Marian Malec

Sur les intégrales d'une équation différentielle ordinaire, linéaire et homogène et sur une classification des fonctions de classe C^∞ dans l'intervalle Δ

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 3, 105--115

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104636`

SUR LES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE, LINÉAIRE ET HOMOGÉNE ET SUR UNE CLASSIFICATION DES FONCTIONS DE CLASSE C^∞ DANS L'INTERVALLE Δ.

Par Marian MALEC (CRACOVIE)

Présenté le 6 Février 1967

M. Z. Moszner dans sa note [1] a demontré la condition nécessaire et suffisante suivante:

Théorème T: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système des fonctions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *de classe* C^n *dans l'intervalle* Δ *soit dans cet intervalle un système d'intégrales pour l'équation de la forme*

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{(i-1)} \tag{1}$$

dans laquelle $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions continues dans l'intervalle* Δ, *est que le rang de la matrice*

$$W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ \varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}, \ldots, \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

soit constant dans l'intervalle Δ.

Il est tout naturel de se poser un problème suivant: est-que le téorème T restera vrai, si au lieu de supposer que le rang de la matrice $W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est constant, nous supposons que le rang de la matrice

$$W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l \\ \varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_l' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(s-1)}, \ldots, \varphi_l^{(s-1)} \end{pmatrix}$$

est constant pour 1 et s arbitraires par rapport à n.

Par la suite nous désignerons toujours par n le rang de l'équation différentielle de la forme (1), par 1 — le nombre des fonctions φ_i, par s — le nombre des lignes de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$, et par p — le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ dans l'intervalle Δ (dans le cas s'il est constant dans Δ).

Le problème ci-dessus a été résolu complètement dans la partie II de cette note par les théorèmes T_1 et T_2.

La partie I est consacrée à une classification de l'ensemble X des fonction de classe C^∞ dans l'intervalle Δ. A savoir

$$X = Y^* + \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y^* + \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$$

où Y^* est l'ensemble des fonctions de l'ensemble X, qui ne sont des intégrales d'aucune équation différentielle, ordinaire, linéaire et homogène (en abrégé une équation de cette sorte sera nommée: l'équation) aux coefficients de classe C^∞ dans Δ; à l'ensemble Y_i appartiennent tous les élements de l'ensemble X, qui sont les solutions d'une équation de rang i aux coefficients de classe C^∞ dans Δ, tandis que nous définirons Z_i de façon suivante:

$$Z_1 \overset{\mathrm{df}}{=} Y_1, \qquad Z_i = Y_i \setminus Y_{i-1} \qquad \text{pour} \qquad i = 2, 3, \ldots$$

Par suite de la clasification susdite dans la partie I sont données les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction φ soit l'élement de l'ensemble Z_i (théorèmes t_1 et t_2).

PARTIE I

1. Introduction.

Suivant avec attention la démonstration du théorème T (voir [1]) il est facile de démontrer, que la proposition suivant est vrai:

I. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système des fonctions

$$(2) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

de classe C^{n+k} (peut être $k = \infty$) dans l'intervalle Δ, soit dans cet intervalle un système d'intégrales d'une équation de forme (1) dans laquelle $f_i(x)$ sont de classe C^k dans Δ, est que le rang de la matrice $W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ soit constant dans Δ.

Il résulte des théorème T et I que:

II. Si les fonctions (2) sont de classe C^{n+k} dans l'intervalle Δ et sont dans cet intervalle un système d'intégrales pour l'équation (1) aux coefficients continus, elles sont également un système d'intégrales pour l'équation de forme (1) aux coefficients de classe C^k dans Δ.

Nous voyons qu'il est facile démontrer les propositions suivantes:

III. Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de classe C^{n+k} dans Δ sont dans cet intervalle des intégrales de l'équation (1) aux coefficients de classe C^k dans Δ, elles sont également des intégrales d'une équation de rang $n + m$, pour $m = 1, 2, \ldots, k$, aux coefficients de classe C^{k-m} dans Δ.

IV. Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de classe C^∞ dans l'intervalle Δ sont dans cet intervalle des intégrales de l'équation de forme (1) aux coefficients de classe C^∞ dans Δ, elles sont également des intégrales pour équation de rang $n + m$ pour $m = 1, 2, \ldots$ aux coefficients de classe C^∞ dans Δ.

Comme corollaire du théorème IV nous obtenons.

V. Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de classe C^∞ dans l'intervalle Δ ne sont des solutions d'aucune équation de forme (1) aux coefficients de classe C^∞, également elles ne sont des intégrales d'aucune équation de rang $k < n$, aux coefficients de classe C^∞ dans Δ.

Donnons maintenant un exemple d'une fonction de classe C^∞ qui est une intégrale de l'équation de rang n, mais qui n'est la solution d'aucune équation de rang inférieur à n aux coefficients de clase C^∞.

Exemple 1. Soit $f(x) = \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^{n-1}$ pour $x \in [a, b]$. Cette fonction est de classe C^∞ dans $[a, b]$ et comme $f^{(n)}(x) \underset{[a,b]}{\equiv} 0$ elle est donc la solution de l'équation de forme (1) aux coefficients de classe C^∞. Nous voyons que $f(x)$ ne peut être la solution d'aucune équation de rang $n - 1$ car $f^{(n-1)}(x) \underset{[a,b]}{\equiv} (n-1)!$ et $f^{(i)}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-2$. D'après cela et à partir de la proposition V nous en déduisons que $f(x)$ ne peut être la solution d'aucune équation de rang inférieur à n.

Maintenant nous donnons un exemple d'une fonction de classe C^∞ qui pour chaque n n'est la solution d'aucune équation de rang n.

Exemple 2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{1}{(x-a)(b-x)}\right] & \text{pour } x \in (a, b) \\ 0 & \text{pour } x = a \text{ et } x = b. \end{cases} \tag{3}$$

On sait que:

(4) $f(x)$ est de classe C^∞ dans l'intervalle $[a, b]$.

De plus, les dérivées à droite en point a et les dérivées à gauche en point b de rang quelconque de $f(x)$ sont égales à zéro, donc

(5) $f_+^{(n)}(a) = f_-^{(n)} \varphi - (b) = 0$ pour $n = 0, 1, \ldots$ où $f^{(0)}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x)$

(6) il existe pour chaque n un point $x_n \in (a, b)$ tel que $f^{(n)}(x_n) \neq 0$.

Il est évident que si $f^{(n)}(x) \underset{(a,b)}{\equiv} 0$, alors $f(x)$ serait dans l'intervalle (a, b) un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$, ce qui est contraire à la forme de la fonction $f(x)$.

Désignons maintenant:

$$F(x) = \begin{cases} (x - x_n)^n \exp\left[-\dfrac{1}{\left(x - a - \dfrac{b-a}{2^n}\right)\left(a + \dfrac{b-a}{2^{n-1}} - x\right)}\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{pour } x \in \left(a + \dfrac{b-a}{2^n}, a + \dfrac{b-a}{2^{n-1}}\right) \\ 0 \qquad\qquad \text{pour } x = a + \dfrac{b-a}{2^n} \text{ et } x = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \end{cases}$$

où x_n est un point de l'intervalle $\left(a + \dfrac{b-a}{2^n}, \quad a + \dfrac{b-a}{2^{n-1}}\right)$ tel que

$$\left(\exp\left[-\frac{1}{\left(x - a - \dfrac{b-a}{2^n}\right)\left(a + \dfrac{b-a}{2^{n-1}} - x\right)}\right]\right)^{(n)}_{x=x_n} \neq 0,$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ [voir (6)].

Il résulte de la forme de la fonction $F(x)$ et de (4) et (5) que $F(x)$ est de classe C^∞ dans $(a, b]$. En dehors de cela:

(7) $F^{(i)}(x_n) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$ et $F^{(n)}(x_n) \neq 0$ pour chaque n.

Il résulte de (7) que la fonction $F(x)$ ne peut pas être l'intégrale de l'équation de rang n dans l'intervalle $(a, b]$ pour aucun n.

2. Classification des fonctions de classe C^∞ dans l'intervalle Δ.

Nous donnerons maintenant quelques propriétés des ensembles Y_i et Z_i, définis au début de cette note.

1. L'ensemble Y_i pour chaque i n'est pas un ensemble vide, puisque par exemple la fonction identiquement nulle appartient à Y_i.

2. Chaque ensemble Y_i forme un espace linéaire au-dessus du corps des nombres réels par rapport à l'addition des fonctions et à la miltiplication par un nombre.

3. Pour chaque $k < 1$, $Y_k \subset Y_l$. Ce fait résulte directement de IV (voir p. 107).

4. La différence $Y_l - Y_k$ n'est pas un ensemble vide pour $k < 1$. En effet si $a, b \in \Delta$, alors la fonction $y = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{l-1}$ appartient à $Y_l - Y_k$ (voir exemple 1).

Voyons à présent que:

A. $Z_i \neq \varnothing$ pour $l = 1, 2, \ldots$ (voir les propriétes 1 et 4 des l'ensembles Y_i).

B $Z_l \cap Z = \varnothing_l$ pour $1 \neq k$.

C. Si $\varphi \in Z_l$, alors $\alpha\varphi \in Z_i$ où α est un nombre réelle quelconque différent de zéro.

D. Les ensembles Z_l pour $l > 1$ ne sont pas des espaces linéaires au dessus du corps des nombres réelles. En effet si $\varphi \in Z_l$, alors $-\varphi \in Z_l$ (voir C) mais $\varphi - \varphi \notin Z_l$ pour $l > 1$.

Pour caractériser l'ensemble Z_i nous donnons maintenant certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction φ appartienne à l'ensemble Z_i.

Théorème t_1: *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction φ de classe C^∞ dans l'intervalle Δ soit l'élement de l'ensemble Z_1 est que $\varphi(x) \underset{\Delta}{\equiv} 0$ ou $\varphi(x) \neq 0$ pour chaque $x \in \Delta$.*

Théorème t_2: *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction φ de classe C^∞ dans l'intervalle Δ soit un élément de l'ensemble Z_l $(l \geqq 2)$ est que:*

(a) *il existe un point $x_0 \in \Delta$ tel que $\varphi^{(i)}(x_0) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, l-2$.*

(b) *pour chaque $x_1 \in \Delta$, si $\varphi^{(i}(x_1) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, l-2$* alors *$\varphi^{(l-1)}(x_1) \neq 0$.*

La démonstration du théorème t_1 est facile, la démonstration du théorème t_2 résulte directement du théorème I (page 2) si nous posons $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$.

PARTIE II

Cette partie est consacrée aux généralisations de la condition necéssaire et de la condition suffisante du théorème T, signalées au debut de cette note.

Théorème T_1: *Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de classe C^s dans l'intervalle Δ sont dans cet intervalle les intégrales de l'équation* (1) *et $s \geqq n$, alors le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est constant dans l'intervalle Δ.*

Pour la démonstration il suffit de poser que $1 \leqq n$. En effet, si $1 > n$, alors nous désignerons par $A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ l'espace linéaire qui s'étend sur les éléments $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, et par dim $A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ la dimension de celle-ci. En utilisant la théorie des équations differentielles, ordinaires nous obtenons dim $A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l) = r \leqq n$, donc le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal au rang de la matrice $W_s(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_r})$ pour chaque $x \in \Delta$, où $1 \leqq i_k \leqq 1$ pour $1 \leqq k \leqq r$.

Nous supposons maintenant que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ pour $1 \leqq n$ sont des solutions de l'équation (1), alors d'après le théorème T et III (voir p. 107) les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont également les integrales pour une certaine équation de rang s dans l'intervalle Δ. Il resulte d'après le théorème T que le rang de la matrice W_s $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, \underbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_1}_{s-l \text{ fois}})$ est constant dans l'intervalle Δ.

Nous pouvons obtenir égalément la démonstration du théorème T_1 n'ayant pas recours aux théorèmes I, II et III.

Remarque 1. Le théorème T_1 n'est pas vrai dans le cas où $s < n$, indépendamment de l. En effet soit $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_l = \varphi$ dans l'intervalle Δ où φ est une fonction quelconque de l'ensemble Z_n (voir page 106) où $n \geqq 2$. Il resulte du théorème t_2 (la condition (a) et (b)) que le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ ne peut pas être constant dans l'intervalle Δ.

Théorème T_2: *Si*

1° *les fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_l$ sont de classe C^n dans l'intervalle Δ*
2° *le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal à p pour chaque $x \in \Delta$*
3° $n \geqq s$
4° *si $l > s$, alors $p < s$,*

alors les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont les intégrales de l'équation (1) *dans l'intervalle Δ.*

Il resulte du lemme suivant:

Lemme: *Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont de classe C^{k+1} dans l'intervalle Δ et le rang de la matrice $W_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal à p pour chaque $x \in \Delta$ et $p <$ min $(1, k)$, alors le rang de la matrice est égale p pour chaque $x \in \Delta$ $W_{k+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$;*

et des I, II, III (page 106 et 107) que pour démontrer le théoreme T_2 il suffit d'examiner seulement les deux cas suivants:

$A.\ 1 \leqq n = s$

$B.\ 1 > n \geqq s > p$

Démonstration du lemme: Supposons qu'il existe pour un certain $x_0 \in \Delta$ le mineur M de degré $p+1$ de la matrice $W_{k+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$. différent du zéro en x_0. Comme le mineur M est une fonction continue de la variable x, alors il existe un entourage δ du point x_0 tel que $M \neq 0$ pour $x \in \delta$ (par entourage δ du point x_0 nous comprenons entourage par rapport à l'intervalle Δ). Désignons par $l_1, l_2, \ldots, l_{p+1}$ le numéros des colonnes de la matrice $W_{k+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ dont les élements sont les éléments du mineur M. Comme le rang $W_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l) \underset{\Delta}{\equiv} p < \min(l, k)$, alors

$$\det W_{p+1}(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \ldots, \varphi_{l_{p+1}}) \underset{\delta}{\equiv} 0 \tag{8}$$

Il s'ensuit de l'identité (8) (voir [2]) qu'il existe un sous-intervalle δ^* dans l'intervalle δ, dans lequel les fonctions $\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \ldots, \varphi_{l_{p+1}}$ sont linéairement dépendantes, donc il existe des constantes C_i ($i = 1, 2, \ldots, p+1$) telles que

$$\sum_{i=1}^{p+1} C_i \varphi_{l_i} \underset{\delta^*}{\equiv} 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p+1} C_i^2 > 0 \tag{9}$$

En différentiant de l'identité (9) un nombre de fois voulu il est facile de montrer que le mineur M doit être identiquement égal à zéro dans δ^* ce qui est contraire au fait que $M \neq 0$ pour $x \in \delta$.

Démonstration du théorème T_2.

Ad A. Remarquons que le rang de la matrice $W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal au rang de la matrice $W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, \underbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_1}_{n-l \text{ fois}})$ pour chaque $x \in \Delta$, alors d'après le théorème T le système des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ est un système pour l'équation de forme (1) dans l'intervalle Δ.

Ad B. Soit $x_0 \in \Delta$, alors d'après la supposition il existe un mineur M de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ de degré $p < s$ différent du zéro au point x_0. Comme M est une fonction continue, alors il existe un entourage δ du point x_0 tel que $M \neq 0$ pour chaque $x \in \delta$. Changeant des indices des fonction $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ nous pouvons supposer que le mineur M est formé des p premières colonnes de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$. Alors le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ est égal à p pour chaque $x \in \delta$.

Supposons à présent qu'il existe un point $x_1 \in \Delta$ tel que le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ au point x_1 est égal à $p_1 < p$. Nous pouvons supposer que x_1 est l'extremité de l'intervalle δ. Puisque rang $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_k) =$ rang $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) = p$ pour chaque $x \in \delta$ et $k = p+1, p+2, \ldots, 1$, alors — pour $r = p + 1$ — les suppositions du théorème suivant sont satisfaites.

Théorème H: *Si*

1° *les fonctions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ *sont de classe* C^s *dans l'intervalle* δ
2° *le rang de la matrice* $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ *est égal à* p *pour chaque* $x \in \delta$
3° $s > \min(r-1, p)$,

alors il existe un système des constants $C_{\alpha\beta}(\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ \beta = 1, 2, \ldots, p)$ *tel que* $\sum_{\alpha=1}^{r} C_{\alpha\beta}\varphi_\alpha(x) = 0$ *pour chaque* $x \in \delta$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$ *et le rang de la matrice* $\| C_{\alpha\beta} \|$ *est égal à* p., (voir [2] p. 177 et les remarques complementaires dans la note [3] p. 262*)).

De là nous avons pour k fixé $(p + 1 \leqq k \leqq 1)$ $\sum_{\alpha=1}^{p} C_{\alpha\beta}\varphi_\alpha(x) + C_{p+1\beta}\varphi_k(x) = 0$ pour chaque $x \in \delta$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$ et le rang de la matrice $\| C_{\alpha\beta} \|$ est égal à p. Soit $C_{p+1,1} = 0$, alors

$$(*) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} C_{\alpha 1}\varphi_\alpha(x) = 0 \text{ pour chaque } x \in \delta.$$

Ce n'est pas vrai que $\sum_{\alpha=1}^{p+1} C_{\alpha 1}^2 = 0$ parce que le rang $\| C_{\alpha\beta} \| = p$ et d'apres (*) nous concluons que le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ ne peut pas être égal à p dans l'intervalle δ. Il s'ensuit de là que $C_{p+1,1} \neq 0$ donc chaque fonction φ_k $(p + 1 \leqq k \leqq 1)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dans l'intervalle δ. Il resulte de là et de la continuité des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ dans l'intervalle Δ que chaque fonction $\varphi_k(p + 1 \leqq k \leqq 1)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dans $\bar{\delta}$. Par conséquent

rang $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)_{x=x_1} =$ *rang* $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)_{x=x_1} = p_1 < p$

*) Les remarques complémentaires dans la note [3] ont été faites pour le schéma de Haupt qui n'embrasse pas le cas des fonctions réelles. D'ailleurs il est facile de montrer que les remarques mentionnées sont vraies également pour cas dermières.

ce qui est en contradiction avec le fait que le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal à p pour chaque $x \in \Delta$. Donc nous avons montré que le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ est égal à p pour chaque $x \in \Delta$, alors d'après le lemme le rang de la matrice $W_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \underbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_1}_{n-p \text{ fois}})$ est égal à p dans l'intervalle Δ. D'après le théorème T les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ sont donc les intégrales d'une équation de la forme (1). Mais

$$rang\ W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_k) = rang\ W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) = p$$

pour chaque $x \in \Delta$ et $k = p+1, p+2, \ldots, 1$. Alors chaque fonction $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \ldots, \varphi_l$ est une cominaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dans Δ (ce fait nous l'avons montré ci-dessus pour l'intervalle δ — la démonstration pour l'intervalle Δ est analoque). Par conséquent les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont dans l'intervalle Δ les intégrales d'une équation de la forme (1).

La démonstration du théorème $\mathbf{T}_2$ est ainsi terminée.

Remarque II: Les suppositions 3° et 4° du théorème $\mathbf{T}_2$ sont essentielles. Le théorème $\mathbf{T}_2$ n'est pas vrai dans le cas où $n < s$, même si la condition 4° serait remplie.

Exemple. Soit $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_l = \varphi$ où φ est une fonction quelconque de l'ensemble $Z_s (s \geqq 2)$. Alors d'après le théorème t_2 (la condition (a) et (b)) nous avons

$$rang\ W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l) = rang\ \| \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(s-1)} \| = 1$$

pour chaque $x \in \Delta$.

Mais la fonction φ ne peut être la solution d'aucune équation de rang $n < s$.

La théorème $\mathbf{T}_2$ n'est pas vrai non plus dans le cas $1 > s = p$ (évidement il ne peut pas être $p > s$), même si la condition 3° serait remplie.

Exemple. Soit

$$\varphi_1 = x^{s-1},\ \varphi_2 = x^{s-2}, \ldots, \varphi_{s-1} = x,\ \varphi_s \equiv 1,\ \varphi_{s+1} = \varphi_{s+2} = \ldots = \varphi_l = \varphi$$

où $s \leqq n$, $1 > s$ et $\varphi \in Z_k$ pour un $k > n$. Alors le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$ est égal à s pour chaque x, car le mineur $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ est toujours différent de zéro, tandis qu'il est facile de montrer que le système $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ ne peut être la solution d'aucune équation de rang n puisque $k > n$.

Désignons maintenant par (a) et (b) les propositions suivantes:

(a) le rang de la matrice $W_s(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_l)$ est égal à p pour chaque $x \in \Delta$

(b) les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ de classe $C^{\max(n,s)}$ dans l'intervalle Δ sont dans cet intervalle un système d'intégrales pour l'équation (1) aux coéfficients continues dans Δ.

La proposition suivante „si (a), alors (b)" nous l'écrirons $(a) \to (b)$. Analogiquement la proposition „si b, alors a" nous l'écrirons sous la forme $(b) \to (a)$. Si (b) ne résulte pas de (a) ou si (a) ne résulte pas de (b), alors nous écrivons $(a) \nrightarrow (b)$ ou $(b) \nrightarrow (a)$.

Nous pouvons écrire les résultats de la partie II de cette note sous la forme du tableau suivant:

$l = n$	$s = n$			$(a) \rightleftarrows (b)$
	$s > n$			$(b) \to (a)$, $(a) \nrightarrow (b)$
	$s < n$	$p < s$		$(a) \to (b)$, $(b) \nrightarrow (a)$
		$p = s$		$(a) \not\rightleftarrows (b)$
$l < n$	$s = n$			$(a) \rightleftarrows (b)$
	$s > n$			$(b) \to (a)$, $(a) \nrightarrow (b)$
	$s < n$	$s \geqq l$		$(a) \to (b)$, $(b) \nrightarrow (a)$
		$s < l$	$p < s$	$(a) \to (b)$, $(b) \nrightarrow (a)$
			$p = s$	$(a) \not\rightleftarrows (b)$
$l > n$	$s = n$	$p < s$		$(a) \rightleftarrows (b)$
		$p = s$		$(b) \to (a)$, $(a) \nrightarrow (b)$
	$s > n$			$(b) \to (a)$, $(a) \nrightarrow (b)$
	$s < n$	$p < s$		$(a) \to (b)$, $(b) \nrightarrow (a)$
		$p = s$		$(a) \not\rightleftarrows (b)$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. Moszner, „Sur les intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène", Publ. Fac. Sci Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 437 (1962), p. 425—431.

[2] Z. Moszner, „Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions", Bull. Sc. Math. 2 série, 85 (1961), p. 165—190.

[3] Z. Moszner, „Supplément aux théorèmes de O. Haupt sur le wronskien". Akad. d. Wiss. u. d. Lit. in Mainz, Abh. d. math./nat. Kl. nr 5 (1965), p. 259—263.