_1 + s\pi \ (s \text{ ganz}).$$

Das ist aber unmöglich, da $k_1 \neq k_2$ ist.

b) Wäre $c_{21} = 0$, $c_{22} \neq 0$, so würde der Beweis auf ähnliche Weise, wie im Fall a) durchlaufen, nur die Gleichheit R. 2,3 müßte man durch [S. 6,2,4]

$$\alpha(\xi_n) = \frac{\pi}{2} + r_n\pi$$

ersetzen. Dasselbe gilt auch für den Fall $c_{21} \neq 0$, $c_{22} = 0$. Der Fall $c_{21} = 0 = c_{22}$ kann nicht wegen R. 2,1 eintreten.

Damit ist der ganze Beweis zu Ende geführt.

Satz 2,2: Es sei $\alpha(t)$ irgendeine Phase des Raums **S** und es existiere ein unendlicher Grenzwert $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = +\infty$ oder $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = -\infty$. Dann oszilliert jede Funktion $y(t) \in \mathbf{S}$ nach links. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für $\lim\limits_{t\to b-} \alpha(t)$.

Beweis: Es sei z. B. $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = +\infty$. Wählen wir eine Basis $(u; v)$ des Raums **S** so, daß $\alpha(t)$ die Phase der Basis $(u; v)$ ist. Wählen wir weiter eine beliebige Funktion $y(t) \in S$. Dann existieren reele Zahlen c_1 und c_2 so, daß $y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$ ist. Es sei $\xi \in (a;\, b)$. Aus der Stetigkeit der Funktion $\alpha(t)$ [S. 6,2,4] und der Voraussetzung $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = +\infty$ folgt, daß die Funktion $\alpha(t)$ im Intervall $(a;\, \xi)$ einen beliebigen Wert $k > \alpha(\xi)$ mindestens in einem Punkt annimmt.

a) Setzen wir zuerst voraus, daß $c_1 \neq 0$ ist und wählen wir eine ganze Zahl m so, daß $\operatorname{arctg}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) + m\pi > \alpha(\xi)$ ist. Dann ist auch für jedes natürliches n: $\operatorname{arctg}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) + (m+n)\,\pi > \alpha(\xi)$ und deshalb existiert zu ihm ein solches $t_n \in (a;\, \xi)$, daß

R. 2,4 $$\alpha(t_n) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) + (m+n)\,\pi$$

ist. Aber das bedeutet:

$$\operatorname{tg} \alpha(t_n) = -\frac{c_2}{c_1}$$

Aus S. 6,2,4, folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha(t_n) = \frac{u(t_n)}{v(t_n)}\,.$$

Daraus geht hervor:

R. 2,5 $$c_1 u(t_n) + c_2 v(t_n) = 0.$$

Diese Gleichheit sagt, daß t_n eine Nullstelle der Funktion y ist. Nach S. 6,2,1 und 6,2,4 folgt daraus, daß es im $(a;\, \xi)$ unendlich viele Nullstellen der Funktion $\alpha(t)$ gibt. Da S von einem bestimmten Typus ist, muß der Häufungspunkt der Folge $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Punkt a sein.

b) Auf ähnliche Weise wird der Beweis auch im Fall $c_1 = 0$ geführt, nur anstatt R. 2,4 müssen wir $\alpha(t_n) = \frac{\pi}{2} + (m+n)\,\pi$ nehmen. Damit ist der Beweis beendet.

Satz 2,3: Es sei $\alpha(t)$ irgendeine Phase des Raums S und es existiere kein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t)$. Dann existiert mindestens eine Basis $(u;\, v)$ des Raums S so, daß die Funktionen u und v nach links oszillieren. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für $\lim\limits_{t\to b-} \alpha(t)$.

Beweis:

a) Falls $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = +\infty$ oder $\lim\limits_{t\to a+} \alpha(t) = -\infty$ ist, folgt unser Satz aus S. 2,2.

b) Es existiere also kein (weder endlicher noch unendlicher) Grenzwert $\lim_{t \to a+} \alpha(t)$. Dann ist

R. 2,6 $$l = \liminf_{t \to a+} \alpha(t) < \limsup_{t \to a+} \alpha(t) = L$$

Folglich existieren die reellen Zahlen ξ und η so, daß $l < \xi < \eta < L$ und $\eta - \xi < \pi$ ist. Aus R. 2,6 und aus der Stetigkeit der Funktion α folgt, daß die fallenden Punktfolgen $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ existieren, für die $\lim_{n \to \infty} \xi_n = \lim_{m \to \infty} \eta_m = a$ und $\alpha(\xi_n) = \xi$, $\alpha(\eta_m) = \eta$ für jedes natürliche m und n ist. Aus S. 6,2,1 und S. 6,2,4 folgt, daß die Funktionen u und v existieren, für die $u(\xi_n) = v(\eta_m) = 0$ ist. Da $\eta - \xi < \pi$ ist, müssen nach denselben Sätzen die Funktionen u und v unabhängig sein.

Satz 2,4: Es seien $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ beliebige Phasen des Raums S. Dann sind die Grenzwerte $\lim_{t \to a+} \alpha_1(t)$ und $\lim_{t \to a+} \alpha_2(t)$ gleichzeitig entweder endlich, oder unendlich, oder existiert weder der eine noch der andere. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für $\lim_{t \to b-} \alpha_1(t)$ und $\lim_{t \to b-} \alpha_2(t)$.

Beweis:

I. Für den Fall eines endlichen Grenzwertes ist der Satz eine Folgerung des Satzes S. 2,1 und S. 2,3.

II. Es existiere ein unendlicher Grenzwert, z. B. $\lim_{t \to a+} \alpha_1(t) = +\infty$.

a) Es sei $\alpha_2(t)$ eine mit $\alpha_1(t)$ übereinstimmende Phase. Dann existiert nach S. 1,9 eine ganze Zahl k so, daß

$$\alpha_1(t) + (k-1)\pi < \alpha_2(t) < \alpha_1(t) + (k+1)\pi$$

für jedes $t \in \mathrm{i}$ ist. Folglich ist

$$\lim_{t \to a+} \alpha_1(t) + (k-1)\pi \leqq \lim_{t \to a+} \alpha_2(t) \leqq \lim_{t \to a+} \alpha_1(t) + (k+1)\pi,$$

$$+\infty \leqq \lim_{t \to a+} \alpha_2(t) \leqq +\infty$$

also es ist

$$\lim_{t \to a+} \alpha_2(t) = +\infty.$$

b) Es sei $\alpha_2(t)$ eine zu α_1 entgegengesetzte Phase. Dann sind $-\alpha_2(t)$ und $\alpha_1(t)$ übereinstimmede Phasen. Nach a) ist $\lim_{t \to a+} -\alpha_2(t) = +\infty$ und deshalb $\lim_{t \to a+} \alpha_2(t) = -\infty$.

Definition 2,2: Wir sagen, daß die Phase $\alpha(t)$ irgendeines Raums **S** **von links** resp. **rechts** 1. **abgeschlossen** 2. **offen** 3. **unbestimmt** ist je nachdem ob der Grenzwert $\lim_{t \to a+} \alpha(t)$ resp. $\lim_{t \to b-} \alpha(t)$ 1. existiert und endlich ist 2. existiert und unendlich ist 3. nicht existiert. In ersten zwei Fällen sagen wir auch, daß $\alpha(t)$ von **links** resp. **rechts bestimmt** ist.

Definition 2,3: Wir sagen, daß die Phase $\alpha(t)$ irgendeines Raums **S** **abgeschlossen, offen, bestimmt** oder **unbestimmt** ist, wenn sie gleichzeitig von links und von rechts abgeschlossen, offen, bestimmt oder unbestimmt ist.

Bemerkung 2,1: Nach S. 2,4 sind alle Phasen eines Raums **S** von links (von rechts) gleichzeitig entweder abgeschlossen oder offen oder unbestimmt.

Definition 2,4: Wir sagen, daß der Raum **S** ein **Raum mit abgeschlossen (offenen, umbestimmten)** Phasen ist, wenn jede Phase dieses Raums abgeschlossen (offen, unbestimmt, bestimmt) ist. Dasselbe gilt von links resp. von rechts.

Satz 2,5: Es sei **S** ein Raum mit von links (von rechts) unbestimmten Phasen. Dann ist der Punkt $a(b)$ ein Häufungspunkt von Extrempunkten des Intervalls $(a; b)$.

Beweis: Es sei $\alpha(t)$ irgendeine Phase des Raums **S**. Da sie von links unbestimmt ist, ist

$$l = \liminf_{t \to a+} \alpha(t) < \limsup_{t \to a+} \alpha(t) = L.$$

Wählen wir irgendeine Zahl $c \in (l; L)$. Da $\alpha(t)$ stetig ist, muß eine fallende Folge $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ so existieren, daß $\lim_{n \to \infty} t_n = a$ und $\alpha(t_n) = c$ für jedes natürliche n ist. Für jedes natürliche n ist also $\alpha(t_n) = \alpha(t_{n+1})$, $t_{n+1} < t_n$ und deshalb muß auf dem Intervall $(t_{n+1}; t_n)$ mindestens ein Extrempunkt x_n sein und es ist $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Ähnlicherweise beweist man den Satz auch für den Punkt b.

§ 3 VOLLSTÄNDIGE TRANSFORMATIONEN

Definition 3,1: Die Transformation **T** $(z; x; \mathrm{j}_1; \mathrm{j}_2)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ [D. 6,4,1] heißt **vollständig**, wenn $\mathrm{j}_1 = \mathrm{i}_1$ und $\mathrm{j}_2 = \mathrm{i}_2$ ist. Die vollständigen Transformationen werden wir kurz **T** $(z; x)$ bezeichnen.

Satz 3,1: Jede vollständige Transformation ist optimal [D. 6,5,2].

Beweis: Der Satz ist eine Folgerung von D. 6,5,2.

Satz 3,2: Es seien $(u_1; v_1)$ eine Basis des Raums S_1, $(u_2; v_2)$ eine Basis des Raums S_2 und α_1, α_2 irgendwelche Phasen der Basen (u_1, v_1) und (u_2, v_2). Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer vollständigen Transformation $\mathrm{T}(z; x)$, für die $\mathrm{T}(u_1) = u_2$, $\mathrm{T}(v_1) = v_2$ gilt, ist: Es existiert eine ganze Zahl k und eine Funktion $x(t)$ so, daß

1. $x(t)$ monoton und stetig in i_2 ist
2. $x(\mathrm{i}_2) = \mathrm{i}_1$
3. $\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)] + k\pi$ für jedes $t \in \mathrm{i}_2$.

Beweis: I. Setzen wir voraus, daß eine solche Transformation existiert. Dann ist nach S. 6,4,6 für jedes $t \in \mathrm{i}_2$

R. 3,1 $$u_1[x(t)] \,.\, v_2(t) - u_2(t) \,.\, v_1[x(t)] = 0.$$

a) Es sei $v_2(t) \neq 0$. Dann ist nach S. 6,4,5 $v_1[x(t)] \neq 0$ und wir können R. 3,1 folgenderweise umschreiben:

$$\frac{u_1[x(t)]}{v_1[x(t)]} = \frac{u_2(t)}{v_2(t)},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \alpha_1[x(t)] = \operatorname{tg} \alpha_2(t).$$

Es existiert also eine ganze Zahl $k(t)$ so, daß

R. 3,2 $$\alpha_1[x(t)] = \alpha_2(t) + k(t) \,.\, \pi.$$

b) Es sei $v_2(t) = 0$. Dann ist $v_1[x(t)] = 0$ und deshalb existieren ganze Zahlen $n_1(t)$ und $n_2(t)$ so, daß $\alpha_1[x(t)] = \frac{\pi}{2} + n_1(t) \,.\, \pi$, $\alpha_2(t) = \frac{\pi}{2} + n_2(t) \,.\, \pi$. Deswegen ist auch in diesem Fall R. 3,2 erfüllt. Aus R. 3,2 folgt, daß zu jedem $t \in i_2$ eine ganze Zahl $k(t)$ existiert, für die die Relation

$$k(t) = \frac{1}{\pi}\{\alpha_1[x(t)] - \alpha_2(t)]\}$$

gilt. Da $x(t)$, $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(t)$ stetig sind, ist auch $k(t)$ stetig. Aber $k(t)$ ist eine ganze Zahl und deshalb muß k konstant sein.

II. Setzen wir jetzt voraus, daß die Funktion $x(t)$ und die ganze Zahl k, die die oben erwähnten Eigenschaften haben, existieren. Dann gilt für jedes $t \in \mathrm{i}_2$: $\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)] + k\pi$. Nach S. 6,2,4 gilt für jedes t, für das $v_2(t) \neq 0 \neq v_1[x(t)]$ ist:

$$\operatorname{tg} \alpha_2(t) = \operatorname{tg} \alpha_1[x(t)],$$

R. 3,3 $$u_2(t) \,.\, v_1[x(t)] - u_1[x(t)] \,.\, v_2(t) = 0.$$

Wenn $v_2(t) = 0$ ist, so folgt aus der Stetigkeit der Funktion α_2, daß $\alpha_2(t) = \frac{\pi}{2} + m\pi$ (m eine ganze Zahl) und deshalb auch $\alpha_1[x(t)] = \frac{\pi}{2} + (k - m)\,\pi$ ist. Foglich ist $v_1[x(t)] = 0$ und R 3,3 ist wieder erfüllt. Ebenso im Fall $v_1[x(t)] = 0$. Mit der Benützung des Satzes S. 6,4,6 ist unser Satz bewiesen.

Satz 3,3: Es sei S_1 auf S_2 durch eine vollständige Transformation $T(z;\, x)$ mit einer wachsenden (fallenden) Amplitude transformierbar. Es sei S_1 ein Raum mit von links

1. offenen 2. abgeschlossenen 3. unbestimmten Phasen.

Dann ist S_2 ein Raum mit von links (von rechts)

1. offenen 2. abgeschlossenen 3. unbestimmten Phasen

und in den ersten zwei Fällen gilt:

$$\lim_{x \to a_1+} \alpha_1(x) = \lim_{t \to a_2+} \alpha_2(t) + k\pi \;[\lim_{x \to a_1+} \alpha_1(x) = \lim_{t \to b_2-} \alpha_2(t) + k\pi]$$

wobei k dieselbe ganze Zahl, wie im S. 3,2 ist. Eine ähnliche Behauptung gilt auch, wenn S_1 ein Raum mit von rechts

1. offenen 2. abgeschlossenen 3. unbestimmten Phasen ist.

Beweis: Es sei z. B. $x(t)$ wachsend. Dann ist $\lim_{t \to a_2+} x(t) = a_1$. Wählen wir irgendeine Basis $(u_1;\, v_1)$ des Raums S_1 und bezeichnen wir $T(u_1) = u_2$, $T(v_1) = v_2$. Dann ist dem Satze 3,2 zufolge $\alpha_1[x(t)] = \alpha_2(t) + k\pi$ für alle $t \in i_2$ und deshalb: wenn der Grenzwert $\lim_{x \to a_1+} \alpha_1(x)$ existiert und endlich (unendlich) ist, so ist:

R. 3,4 $$\lim_{x \to a_1+} \alpha_1(x) = \lim_{t \to a_2+} \alpha_1[x(t)] = \lim_{t \to a_2+} \alpha_2(t) + k\pi,$$

d. h. der Grenzwert $\lim_{t \to a_2+} \alpha_2(t)$ existiert und endlich (unendlich) ist. Wenn $x(t)$ fallend ist, so ist $\lim_{t \to b_2-} x(t) = a_1$ und der Beweis verläuft auf ähnliche Weise, wie im vorigen Fall.

Definition 3,2: Wir sagen, daß der Raum S m-**ter Klasse** ist ($m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$), wenn genau m Extrempunkte, von denen keine zwei miteinander konjugiert sind, existieren.

Satz 3,4: Es seien S_1 und S_2 zwei Räume, die aufeinander durch eine vollständige Transformation $T(z; x)$ transformierbar sind. Dann gehören S_1 und S_2 zu derselben Klasse.

Beweis: Die Funktion $x(t)$ ist schlicht und nach S. 6,4,9 sind t und $x(t)$ gleichzeitig extrem oder gewöhnlich. Die Funktion $x(t)$ vermittelt also eine schlichte Abbildung der Menge aller Extrempunkte des Intervalls i_2 auf die Menge aller Extrempunkte des Intervalls i_1. Dabei bilden sich zwei miteinander konjugierte Punkte zufolge der Bemerkung 6,4,1 auf zwei miteinander konjugierte Punkte ab. Der Beweis ist zu Ende geführt.

§ 4 ÄHNLICHE RÄUME

Definition 4,1: Es seien S_1 und S_2 zwei Räume, ferner sei $\mathbf{M}_1$ die Menge aller Extrempunkte und Grenzpunkte des Intervalls i_1 und $\mathbf{M}_2$ die Menge aller solchen Punkte des Intervalls i_2. Schließlich seien α_1 und α_2 irgendwelche Phasen der Räume S_1 und S_2, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. Wenn ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim\limits_{t\to a_2+} \alpha_2(t)$ existiert und gleich L_1 ist, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a_1+} \alpha_1(x)$ $[\lim\limits_{x\to b_1-} \alpha_1(x)]$ und ist gleich L_1 und umgekehrt.

2. Wenn ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim\limits_{x\to b_2-} \alpha_2(t)$ existiert und gleich L_2 ist, so existiert auch $\lim\limits_{x\to b_1-} \alpha_1(x)$ $[\lim\limits_{x\to a_1+} \alpha_1(x)]$ und ist gleich L_2 und umgekehrt.

3. Es existiert eine wachsende [fallende] Funktion φ, die $\mathbf{M}_2$ auf $\mathbf{M}_1$ abbildet und für die

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[\varphi(t)]$$

für jedes $t \in \mathbf{M}_2$, $t \neq a_2$, $t \neq b_2$ gilt.

Dann sagen wir, daß α_1 und α_2 **gerade [ungerade] kongruent** sind.

Definition 4,2: Wir sagen, daß die Phasen α_1 und α_2 **fast gerade (ungerade) kongruent** sind, wenn eine ganze Zahl k so existiert, daß α_1 und $\alpha_2 + k\pi$ gerade (ungerade) kongruent sind.

Definition 4,3: Wir sagen, daß die Räume S_1 und S_2 **gerade (ungerade) ähnlich** sind, wenn gerade (ungerade) kongruente Phasen α_1 und α_2 der Räume S_1 und S_2 existieren.

Satz 4,1: Es soll eine vollständige Transformation $T(z; x)$ des Raums S_1 auf S_2 existieren. Es sei $(u_1; v_1)$ irgendeine Basis des Raums S_1 und α_1

eine Phase dieser Basis. Ferner sei $u_2 = \mathbf{T}(u_1)$, $v_2 = \mathbf{T}(v_1)$ und α_2 eine Phase der Basis $(u_2; v_2)$. Dann sind α_1 und α_2 fast gerade oder ungerade kongruent, je nachdem x wachsend oder fallend ist.

Beweis: Der Satz folgt aus S. 6,4,9, S. 3,2 und S. 3,3.

Satz 4,2: Es seien α_1 und α_2 gerade oder ungerade kongruente Phasen der Räume $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. Die Mengen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$, die dieselbe Bedeutung wie in D. 4,1 haben, seien unendlich. Die Funktion φ soll auch dieselbe Bedeutung, wie in D. 4,1, haben. Es sei $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monotone Punktfolge aus $\mathbf{M}_2$ und $t_0 = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. Wenn $t_0 \in \mathbf{M}_2$ ist, so ist $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n) \in \mathbf{M}_1$ und es gilt $\bar{x} = \varphi(t_0)$. Wenn $t_0 \bar{\in} \mathbf{M}_2$, so ist auch $\bar{x} \bar{\in} \mathbf{M}_1$.

Beweis: Wir werden ihn für den Fall, daß α_1 und α_2 gerade kongruent (d. h. φ wachsend) sind und daß $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ wachsend ist, vorführen. In anderen Fällen sollten wir den Beweis auf ähnliche Weise führen. Bezeichnen wir $\varphi(t_n) = x_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ und φ^{-1} die inverse Abbildung zu φ.

I. Da φ und $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ wachsend sind, ist auch $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ wachsend und deshalb existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\geqq 1} x_n$. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $\bar{x}$.

II. Setzen wir zuerst voraus, daß $t_0 \in \mathbf{M}_2$ ist und bezeichnen wir $x_0 = \varphi(t_0)$. Da $t_0 > t_n$ für jedes n ist, ist auch $x_0 > x_n$ für jedes n und deshalb ist $x_0 \geqq \bar{x}$. Setzen wir voraus, daß $x_0 > \bar{x}$ ist.

Es sei ξ irgendein Extrempunkt des Intervalls i_1, der kleiner als x_0 ist, d. h. $\xi < x_0$, $\xi \in \mathbf{M}_1$. Dann ist $\varphi^{-1}(\xi) < \varphi^{-1}(x_0) = t_0$. Es existiert also ein Index m so, daß $\varphi^{-1}(\xi) < t_m$ ist. Daraus folgt $\xi < \varphi(t_m) = x_m < \bar{x}$. Also jeder Extrempunkt des Intervalls i_1, der vor dem Punkt x_0 liegt, liegt auch vor dem Punkt $\bar{x}$. Folglich liegt im Intervall $\langle\bar{x}; x_0)$ kein Extrempunkt.

a) Es sei $x_0 < b_1$. Dann ist auch $t_0 < b_2$ und es gilt

R. 4,1 $$\alpha_2(t_0) = \alpha_1(x_0)$$
und
R. 4,2 $$\alpha_2(t_n) = \alpha_1(x_n) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen α_1 und α_2 und aus R. 4,2 ergibt sich:

R. 4.3 $$\alpha_2(t_0) = \lim_{n\to\infty} \alpha_2(t_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_1(x_n) = \alpha_1(\bar{x}).$$

Aus R. 4,1 und R. 4,3 folgt:

$$\alpha_1(x_0) = \alpha_1(\bar{x}).$$

Deshalb muß im Intervall $(\bar{x}; x_0)$ mindestens ein Extrempunkt existieren. Das ist aber ein Widerspruch.

b) Es sei $x_0 = b_1$. Dann ist auch $t_0 = b_2$. Da auf dem Intervall $\langle \bar{x}; b_1)$ kein Extrempunkt existiert, muß nach S. 2,6 die Phase α_1 von rechts bestimmt sein und es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to b_1 -} \alpha_1(x)$. Deshalb muß auch der Grenzwert $\lim\limits_{t \to b_2 -} \alpha_2(t)$ existieren und es gilt:

R. 4,4
$$\lim_{x \to b_1 -} \alpha_1(x) = \lim_{t \to b_2 -} \alpha_2(t)$$

Aus R. 4,2, die auch in diesem Fall nach D. 4,1 gelten muß, bekommen wir, daß

R. 4,5
$$\lim_{t \to b_2 -} \alpha_2(t) = \lim_{n \to \infty} \alpha_2(t_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_1(x_n) = \alpha_1(\bar{x}).$$

Aus R. 4,5 und R. 4,4 folgt, daß $\lim\limits_{x \to b_1 -} \alpha_1(x)$ endlich ist und darum können wir die Funktion α_1 im Punkt b_1 durch die Definition $\alpha_1(b_1) = \lim\limits_{x \to b_1 -} \alpha_1(x)$ auf eine stetige Funktion im Intervall $\langle \bar{x}; b_1 \rangle$ verlängern. Für diese Funktion gilt nach R. 4,5 und R. 4,4:

$$\alpha_1(b_1) = \alpha_1(\bar{x})$$

und es muß auf dem Intervall $(\bar{x}; b_1)$ mindestens ein Extremwert existieren. Das ist wieder ein Widerspruch. Deshalb ist $x_0 = \bar{x}$, was bedeutet, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(t_n) = \varphi(t_0) \in \mathbf{M}_1$ ist.

III. Es sei $\bar{x} \in \mathbf{M}_1$. Nach II. ist $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi^{-1}(x_n) \in \mathbf{M}_2$ und es gilt: $t_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi^{-1}(x_n) = \varphi^{-1}(\bar{x})$. Also es ist $t_0 \in \mathbf{M}_2$.

Satz 4,3: Es seien α_1 und α_2 gerade resp. ungerade kongruente Phasen der Räume $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ und φ sollen dieselbe Bedeutung wie in D. 4,1 haben. Es seien $\overline{\mathbf{M}}_1$ und $\overline{\mathbf{M}}_2$ die Abschließungen der Mengen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$. Dann existiert eine wachsende resp. fallende Funktion $\bar{\varphi}$, die $\overline{\mathbf{M}}_2$ auf $\overline{\mathbf{M}}_1$ abbildet und für die in jedem Punkt $t \in \overline{\mathbf{M}}_2$, $t \neq a_2$, $t \neq b_2$ gilt:

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[\bar{\varphi}(t)].$$

B e w e i s: Wir werden ihn wieder für den Fall der gerade kongruenten Phasen α_1 und α_2 führen. Bezeichnen wir mit $\mathbf{M}_1'$ und $\mathbf{M}_2'$ die Ableitungen der Mengen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$. Dann ist

$$\overline{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_1', \qquad \overline{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_2',$$
$$\overline{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 \cup (\mathbf{M}_1' - \mathbf{M}_1), \qquad \overline{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 \cup (\mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2)$$

wobei die Mengen auf den rechten Seiten von den beiden letzten Gleichungen punkfremd sind.

I. Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2$. Setzen wir $\bar{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0)$.

II. a) Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, t_0 ein Häufungspunkt der Menge $\mathbf{M}_2$ von links. Nach Satz 74 aus [7] existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to t_0 - \\ t \in \mathbf{M}_2}} \varphi(t) = \sup_{\substack{t < t_0 \\ t \in \mathbf{M}_2}} \varphi(t) = x_0 .$$

Aus S.4,2 folgt, daß $x_0 \in \mathbf{M}_1' - \mathbf{M}_1$ ist. Es ist $x_0 \neq a_1$, $x_0 \neq b_1$, $t_0 \neq a_2$, $t_0 \neq b_2$. Deshalb sind die Funktionen α_1 im Punkt x_0 und α_2 im Punkt t_0 stetig und es gilt:

$$\alpha_2(t_0) = \lim_{t \to t_0} \alpha_2(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 - \\ t \in \mathbf{M}_2}} \alpha_2(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 - \\ t \in \mathbf{M}_2}} \alpha_1[\varphi(t)] =$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 - \\ x \in \mathbf{M}_2}} \alpha_1(x) = \lim_{x \to x_0 -} \alpha_1(x) = \alpha_1(x_0),$$

also

R. 4,6 $$\alpha_2(t_0) = \alpha_1(x_0).$$

b) Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, t_0 ein Häufungspunkt der Menge $\mathbf{M}_2$ von rechts. Auf ähnliche Weise wie im Fall a) können wir beweisen, daß der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + \\ t \in \mathbf{M}_2}} \varphi(t) = \inf_{\substack{t > t_0 \\ t \in \mathbf{M}_2}} \varphi(t) = \bar{x}_0$$

existiert und es gilt:

R. 4,7 $$\alpha_2(t_0) = \alpha_1(\bar{x}_0)$$

c) Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, t_0 ein Häufungspunkt der Menge $\mathbf{M}_2$ von beiden Seiten. Da $\varphi(t)$ wachsend ist, ist offensichtlich $x_0 \leqq \bar{x}_0$.

Setzen wit jetzt voraus, daß $x_0 < \bar{x}_0$ ist. Nach R. 4,6 und R. 4,7 ist in diesem Fall $\alpha_1(x_0) = \alpha_1(\bar{x}_0)$ und deshalb muß auf dem Intervall $(x_0; \bar{x}_0)$ ein Extrempunkt ξ_0 existieren. Bezeichnen wir mit $\eta_0 = \varphi^{-1}(\xi_0)$. Es ist $\eta_0 \in \mathbf{M}_2$ und es können drei Möglichkeiten eintreten:

α) $\eta_0 < t_0$. Da t_0 ein Häufungspunkt der Menge $\mathbf{M}_2$ von links ist, existiert ein Punkt $\eta_1 \in \mathbf{M}_2$ so, daß $\eta_0 < \eta_1 < t_0$ ist. Deshalb ist $\xi_0 = \varphi(\eta_0) < \varphi(\eta_1) \leqq \sup \varphi(t) = x_0$. Das ist aber unmöglich, da $\xi_0 \in (x_0; \bar{x}_0)$ ist.

β) $\eta_0 > t_0$. Auf ähnliche Weise wie im Fall α kommen wir zu einem Widerspruch.

γ) $\eta_0 = t_0$. Das ist auch unmöglich, da $\eta_0 \in \mathbf{M}_2$, t_0 non $\in \mathbf{M}_2$ ist.

Also die Voraussetzung $x_0 \neq \bar{x}_0$ führt zum Widerspruch. Deshalb ist $x_0 = \bar{x}_0$. Wir können also im Fall $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$ als den Funktionswert der Funktion $\bar{\varphi}$ den Wert x_0 oder $\bar{x}_0$ annehmen.

III. Die Gleichheit $\alpha_2(t) = \alpha_1[\bar{\varphi}(t)]$ folgt im Fall $t_0 \in \mathbf{M}_2$ aus I. und D. 4,1 und im Fall $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$ aus II. und R. 4,6 resp. R. 4,7.

IV. Jetzt müssen wir noch beweisen, daß $\bar{\varphi}$ wachsend ist.

a) Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2$, $\bar{t}_0 \in \mathbf{M}_2$, $t_0 < \bar{t}_0$. Dann ist $\bar{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0) < \varphi(\bar{t}_0) = \bar{\varphi}(\bar{t}_0)$.

b) Es sei $t_0 \in \mathbf{M}_2$, $\bar{t}_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, $t_0 < \bar{t}_0$. Dann ist $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) = \varphi(t_0)$ und entweder $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) = \sup\limits_{\substack{t<t_0\\ t\in\mathbf{M}_2}} \varphi(t) \geqq \varphi(t_0) = \bar{\varphi}(t_0)$ oder $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) = \inf\limits_{\substack{t>t_0\\ t\in\mathbf{M}_2}} \varphi(t) \geqq \varphi(t_0) = \bar{\varphi}(t_0)$. Die letzte Ungleichheit folgt daraus, daß $\varphi(t)$ wachsend ist. Also jedenfalls gilt: $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) \geqq \bar{\varphi}(t_0)$. Setzen wir voraus, daß $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) = \bar{\varphi}(t_0)$ ist. Nach III. gilt:

$$\alpha_2(\bar{t}_0) = \alpha_1[\bar{\varphi}(\bar{t}_0)] = \alpha_1[\bar{\varphi}(t_0)] = \alpha_2(t_0),$$

Daraus folgt, daß die Funktion α_2 auf dem Intervall $(t_0; \bar{t}_0)$ einen Extremwert hat, d. h. daß ein Punkt $t_1 \in \mathbf{M}_2 \cap (t_0; \bar{t}_0)$ existiert. Aus a) folgt $\bar{\varphi}(t_0) < \bar{\varphi}(t_1)$. Da $t_1 \in M_2$, $\bar{t}_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, $t_1 < \bar{t}_0$ ist, ist $\bar{\varphi}(t_1) \leqq \bar{\varphi}(\bar{t}_0)$. Folglich $\bar{\varphi}(t_0) < \bar{\varphi}(\bar{t}_0)$. Das ist ein Widerspruch. Deshalb muß $\bar{\varphi}(\bar{t}_0) > \bar{\varphi}(t_0)$ sein.

c) Auf ähnliche Weise können wir auch im Fall $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, $\bar{t}_0 \in \mathbf{M}_2$ und $t_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$, $\bar{t}_0 \in \mathbf{M}_2' - \mathbf{M}_2$ fortsetzen. Damit ist der Beweis beendet.

Satz 4,4: Es sei $\mathbf{S}$ ein Raum mit dem Definitionsbereich $(a; b)$ und $\mathbf{M}$ die Menge aller Extrempunkte und Grenzpunkte des Intervalls $(a; b)$. Es sei $\overline{\mathbf{M}}$ die Abschließung der Menge $\mathbf{M}$. Dann ist die Menge $\mathbf{N} = \langle a; b\rangle - \overline{\mathbf{M}}$ in $(-\infty; +\infty)$ offen.

Beweis: Da $a \in \mathbf{M}$, $b \in \mathbf{M}$ ist, ist auch $a \in \overline{\mathbf{M}}$, $b \in \overline{\mathbf{M}}$, und deshalb gilt: $a \bar{\in} \mathbf{N}$, $b \bar{\in} \mathbf{N}$. Folglich $\mathbf{N} = \langle a; b\rangle - \overline{\mathbf{M}} = (a; b) - \overline{\mathbf{M}} = (a; b) \cap [(-\infty; +\infty) - \overline{\mathbf{M}}]$. Da $(a; b)$ und $(-\infty; +\infty) - \overline{\mathbf{M}}$ offen sind, ist auch $\mathbf{N}$ offen.

Satz 4,5: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4,3 erfüllt. Dann existiert eine stetige wachsende resp. fallende Funktion $x(t)$, die $(a_2; b_2)$ an $(a_1; b_1)$ abbildet und für die

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)]$$

für jedes $t \in (a_2; b_2)$ gilt.

Bemerkung 4,1: Im Beweis des S. 4,5, den wir wieder für den Fall der gerade kongruenten Phasen α_1 und α_2 führen werden, werden wir die

Funktionen α_1 und α_2 folgendermaßen verlängern: Wenn $\lim_{x\to a_i} \alpha_i(x) = l_i$ ist, so setzen wir $\alpha_i(a_i) = l_i$ $[l_i \in \langle -\infty; +\infty\rangle]$. Wenn $\lim_{x\to b_i} \alpha_i(x) = m_i$ ist, so setzen wir $\alpha_i(b_i) = m_i[m_i \in \langle -\infty; +\infty\rangle]$. Nach D. 4,1 ist $\alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2)$ und $\alpha_1(b_1) = \alpha_2(b_2)$. Wir werden dieselbe Bezeichnung wie in den Sätzen 4,2, 4,3 und 4,4 benützen.

Beweis des Satzes 4,5: Nach S.4,4 sind die Mengen $\mathbf{N}_i = \langle a_i; b_i\rangle - \overline{\mathbf{M}}_i$ in $(-\infty; +\infty)$ offen. Nach Satz 69 aus [7] können wir diese Mengen eindeutig als eine Vereinigung von offenen und paarweise punktfremden Intervallen schreiben, d. h.

$$N_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} (a_{ik}; b_{ik}) \qquad (i = 1,2),$$

wobei m_i entweder natürliche Zahlen oder $+\infty$ sind.

I. Wir werden zuerst zeigen, daß $m_1 = m_2$ ist. Es sei $(a_{2k}; b_{2k})$ irgendein Intervall aus $\mathbf{N}_2$. Dann sind $a_{2k} \in \overline{\mathbf{M}}_2$, $b_{2k} \in \overline{\mathbf{M}}_2$. Folglich ist $\overline{\varphi}(a_{2k}) \in \overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\varphi}(b_{2k}) \in \overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\varphi}(a_{2k}) < \overline{\varphi}(b_{2k})$. Wählen wir irgendeinen Punkt x so, daß $\overline{\varphi}(a_{2k}) < x < \overline{\varphi}(b_{2k})$. Wäre $x \in \overline{\mathbf{M}}_1$, so müßte $\overline{\varphi}^{-1}(x) \in \overline{\mathbf{M}}_2$ und gleichzeitig $a_{2k} < \overline{\varphi}^{-1}(x) < b_{2k}$ sein, was aber unmöglich ist, da $(a_{2k}; b_{2k}) \cap \overline{\mathbf{M}}_2 = 0$ ist. Daraus folgt, daß $(\overline{\varphi}(a_{2k}); \overline{\varphi}(b_{2k})) \subset N_1$ ist. Anderseits ist $\overline{\varphi}(a_{2k}) \in \overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\varphi}(b_{2k}) \in \overline{\mathbf{M}}_1$ und deshalb existiert eine natürliche Zahl j so, daß $\overline{\varphi}(a_{2k}) = a_{1j}$, $\overline{\varphi}(b_{2k}) = b_{1j}$ ist. Auf ähnliche Weise können wir auch zeigen, daß zu jedem natürlichen j ein solches natürliches k existiert, daß $\overline{\varphi}(a_{2k}) = a_{1j}$ ist. Es existiert also eine schlichte Abbildung der Menge $\{(a_{2k}; b_{2k})\}_{k=1}^{m_2}$ auf die Menge $\{(a_{1j}; b_{1j})\}_{j=1}^{m_1}$. Folglich können wir die Menge $\{(a_{1j}; b_{1j})\}_{j=1}^{m_1}$ so umnummerieren daß $(a_{1j}; b_{1j}) = (\overline{\varphi}(a_{2j}); \overline{\varphi}(b_{2j}))$ ist. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß sine solche Umnummerierung vorgenommen wurde.

II. Nach S. 4,3 und I. ist $\alpha_1(a_{1j}) = \alpha_2(a_{2j})$ und $\alpha_1(b_{1j}) = \alpha_2(b_{2j})$ für jedes natürliches j und auf den Intervallen $(a_{1j}; b_{1j})$ und $(a_{2j}; b_{2j})$ befindet sich kein Extrempunkt. Deshalb sind die Funktionen α_1 und α_2 auf diesen Intervallen monoton (und zwar gleichzeitig wachsend oder fallend) und haben denselben Wertevorrat. Dabei nimmt die Funktion α_1 sowie auch die Funktion α_2 jeden Wert aus diesem Wertevorrat gerade in einem Punkt an. Folglich existiert zu jedem $t_0 \in (a_{2j}; b_{2j})$ gerade ein $x_0 \in (a_{1j}; b_{1j})$ so, daß

R. 4,8 $$\alpha_1(x_0) = \alpha_2(t_0)$$

gilt. Wir können die Funktion $x(t)$ folgendermaßen definieren:

$$x(t_0) = \begin{cases} \bar{\varphi}(t_0) & \text{für } t_0 \in \mathbf{M}_2 \\ x_0 & \text{für } t_0 \in (a_{2j};\ b_{2j}), \end{cases}$$

wobei x_0 ein solcher Punkt aus $(a_{1j};\ b_{1j})$ ist, für den R. 4,8 gilt. Diese Funktion bildet das Intervall $\langle a_2;\ b_2\rangle$ auf das Intervall $\langle a_1;\ b_1\rangle$ ab.

III. Jetzt werden wir zeigen, daß die Funktion $x(t)$ wachsend ist. Es seien $t_1 \in \langle a_2;\ b_2\rangle$, $t_2 \in \langle a_2;\ b_2\rangle$, $t_1 < t_2$.

a) Wenn $t_1 \in \bar{\mathbf{M}}_2$, $t_2 \in \bar{\mathbf{M}}_2$ ist, so ist:

$$x(t_1) = \bar{\varphi}(t_1) < \bar{\varphi}(t_2) = x(t_2).$$

b) Wenn $t_1 \in \bar{\mathbf{M}}_2$, $t_2 \in \mathbf{N}_2$ ist, so existiert ein natürliches j so, daß $t_2 \in (a_{2j};\ b_{2j})$ ist und es gilt: $t_1 \leqq a_{2j} < t_2 < b_{2j}$. Aus der Definition der Funktion $x(t)$ folgt:

$$x(t_1) = \bar{\varphi}(t_1) \leqq \bar{\varphi}(a_{2j}) < x(t_2).$$

c) Auf ähnliche Weise können wir im Fall $t_1 \in \mathbf{N}_2$, $t_2 \in \bar{\mathbf{M}}_2$ fortsetzen.

d) Wenn $t_1 \in \mathbf{N}_2$, $t_2 \in \mathbf{N}_2$ ist, existieren die Indizien j und k so, daß $t_1 \in (a_{2j};\ b_{2j})$, $t_2 \in (a_{2k};\ b_{2k})$ und $j \leqq k$ ist. Wenn $j < k$ ist, ist $t_1 < b_{2j} \leqq \leqq a_{2k} < t_2$ und daraus

$$x(t_1) < \bar{\varphi}(b_{2j}) \leqq \bar{\varphi}(a_{2k}) < x(t_2).$$

Wenn $j = k$ ist, ist $a_{2j} < t_1 < t_2 < b_{2j}$. Auf den Intervallen $(a_{1j};\ b_{1j})$ und $(a_{2j};\ b_{2j})$ sind nach II. die Funktionen α_1 und α_2 gleichzeitig wachsend oder fallend und es gilt

$$\alpha_1[x(t_1)] = \alpha_2(t_1); \qquad \alpha_1[x(t_2)] = \alpha_2(t_2).$$

Wenn α_1 und α_2 fallend sind, so ist $\alpha_2(t_1) > \alpha_2(t_2)$ und deshalb auch $\alpha_1[x(t_1)] > \alpha_1[x(t_2)]$. Daraus erhalten wir: $x(t_1) < x(t_2)$. Wenn α_1 und α_2 wachsend sind, so ist $\alpha_2(t_1) < \alpha_2(t_2)$ und deshalb auch $\alpha_1[x(t_1)] < \alpha_1[x(t_2)]$. Daraus bekommen wir wieder $x(t_1) < x(t_2)$.

IV. Die Funktion $x(t)$ bildet das Intervall $(a_2;\ b_2)$ auf das Intervall $(a_1;\ b_1)$ ab und ist monoton. Deshalb ist sie stetig.

V. Nach II. und S. 4,3 gilt für jedes $t \in (a_2;\ b_2)$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)].$$

Der Beweis ist damit zur Ende geführt.

Satz 4,6: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer vollständigen Transformation des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ mit einer wachsenden (fallenden) Amplitude ist: Die Räume $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ sind gerade (ungerade) ähnlich.

Beweis: I. Es seien S_1 und S_2 z. B. gerade ähnlich. Dann existieren gerade kongruente Phasen α_1 und α_2 dieser Räume. Konstruieren wir die Funktion $x(t)$ nach S. 4,5. Sie ist in $(a_2; b_2)$ definiert, sie ist dort wachsend und stetig und ihr Wertevorrat ist $(a_1; b_1)$. Für jedes $t \in (a_2; b_2)$ gilt: $\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)]$. Nach S. 3,2 existiert eine vollständige Transformation des Raums S_1 auf S_2.

II. Die Umkehrung des Satzes folgt aus S. 4,1 und D. 4,3.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Borůvka, O kolebljuščichsja integralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo porjadka. Čech. mat. ž., 3 (78) 1953, 199—251.
[2] O. Borůvka, Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., 41, 1956, 325—342.
[3] O. Borůvka, Sur les transformations differéntielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., 49, 1960, 229—251.
[4] O. Borůvka, Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. Ann. di Mat. p. ed app., IV, 71, 1966, 165—187.
[5] O. Borůvka, Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. An Stiint. a. Univ. „Al. I. Cuza" din Iasi. XI_B, 1965, 217—238.
[6] K. Stach, Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno No 478, 389—410 (1966).
[7] V. Jarník: Diferenciální počet II, Praha 1956.

ПОЛНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КУММЕРА ДВУХДИМЕНЗИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Резюме

О. Борувка в своих работах занимался вопросами преобразования решений двух дифференциальных уравнений 2-го порядка, т. н. преобразованиями Куммера. Особенное место в этой теории занимают полные преобразования.

Я занимался по совету О. Борувки в своей работе [6] вопросом, какие свойства этих преобразований зависят только от того, что мы преобразуем двухдимензиональные пространства непрерывных функций.

В данной работе я продолжаю разбор этого вопроса и хочу показать, какие свойства должны выть присущи двум двухдимензиональным пространствам непрерывных функций, что бы возможно было полностью преобразовать одно в другое преобразованием типа Куммера. В теореме 4,6 я доказываю, что существование этого преобразования зависит от расположения т. н. экстремальных точек.