Oldřich Kopeček

Allgemeine Kardinaloperationen

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 1, 35--44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104627`

ALLGEMEINE KARDINALOPERATIONEN

OLDŘICH KOPEČEK, BRNO

Eingegangen am 15. November 1966

1. EINLEITUNG

G. Birkhoff hat in seiner Arbeit [2] sechs Operationen für geordnete Mengen definiert: Kardinalsumme, Kardinalprodukt, Kardinalpotenz, Ordinalsumme, Ordinalprodukt und Ordinalpotenz. M. M. Day hat in der Arbeit [3] die Operationen der lexikographischen Summe und des lexikographischen Produktes so eingeführt, daß die Kardinalsumme, die Ordinalsumme und das Ordinalprodukt für zwei geordnete Mengen in der lexikographischen Summe und das Kardinalprodukt, das Ordinalprodukt und die Ordinalpotenz im lexikographischen Produkt als Spezialfälle enthalten sind. Die lexikographische Summe hat also das Kardinalprodukt und das lexikographische Produkt die Kardinalpotenz „nicht getroffen" (wie wir daran in der Arithmetik der natürlichen Zahlen gewöhnt sind). Diesen Mangel versuchen wir jetzt durch die Einführung der sogenannten allgemeinen Kardinaloperationen — der allgemeinen Kardinalsumme und des allgemeinen Kardinalproduktes — zu beseitigen.

Zuerst erinnern wir uns nur an die Bezeichnung der Operationen für geordnete Mengen, deren Definitionen z. B. in der Arbeit [3] genau angeführt werden. Es sei $\{M_\iota \mid \iota \in G\}$ das geordnete System von geordneten Mengen und P, Q zwei geordnete Mengen. Es sei ferner G eine Gegenkette; dann bezeichnen wir die Kardinalsumme mit $\sum_{\iota \in G} M_\iota$, das Kardinalprodukt mit $P.Q$, $\prod_{\iota \in G} M_\iota$, die Kardinalpotenz mit P^Q. Es sei im Gegenteil G eine Kette, dann bezeichnen wir die Ordinalsumme mit $\sum^o_{\iota \in G} M_\iota$. Das Ordinalprodukt bezeichnen wir mit $P \circ Q$. Die lexikographische Summe wird mit $\sum^l_{\iota \in G} M_\iota$ bezeichnet.

Die Beweise geben wir nur bei dem assoziativen Gesetze der allgemeinen Operationen an, andere kann der Leser leicht selbst rekonstruieren.

2. DIE ALLGEMEINE KARDINALSUMME

Es seien A_1, A_2 Untermengen einer geordneten Menge M. Dann schreiben wir $A_1 \varepsilon A_2$ dann und nur dann, wenn für beliebige $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ die Beziehung $a_1 \leqq a_2$ gilt. Wenn $\overline{M}$ eine Zerlegung auf der Menge M

mit den Klassen $A \in \overline{M}$ ist, dann ist die Relation ε eine strenge Ordnung auf der Zerlegung $\overline{M}$; wir bezeichnen sie mit $<$.

Fernerhin werden wir uns in diesem Artikel mit der folgenden Situation beschäftigen: es seien stets M, G, M_ι solche geordnete Mengen, daß jedem $\iota \in G$ die geordnete Menge $M_\iota \subseteq M$ zugeordnet ist; es sei also ein geordnetes System von geordneten Mengen — kurz ein System — $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ gegeben.

1. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Sei $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota$ die Menge aller geordneten Paare (ι, a_ι), wo $\iota \in G$, $a_\iota \in M_\iota$, auf welcher die Ordnung auf folgende Weise definiert ist: für beliebige (ι_1, a_{ι_1}), $(\iota_2, b_{\iota_2}) \in \overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota$ gilt

$(\iota_1, a_{\iota_1}) \leqq (\iota_2, b_{\iota_2})$, dann und nur dann, wenn $\iota_1 \leqq \iota_2$ und $a_{\iota_1} \leqq b_{\iota_2}$ in M.

Dann heißt $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota$ die *allgemeine Kardinalsumme.*

2. Definition: Das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ heißt *isoton*, wenn aus $\iota_1 < \iota_2$ stets $M_{\iota_1} \varepsilon M_{\iota_2}$ folgt.

3. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Die Formel*

$$\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota = \underset{\iota \in G}{\Sigma^l} M_\iota$$

gilt dann und nur dann, wenn das System isoton ist.

4. Bemerkung: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Wenn G eine Gegenkette ist, dann gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota = \underset{\iota \in G}{\Sigma} M_\iota$; wenn das System isoton ist und wenn G eine Kette ist, dann gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota = \underset{\iota \in G}{\Sigma^\sigma} M_\iota$.*

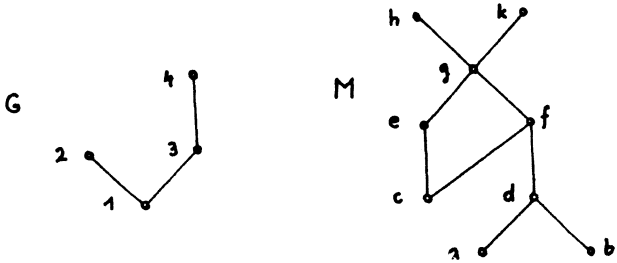
5. Bemerkung: *Es sei $\{M_\iota \mid M \supseteq M_\iota \cong N, \iota \in G\}$ ein isotones System. Dann gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota \cong G \circ N$.*

6. Lemma: *Für ein beliebiges System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ gilt $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota \subseteq G.M$.*

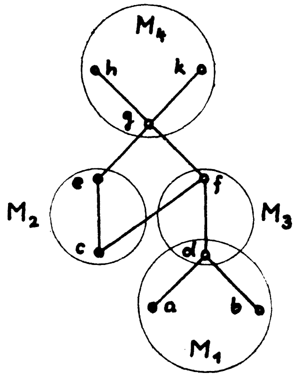
7. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota = M, \iota \in G\}$ ein System. Dann gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Sigma}} M_\iota = G.M$.*

Die Behauptung der Bemerkung 5 folgt aus den bekannten Eigenschaften der lexikographischen Summe, denn diese Summe in unserer neuen Operation als Spezialfall enthalten ist. Überdies sehen wir aber aus dem Satz 7, daß das Kardinalprodukt für zwei geordnete Mengen auch in der allgemeinen Kardinalsumme als Spezialfall enthalten ist und so erfüllt es unsere Forderungen, die in der Einleitung angegeben sind.

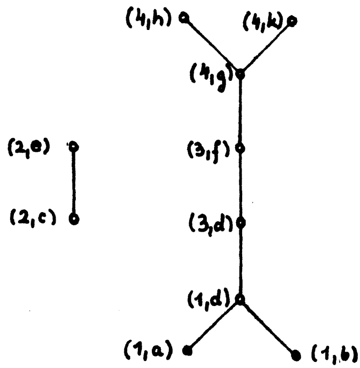
8. Beispiel: Es seien M, G folgende geordnete Mengen:



Wir wählen ein System von Untermengen $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M,\ \iota \in G\}$ wie folgt:



Dann hat die geordnete Menge $\sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ folgendes Diagramm:



9. Satz: *Es seien M, G geordnete Mengen, die fest gegeben sind. Dann ist die Menge aller Untermengen der geordneten Menge $G.M$ gleich der Menge aller allgemeinen Kardinalsummen* $\sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$.

In der Tat: Eine Inklusion folgt aus Lemma 6. Umgekehrt sei $X \subseteq G.M$ eine beliebige Untermenge. Wir setzen $G_X = \{\iota \mid \iota \in G, a \in M$ exist. so, daß $(\iota, a) \in X\}$, $M_\iota = \{a \mid a \in M, (\iota, a) \in X\}$ und ferner setzen wir $M_\iota = \emptyset$ für jedes $\iota \in G - G_X$. Wir sehen sofort, daß $X = \sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ gilt und daher auch die Gleichheit der Menge aller Untermengen der Menge $G.M$ und der Menge aller allgemeinen Kardinalsummen $\sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ in Kraft ist.

3. DAS ASOZIATIVE GESETZ DER ALLGEMEINEN KARDINALSUMME

10. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System und es sei $\overline{G}$ eine solche Zerlegung auf der Menge G, daß die Formel $G \cong \sum\limits_{T \in \overline{G}}^{l} T$ gilt. Es sei fernerhin das System $\{\bigcup\limits_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$ isoton. Dann gilt die Formel*

$$\sum_{\iota \in G}^{M} M_\iota \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} \sum_{\iota \in T}^{M} M_\iota .$$

Beweis: Es sei $x = (\iota, a) \in \sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$, dann gilt $a \in M_\iota$ und existiert ein Element $T_0 \in \overline{G}$ so, daß $\iota \in T_0$; folglich ist $x \in \sum\limits_{\iota \in T_0}^{M} M_\iota$ und weiter $y = (T_0, x) \in \sum\limits_{T \in \overline{G}}^{l} \sum\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$. Wir zeigen, daß die Abbildung φ: $\varphi(x) = y$ ein Isomorphismus ist. Die Abbildung φ ist surjektiv, da man leicht zeigt, daß ein $x \in \sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ für jedes $y \in \sum\limits_{T \in \overline{G}}^{l} \sum\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$ so existiert, daß $\phi(x) = y$ gilt. Die Abbildung φ ist offenbar injektiv.

Wir beweisen noch die beiderseitige Isotonie: Es sei $x_1, x_2 \in \sum\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$, $x_1 = (\iota_1, a_1)$, $x_2 = (\iota_2, a_2)$ und $x_1 \leqq x_2$. Dann ist $\iota_1 \leqq \iota_2$ und $a_1 \leqq a_2$. Ferner gibt es entweder ein $T_1 \in \overline{G}$ mit $x_1, x_2 \in \sum\limits_{\iota \in T_1}^{M} M_\iota$ oder gibt es T_1, $T_2 \in \overline{G}$ mit $x_1 \in \sum\limits_{\iota \in T_1}^{M} M_\iota$, $x_2 \in \sum\limits_{\iota \in T_2}^{M} M_\iota$. Im ersten Fall gilt für $y_1 =$

$= (T_1, x_1)$, $y_2 = (T_1, x_2)$ die Beziehung $y_1 \leqq y_2$; im zweiten Fall ist $\iota_1 < \iota_2$; daraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Eigenschaft der Zerlegung $\overline{G}$ die Beziehung $T_1 < T_2$; für $y_1 = (T_1, x_1)$, $y_2 = (T_2, x_2)$ gilt daher $y_1 < y_2$. Es sei umgekehrt $y_1 \leqq y_2$ für $y_1 = (T_1, x_1)$, $y_2 = (T_2, x_2)$. Also ist entweder $T_1 < T_2$ oder $T_1 = T_2$ und $x_1 \leqq x_2$. Wenn $T_1 < T_2$ ist, so gilt für $x_1 = (\iota_1, a_1)$, $x_2 = (\iota_2, a_2)$ die Beziehung $\iota_1 < \iota_2$ und somit auch $a_1 \leqq a_2$ mit Rücksicht auf die Isotonie des Systems $\{\bigcup_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$. Also gilt $x_1 \leqq x_2$ im ersten Fall. Wenn $T_1 = T_2$ und $x_1 \leqq x_2$ ist, so gilt $x_1, x_2 \in \sum_{\iota \in T_1}^{M} M_\iota$ und $x_1 \leqq x_2$ gilt auch in der Menge $\sum_{\iota \in G}^{M} M_\iota$. Wir stellen fest, daß φ ein Isomorphismus ist.

Wir bemerken, daß auf einer beliebigen geordneten Menge G stets eine solche Zerlegung $\overline{G}$ existiert, daß $G \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} T$ gilt.

11. Folgerung: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein isotones System und es sei $\overline{G}$ eine solche Zerlegung auf der Menge G, daß $G \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} T$ gilt. Dann ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota = \sum_{T \in \overline{G}}^{l} \sum_{\iota \in T}^{l} M_\iota$.*

12. Folgerung: *Es sei $\{M_\iota \mid M \supseteq M_\iota \cong N, \iota \in G\}$ ein isotones System. Es sei $\overline{G}$ eine solche Zerlegung auf der Menge G, daß $G \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} T$ gilt. Dann gilt die Formel $(\sum_{T \in \overline{G}}^{l} T) \circ N \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} (T \circ N)$.*

In der Tat: Ist $\overline{G}$ eine solche Zerlegung von G, daß $G \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} T$ gilt, dann folgt aus der Isotonie des Systems $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ auch die Isotonie des Systems $\{\bigcup_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$. Ferner ist das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in T\}$ für jedes $T \in \overline{G}$ isoton.

13. Folgerung: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Es sei $\overline{G}$ eine solche Zerlegung auf der Menge G, daß $G \cong \sum_{T \in \overline{G}} T$ gilt. Dann gilt $\sum_{\iota \in G}^{M} M_\iota \cong \sum_{T \in \overline{G}} \sum_{\iota \in T}^{M} M_\iota$.* ($\overline{G}$ ist hier eine Gegenkette und die Bedingung der Isotonie des Systems $\{\bigcup_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$ ist nicht notwendig.)

14. Bemerkung: *Es sei G eine Gegenkette. Dann ist eine beliebige Zerlegung $\overline{G}$ mit $G \cong \sum_{T \in \overline{G}}^{l} T$ auch eine Gegenkette und es gilt die Formel $\sum_{\iota \in G} M_\iota \cong \sum_{T \in \overline{G}} \sum_{\iota \in T} M_\iota$.*

Dieses ist schon eine unmittelbare Verallgemeinerung des Gesetzes aus [1]. Ähnliche spezielle Formeln bekommen wir leicht auch für die Ordinalsummen.

4. DAS ALLGEMEINE KARDINALPRODUKT

15. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Sei $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota$ die Menge aller isotonen Abbildungen x von G in M mit der Eigenschaft

$$x(\iota) \in M_\iota \text{ für jedes } \iota \in G,$$

auf welcher die Ordnung auf folgende Weise definiert ist: für beliebige x_1, $x_2 \in \overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota$ ist
$x_1 \leqq x_2$, genau dann, wenn $x_1(\iota) \leqq x_2(\iota)$ in M_ι für jedes $\iota \in G$ gilt. Dann heißt $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota$ das *allgemeine Kardinalprodukt.*

16. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Sei $G_=$ die Gegenkette auf der Menge G. Die Formel*

$$\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota = \underset{\iota\in G_=}{\Pi} M_\iota$$

gilt genau dann, wenn das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ isoton ist.

17. Folgerung: *Wenn es ein solches System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ gibt, daß $M = \underset{\iota\in G}{\Sigma^l} M_\iota$ gilt, so gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota = \underset{\iota\in G_=}{\Pi} M_\iota$. Ist speziell G eine Gegenkette, so gilt $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota = \underset{\iota\in G}{\Pi} M_\iota$.*

18. Lemma: *Es seien M, G geordnete Mengen. Dann ist $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota \subseteq$ $\subseteq M^G$ für ein beliebiges System von Untermengen $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$.*

19. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota = M, \iota\in G\}$ ein System. Dann gilt die Formel*

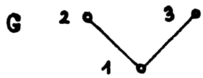
$$\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota = M^G.$$

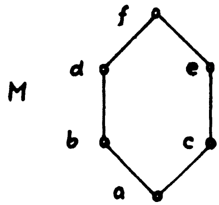
Aus den Sätzen ist es klar, daß die neue Operation unsere Forderungen erfüllt. Die charakteristische Eigenschaft unserer Operation ist im Lemma 18 enthalten.

20. Definition: Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ ein System. Für jedes $\iota \in G$ setzen wir $M'_\iota = \{x(\iota) \mid x \in \overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota\}$.

Man sieht leicht ein, daß $\overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M'_\iota = \overset{M}{\underset{\iota\in G}{\Pi}} M_\iota$ für ein beliebiges System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ gilt.

21. Beispiel: Es seien M, G folgende geordnete Mengen:

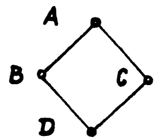




Wir wählen ferner das System $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M,\ \iota \in G\}$ wie folgt: $M_1 = \{a, b, d\}$, $M_2 = \{d, f\}$, $M_3 = \{c, e\}$. Dann besteht die Menge $\overset{M}{\prod\limits_{\iota \in G}} M_\iota$ aus folgenden Abbildungen A, B, C, D:

	1	2	3
A	a	f	e
B	a	d	e
C	a	f	c
D	a	d	c

Also hat die Menge $\overset{M}{\prod\limits_{\iota \in G}} M_\iota$ folgendes Diagramm:



5. DIE MENGE DER ALLGEMEINEN KARDINALPRODUKTE

Es seien M, G geordnete Mengen die fest gegeben sind.

22. Definition: Es sei $X \subseteq M^G$; wir bilden die Mengen $Y_\iota = \{x(\iota) \mid x \in X\}$ für jedes $\iota \in G$. Dann heißt die geordnete Menge $\overset{M}{\prod\limits_{\iota \in G}} Y_\iota$ die *Hülle* der Menge X; wir bezeichnen sie mit $\overline{X}$. Wenn $\overline{X} = X$ gilt, dann heißt die Menge X *abgeschlossen.*

23. Lemma: *Für beliebige X, $X^* \subseteq M^G$ gilt:*
(a) $X \subseteq \overline{X}$, (b) *aus* $X \subseteq X^*$ *folgt* $\overline{X} \subseteq \overline{X^*}$ (c) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

24. Bemerkung: (a) *Die Zuordnung $X \to \overline{X}$ ist eine Hüllenoperation auf der geordneten Menge M^G, welche hier eine Čechsche Topologie definiert.* (b) *Jede einelementige Untermenge der Menge M^G und die Menge M^G sind abgeschlossen.*

25. Satz: *Die Menge von allen abgeschlossenen Untermengen der Menge M^G ist gleich der Menge aller allgemeinen Kardinalprodukte* $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$.

In der Tat: Sei $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$ ein beliebiges allgemeines Kardinalprodukt. Mit Rücksicht auf den Hilfsatz 18 ist $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota \subseteq M^G$. Wir zeigen, daß $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$ in M^G abgeschlossen ist. Wir setzen $Y_\iota = \{x(\iota) \mid x \in \overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota\}$ für jedes $\iota \in G$. Mit Rücksicht auf die Definition 20 sehen wir, daß $Y_\iota = M'_\iota$ für jedes $\iota \in G$ ist und ferner $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} Y_\iota = \overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$ gilt. $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$ ist also eine abgeschlossene Menge. Umgekehrt sei $X \subseteq M^G$ eine beliebige abgeschlossene Untermenge. Dann gilt $X = \overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} Y_\iota$, wo $Y_\iota = \{x(\iota) \mid x \in X\}$ ist.

26. Beispiel: Es sei $a,\ b \in M$. Wir setzen $[a,\ b] = \underset{M}{\{}c \mid a \leqq c \leqq b\}$. Es seien $x_1,\ x_2 \in M^G$ beliebig. Dann gilt die Formel $\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} [x_1(\iota),\ x_2(\iota)] = [x_1, x_2]$ und die Untermenge $[x_1,\ x_2]$ der geordneten Menge M^G ist also abgeschlossen.

6. DAS ASSOZIATIVE GESETZ DES ALLGEMEINEN KARDINALPRODUKTES

27. Satz: *Es sei $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M,\ \iota \in G\}$ ein System und $\overline{G}$ sei eine solche Zerlegung, daß $G \cong \underset{T \in \overline{G}}{\Sigma^l} T$ gilt. Das System $\{\underset{\iota \in T}{\cup} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$ sei isoton und sei $\overline{G}_=$ die Gegenkette auf der Menge $\overline{G}$. Dann gilt die Formel*

$$\overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota \cong \underset{T \in \overline{G}_=}{\Pi} \overset{M}{\underset{\iota \in T}{\Pi}} M_\iota .$$

Beweis: Es sei $x \in \overset{M}{\underset{\iota \in G}{\Pi}} M_\iota$ beliebig; x ist daher eine solche isotone Abbildung der geordneten Menge G in M, daß $x(\iota) \in M_\iota$ für jedes $\iota \in G$ gilt. Zu dieser Abbildung existiert genau eine isotone Teilabbildung $y_T\colon T \to M$ mit ähnlicher Eigenschaft. Offenbar gilt $y_T \in \overset{M}{\underset{\iota \in T}{\Pi}} M_\iota$ und die Menge $\{y_T \mid T \in \overline{G}\}$ bestimmt genau eine Abbildung y der Menge $\overline{G}$ in $\underset{T \in \overline{G}}{\cup} \overset{M}{\underset{\iota \in T}{\Pi}} M_\iota$; also ist $y \in \underset{T \in \overline{G}_=}{\Pi} \overset{M}{\underset{\iota \in T}{\Pi}} M_\iota$. Damit ist eine Abbildung $y =$

$= \varphi(x)$ der Menge $\prod\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ in die Menge $\prod\limits_{T \in \overline{G}_=} \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$ definiert. Diese Abbildung ist surjektiv: Es sei $y \in \prod\limits_{T \in \overline{G}_=} \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$ beliebig; y ist die Abbildung der Menge $\overline{G}$ in $\bigcup\limits_{T \in \overline{G}} \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$, für welche $y_T \in \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$ für jedes $T \in \overline{G}$ gilt. Für jedes $T \in \overline{G}$ ist daher y_T eine isotone Abbildung der Menge T in M mit der Eigenschaft, daß $y_T(\iota) \in M_\iota$ für jedes $\iota \in T$ gilt. Mit Rücksicht auf die Isotonie des Systems $\{\bigcup\limits_{\iota \in T} M_\iota \mid T \in \overline{G}\}$ sehen wir, daß $y_{T_1}(T_1) \, \varepsilon \, y_{T_2}(T_2)$ aus $T_1 < T_2$ folgt. Also existiert genau eine isotone Abbildung $x \colon G \to M$, welche eine Fortsetzung von y_T für jedes $T \in \overline{G}$ ist; also existiert ein $x \in \prod\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ so, daß $y = \varphi(x)$ gilt. Die Abbildung φ ist ferner offenbar injektiv. Wir zeigen noch die beiderseitige Isotonie.

Es sei $x, x^* \in \prod\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota$ und $x \leqq x^*$. Dieses gilt dann und nur dann, wenn $x(\iota) \leqq x^*(\iota)$ für jedes $\iota \in G$ ist, also genau dann, wenn $y_T(\iota) \leqq y_T^*(\iota)$ für jedes $\iota \in T$ und jedes $T \in \overline{G}$ in Kraft ist. Letzteres gilt genau dann, wenn $y_T \leqq y_T^*$ in $\prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$ für beliebiges $T \in \overline{G}$ ist. Sei $y(T) = y_T$, $y_T^*(T) = y_T^*$ für jedes $T \in \overline{G}$. Dann ist $y, y^* \in \prod\limits_{T \in \overline{G}_=} \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$, $y = \varphi(x)$, $y^* = \varphi(x^*)$. Offenbar ist $y \leqq y^*$ genau dann, wenn $y_T \leqq y_T^*$ für jedes $T \in \overline{G}$ gilt. Also ist $x \leqq x^*$ genau dann, wenn $\varphi(x) \leqq \varphi(x^*)$ gilt. Wir stellen fest, daß φ ein Isomorphismus ist.

28. Folgerung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ *ein System und es sei* $\overline{G}$ *eine solche Zerlegung, daß* $G \simeq \sum\limits_{T \in \overline{G}} T$ *gilt; dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G}^{M} M_\iota \simeq \prod\limits_{T \in \overline{G}} \prod\limits_{\iota \in T}^{M} M_\iota$.

29. Bemerkung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M_\iota \subseteq M, \iota \in G\}$ *ein System und* G *sei eine Gegenkette. Es sei* $\overline{G}$ *eine beliebige Zerlegung. Dann gilt die Formel* $\prod\limits_{\iota \in G} M_\iota \simeq \prod\limits_{T \in \overline{G}} \prod\limits_{\iota \in T} M_\iota$.

Das ist schon eine direkte Verallgemeinerung des Gesetzes aus [1].

30. Bemerkung: *Es sei* $\{M_\iota \mid M = M, \iota \in G\}$ *ein System und* $\overline{G}$ *sei eine*

solche Zerlegung, daß $G \cong \sum_{T \in \bar{G}} T$ *gilt. Dann gilt die Formel* $M^{\sum_{T \in \bar{G}} T} \cong$
$\cong \prod_{T \in \bar{G}} M^T$.

Dieses ist wieder eine bekannte Relation.

LITERATUR

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, rev. ed., New York, 1948.
[2] G. Birkhoff, *Generalized arithmetic*, Duke Math. Journ. 9 (1942), 283—302.
[3] M. M. Day, *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 1—43.