Rahmi Ibrahim Ibrahim Abdel Karim

Über den Resonanzfall bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit periodischen veränderlichen Koeffizienten

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 1, 11--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104625

ÜBER DEN RESONANZFALL BEI GEWÖHNLICHEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN N-TER ORDNUNG MIT PERIODISCHEN VERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENTEN

Rahmi Ibrahim Ibrahim Abdel Karim

Cairo University, Faculty of Science, Mathematical Department

Eingegangen am 7. November 1966

§ 1. EINLEITUNG

Wir betrachten das lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{1}$$

mit einer stetigen n-zeiligen Matrix A(t), und einem stetigen n-komponentigen Vektor $\mathbf{f}$ (t) mit der gleichen Periode p

$$A(t+p) = A(t), \qquad \mathbf{f}(t+p) = \mathbf{f}(t). \tag{2}$$

Das zu (1) gehörende homogene System ist

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\,\mathbf{y} \tag{3}$$

und das „adjungierte"

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -A^T(t)\,\mathbf{z}, \tag{4}$$

wobei durch das hochgestellte T der Übergang zur transponierten Matrix gekennzeichnet ist.

In [1] wurde gezeigt (vgl. [1], (20) bzw. [2], § 3):

Wenn $Y(t)$ eine Fundamentallösungsmatrix von (3) ist, dann ist

$$Z(t) = (Y^{-1}(t))^T = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) \tag{5}$$

eine Fundamentallösungsmatrix von (4). Nach [1], (19) gibt es eine Fundamentallösungsmatrix $Y(t)$ von der Gestalt

$$Y(t) = \Phi(t)\,.\,e^{Kt},\ \Phi(t) = (\bar{\varphi}_1(t), \ldots, \bar{\varphi}_n(t)),\ \bar{\varphi}_\mu(t) = \begin{bmatrix} {}_1\varphi_\mu(t) \\ {}_2\varphi_\mu(t) \\ \vdots \\ {}_n\varphi_\mu(t) \end{bmatrix}^{1)} \tag{6}$$

[1]) Zur Verkürzung der Schreibweise wird später ${}_1\varphi_\mu(t) = \varphi_\mu(t)$ geschrieben analog wie bei der ersten Komponente anderer Vektoren.

mit einer mit p periodischen Matrix $\Phi(t)$ und mit einer konstanten Matrix K, die in der Jordanschen Normalform geschrieben ist (vgl. [1] (16), (17), (18)), woraus für die Fundamentallösungsmatrix (5) die Darstellung (vgl. [1], (20) and (21))

$$(7)\quad Z(t) = (\Phi^{-1}(t))^T \cdot \mathrm{e}^{-K^T t} = \Psi(t)\, \mathrm{e}^{-K^T t} \text{ mit } \Psi = (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots \overline{\psi}_n) = (\Phi^{-1}(t))$$

folgt. Wir behandeln den allgemeinen Fall (vgl. [1], (17)), in dem die Matrix K in s Elementarbestandteile

$$(8)\qquad K_\nu = \begin{bmatrix} \alpha_\nu & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \alpha_\nu \end{bmatrix}, \ \nu = 1, 2, \dots, s$$

mit den Ordnungen m_ν zerfällt, wobei gelten soll

$$(9)\qquad \alpha_\nu \begin{cases} = 0 & \text{für } \nu = 1, \dots, \varrho \\ \neq 0 & \text{für } \nu = \varrho + 1, \dots, s \end{cases}$$

($\varrho = 0$ und $\varrho = s$ ist zugelassen). Dann enthält die Matrix $Y(t)$ genau ϱ lineare unabhängige mit p periodische Lösungsvektoren $\mathbf{y}_{(\nu)}(t)$ (vgl. [1], (35), (36)) mit dem Index

$$(10)\qquad (\nu) = m_1 + m_2 + \dots + m_{\nu-1} + 1.$$

Nach [3] Satz 8 bzw. [1] Satz 3 besitzt das adjungierte System (4) ebenfalls ϱ unabhängige mit p periodische Lösungsvektoren $\mathbf{z}_{[\nu]}(t)$ ($\nu = 1, 2, \dots, \varrho$), mit (vgl. [1], (37))

$$(11)\qquad [\nu] = m_1 + m_2 + \dots + m_\nu .$$

Die Matrix $Y(t)$ bzw. $Z(t) = (Y^{-1}(t))^T$ sei so geordnet, daß

$$(12)\qquad \int_0^p \mathbf{z}_{[\nu]}^T(\tau)\, \mathbf{f}(\tau)\, \mathrm{d}\tau = a_{[\nu]} \begin{cases} \neq 0 & \text{für } \nu = 1, \dots, \sigma \\ = 0 & \text{für } \nu = \sigma + 1, \dots, \varrho. \end{cases}$$

Also liegt für das Differentialgleichungsystem (I) für die Indizes $\nu = 1, \dots, \sigma$ der Teil-Resonanzfall vor (vgl. [1], (45), (51) (52)), während für die Indizes $\nu = \sigma + 1, \dots, \varrho$ der Ausnahmefall vorliegt.

Im [1] (vgl. [1], Satz 6, (65), (68)) ist schon bewiesen:

Im Teil-Resonanzfall bzw. im Teil-Ausnähmefall (also für $\nu = 1, 2,$

..., ϱ) hat jede skalare Komponente ${}^{\nu}x_{\varrho}(t)$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, n$) von ${}^{\nu}\mathbf{x}(t)$, wobei (vgl. [1], (44))

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{s} {}^{\nu}\mathbf{x}(t) \tag{13}$$ [2)]

ist, die Gestalt

$$ {}^{\nu}x_{\varrho}(t) = \sum_{\sigma=(\nu)}^{[\nu]} {}_{\varrho}\varphi_{\sigma}(t)\, v_{\sigma}^{*}(t) + \sum_{\sigma=(\nu)}^{[\nu]} {}_{\varrho}\varphi_{\sigma}(t)\, q_{\sigma}(t). \tag{14}$$

Dabei sind $v_{\sigma}^{*}(t)$ und die erste Summe von (14) mit p periodisch. Ferner ist

$$q_{\sigma}(t) = \text{Polynom vom Grade } [\nu] + 1 - \sigma (\sigma = (\nu), (\nu) + 1, \ldots, [\nu]) \tag{15}$$

mit den höchsten Koeffizienten $\dfrac{\frac{1}{p}\, a_{[\nu]}}{([\nu] + 1 - \sigma)!}$ mit $a_{[\nu]}$ aus (12).

In der voliegenden Arbeit wollen wir diese Ergebnisse auf lineare gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten übertragen, bei sich einige interessante Gesichtspunkte ergeben werden. Wurde in [3] bzw. [1] nur gezeigt, daß in Resonanzfall jeder Lösungsvektor unabhängig von den Anfangsbedingungen mit wachsender unabhängiger Veränderlichen beliebige große Werte annimmt, so werden jetzt, im Falle der Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, Aussagen darüber gemacht, mit welcher Mindestpotenzordnung die Werte der Lösungen und ihrer (n—1) ersten Ableitungen anwachsen (§§ 3 & 4). Am Ende der Untersuchung wird eine Methode zur Bildung von Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten gegeben (§ 5), und es werden zwei Beispiele skizziert (§ 6).

§ 2. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG MIT PERIODISCHEN KOEEFIZIENTEN

Gegeben sei die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$L[x] \equiv x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = f(t), \tag{16}$$

in der für alle Koeffizienten und für die Funktion $f(t)$ die Realität, Stetigkeit und Periodizität mit der Periode p vorausgesetzt

$$a_{\mu}(t + p) = a_{\mu}(t)\ (\mu = 1, \ldots, n), f(t) + p = f(t) \tag{17}$$

werden.

[2)] Die Änderung der Bezeichnung $\mathbf{x}^{(\nu)}$ in ${}^{\nu}\mathbf{x}$ gegenüber [1] wurde vorgenommen, um Verwechslungen mit den Ableitungen zu vermeiden.

Wir führen (16) wie folgt auf das System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurück:

$$
\text{(18)} \qquad \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_1(t)\, x_n - a_2(t)\, x_{n-1} - \dots - a_n(t)\, x_1 + f(t), \end{cases}
$$

was dem Differentialgleichungssystem (1) entspricht, mit

$$
\text{(19)} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n)} \end{bmatrix},
$$

$$
A(t) = \begin{bmatrix} 0, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \\ -a_n(t), & -a_{n-1}(t), & \dots, & -a_2(t), & -a_1(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}
$$

Der zu (16) gehörigen homogenen Differentialgleichung

$$
\text{(20)} \qquad L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, y = 0
$$

entspricht dann das Differentialgleichungssystem (3) mit

$$
\text{(21)} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}.
$$

Die zu (10) adjungierte homogene Differentialgleichung (vgl. [4], § 2)

$$
\text{(22)} \quad \bar{L}[z] \equiv (-1)^{n}\, z^{(n)} + (-1)^{n-1}\, (a_1(t) z)^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, z = 0
$$

geht mit den Bezeichnungen

$$(23)\begin{cases} {}_nz = z \\ {}_{n-1}z = -{}_nz' + a_{1n}z = a_1z - z' \\ {}_{n-2}z = -{}_{n-1}z' + a_{2n}z = a_2z - (a_1z)' + z'' \\ {}_{n-3}z = -{}_{n-2}z' + a_{3n}z = a_3z - (a_2z)' + (a_1z)'' - z''' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}_1z = -{}_2z' + a_{n-1\,n}z = a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + (a_{n-3}z)'' \mp \ldots + (-1)^n z^{(n-1)} \\ o = -{}_1z' + a_{nn}z \equiv \mathrm{L}\,[z] \end{cases}$$

in das Differentialgleichungssystem (4) mit

$$(24)\qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}_1z \\ {}_2z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}_nz \end{bmatrix}$$

über.

Besitzt jetzt das adjungierte Differentialgleichungssystem (4) ϱ unabhängige mit p periodische Lösungsvektoren $\mathbf{z}_{[\nu]}(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \varrho$), dann erfüllen ihre letzten Komponenten ${}_nz_{[\nu]} = z_{[\nu]}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \varrho$) die Differentialgleichung (22). Ferner läßt sich aus (23) ablesen, daß aus ${}_nz_{[\nu]}(t) \equiv$ o, sofort $\mathbf{z}_{[\nu]}(t) \equiv o$ folgt. Wenn nun umgekehrt ${}_nz(t)$ eine mit p periodische Lösung der adjungierten Differentialgleichung (22) ist, so ergibt sich aus (23) eindeutig ein entsprechender mit p periodischer Lösungsvektor $\mathbf{z}(t)$ von (23). Es besteht also eine eindeutige Zuordnung zwichen den mit p periodischen Lösungen $\mathbf{z}(t)$ von (23) und den mit p periodischen Lösungen $z(t)$ von (22). Ist nun $\mathbf{z}(t)$ irgendein mit p periodischer Lösungsvektor von (23), so gilt wegen (19), (24), (beachte ${}_nz(t) = z(t)$ nach (23))

$$(25)\qquad \int_0^p \mathbf{z}^T(\tau)\,\mathbf{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^p z(\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Hieraus folgt unmittelbar der (vgl. [1], (38) und Satz 4)

Satz 1: Für die inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung (16) liegt genau dann für einen Index $\nu > o$ der Teil-Resonanzfall vor, wenn es eine mit p periodische Lösung $z_{[\nu]}(t)$ der adjungierten Differentialgleichung (22) gibt (d. i. wenn die betreffende Zahl $\alpha_\nu = o$), so daß

$$(26)\qquad \int_0^p \mathbf{z}_{[\nu]}^T(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p z_{[\nu]}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$$

ist. Es liegt für (1) für einen Index ν der Teil-Ausnahmefall vor, wenn neben $\alpha_\nu = 0$ gilt:

$$\int_0^p z_{[\nu]}(t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{27}$$

Ist schließlich $\alpha_\nu \neq o$, so liegt für den Index ν der Teil-Hauptfall vor.

Nach (12) ergibt sich (beachte: ${}_n z_{[\nu]} = z_{[\nu]}(t)$ nach (23))

$$\int_0^p \mathbf{z}_{[\nu]}^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathbf{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^p z_{[\nu]} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = a_{[\nu]} \begin{cases} \neq o \text{ für } \nu = 1, \ldots, \sigma \\ = o \text{ für } \nu = \sigma + 1, \ldots, \varrho. \end{cases} \tag{28}$$

Von der Gleichung (14) wird uns nur die erste Komponente ${}^\nu x_1(t)$ interessieren. Unter Beachtung von F. N. 1) lautet (14) mit $\varrho = 1$

$$ {}^\nu x(t) = \sum_{\sigma=(\nu)}^{[\nu]} \varphi_\sigma(t)\, v_\sigma^*(t) + \sum_{\sigma=(\nu)}^{[\nu]} \varphi_\sigma(t)\, \mathrm{q}_\sigma(t). \tag{29}$$

§ 3. ÜBER DIE GRÖSSENORDNUNG DER LÖSUNGEN IM RESONANZFALL

Für die allgemeine Lösung $x(t)$ von (16) erhalten wir nach der Methode der Variation der Konstanten (vgl. [1], (9) und Fußnote 5)

$$x(t) = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu(t) \cdot \int^t z_\mu(t) f(t)\,\mathrm{d}t \tag{30}$$

(vgl. (19), (23), und (5)). Die Lösung $x(t)$ wollen wir in der Form

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{s} {}^\nu x(t) \tag{31}$$

in die Komponenten

$$ {}^\nu x(t) = \sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} y_\mu(t) \cdot \int^t z_\mu(t) f(t)\,\mathrm{d}t \tag{32}$$

zerlegen, mit den Summationsindizes nach (10), (11).

Für die Komponenten ${}^\nu x(t)$ mit $\nu = \varrho + 1, \ldots, s$ können wir voraussetzen, daß sie mit p periodische Funktionen sind. Diese sind (vgl. [1], Satz 5) eindeutig bestimmt.

Im Falle $\nu = 1, 2, \ldots, \varrho$ rechnet man nach (29) und (14) bzw. [1] (68) und (65)

$$ {}^\nu x(t) = \sum_{\mu=0}^{m_\nu} \frac{t^{m_\nu - \mu}}{(m_\nu - \mu)!}\, {}^\nu\Theta_\mu(t), \tag{33}$$

wo ${}^{\nu}\Theta_{\mu}(t)$ die Form

$$(34) \qquad {}^{\nu}\Theta_{\mu}t) = \sum_{\gamma=0}^{\mu} {}^{\nu}C_{\gamma\mu}\varphi_{(\nu)+\gamma}(t) \quad \text{für } \mu = 0, 1, \ldots, m_{\nu} - 1,$$

$$(35) \qquad {}^{\nu}\Theta_{m_{\nu}}(t) = \sum_{\gamma=0}^{m_{\nu}-1} ({}^{\nu}C_{\gamma}m_{\nu} + v^{*}_{(\nu)+\gamma})\, \varphi_{(\nu)+\gamma}(t)$$

hat. Auf die $v^{*}_{(\nu)+\gamma}(t)$, die in (29) definiert sind, kommt es hier nicht an. Weiter stellt man fest, daß die Konstanten ${}^{\nu}C_{\gamma\mu}$ außer von ν nur von der Differenz $\mu - \gamma$ abhängen (vgl. [1], (64); man kann also mit

$$(36) \qquad {}^{\nu}C_{\gamma\mu} = {}^{\nu}d_{\mu-\gamma}$$

statt (34) schreiben:

$$(37) \qquad {}^{\nu}\Theta_{\mu}(t) = \sum_{\gamma=0}^{\mu} {}^{\nu}d_{\mu-\gamma}\varphi_{(\nu)+\gamma}(t), \text{für } \mu = 0, 1, \ldots, m_{\nu} - 1;$$

analog bei (35). Die ${}^{\nu}d_{\mu-\gamma}$ mit $\mu - \gamma > 0$ sind willkürliche Integrationskonstante, während

$$(38) \qquad {}^{\nu}d_{0} = {}^{\nu}C_{\mu\mu} = \frac{1}{p}\, a_{[\nu]} \qquad (\mu = 0,1, \ldots, m_{\nu} - 1)$$

mit (vgl. (28))

$$(39) \qquad \alpha_{[\nu]} = \int_{0}^{p} \mathbf{z}^{\mathsf{T}}_{[\nu]}(\tau)\, \mathbf{f}(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{p} \mathbf{z}_{[\nu]}(\tau)\, \mathbf{f}(\tau)\, d\tau.$$

ist. Im Teilresonanzfall ($\nu = 1, \ldots, \sigma$) ist ${}^{\nu}x(t)$ stets ein Polynom vom Grade m_{ν} mit Koeffizienten ${}^{\nu}\Theta_{\mu}(t)$, die mit p periodisch sind; der Koeffizient ${}^{\nu}\Theta_{0}(t)$ der höchsten Potenz ist nach (6), (37) und (38)

$$(40) \qquad {}^{\nu}\Theta_{0}(t) = \frac{1}{p}\, a_{[\nu]}y_{(\nu)}(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, \sigma),$$

er ist also eine mit p periodische Eigenfunktion der homogenen Differentialgleichung (20). Ist im Teilausnahmefall ${}^{\nu}d_{\beta_{\nu}}$ mit kleinstem $\beta_{\nu} > 0$ der erste nicht verschwindende Koeffizient (36), so folgt in entsprechen-
der erste nicht verschwindende Koeffizient (36), so folgt in ent-
sprechender Weise, falls $\beta_{\nu} < m_{\nu}$ ist,

$$(41) \qquad \left\{\begin{array}{ll} {}^{\nu}\Theta_{\alpha}(t) \equiv 0 & \text{für } 0 \leqq \alpha \leqq \beta_{\nu} - 1 \\ {}^{\nu}\Theta_{\beta_{\nu}}(t) \equiv {}^{\nu}d_{\beta_{\nu}} \cdot y_{(\nu)}(t) & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \nu = \sigma + 1, \ldots, \varrho, \\ \beta_{\nu} < m_{\nu}. \end{array}$$

Künftig sei (33) unter Weglassung der höchsten t-Potenzen mit verschwindenden Koeffizienten in folgender Form geschrieben:

(42) $$ {}^{\nu}x(t) = \sum_{\mu=0}^{\omega_\nu} \frac{t^{\omega_\nu - \mu}}{(\omega_\nu - \mu)!}\, {}^{\nu}\Theta_\mu(t) $$

$$ \text{mit} \begin{cases} \omega_\nu = m_\nu & \text{für } \nu = 1, \ldots, \sigma \\ \omega_\nu = m_\nu - \beta_\nu < m_\nu & \text{für } \nu = \sigma + 1, \ldots, \varrho. \end{cases} $$

Eine Lösung (31) von (16), die für $\nu = 1, \ldots, \varrho$ in der Form (42) dargestellt und für $\nu = \varrho + 1, \ldots, s$ mit p periodisch ist (vgl. [1], Satz 5), soll „Normallösung" genannt werden, Eine solche Normallösung kann man in der Form

(43) $$ x(t) = \sum_{\delta=0}^{\omega} X_\delta(t) \cdot \frac{t^{\omega-\delta}}{(\omega - \gamma)!} $$

schreiben, wo

(44) $$ \omega = \underset{(\nu = 1, \ldots, \varrho)}{\text{Max}} (\omega_\nu, 0) $$

gesetzt ist und die $X_\delta(t)$ sich aus den ${}^{\nu}\Theta_\mu$ in (37) und (35) aus mit p periodischen Funktionen zusammensetzen.

Es sei noch einmal betont, daß in (43) von den Teilhauptfällen nur eine spezielle Lösung benutzt wird, nämlich die mit p periodische, von den Teilresonanz- bzw. Teilausnahmefällen jedoch die vollständige mit jeweils m_ν willkürlichen Integrationskonstanten.

Mit Blick auf (40) und (41) bestätigt man folgenden

Satz 2: Ist in (41) $\omega > 0$, so ist der Faktor $X_0(t)$ der höchsten in (43) vorkommenden Potenz t^ω eine mit p periodische nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Differentialgleichung (20)

Leicht ergibt sich noch folgender

Satz 3: Gilt der Teilresonanzfall für $\nu = 1, \ldots, \sigma > 0$, so ist die Potenzordnung von $x(t)$ in (43) mindestens

(45) $$ \omega \geqq \underset{(\nu=1,\ldots,\sigma)}{\text{Max}} \omega_\nu = \underset{(\nu=1,\ldots,\sigma)}{\text{Max}} m_\nu, $$

und es gibt mindestens eine Lösung $x(t)$ für die

(46) $$ \omega = \underset{(\nu=1,\ldots,\sigma)}{\text{Max}} \omega_\nu. $$

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus Betrachtung von (37), (38) und (42).

§ 4. DIE GRÖSSENORDNUNG DER ABLEITUNGEN IM RESONANZFALL, WENN $a_n(t)$ NICHT IDENTISCH VERSCHWINDET

Wir wollen jetzt die Potenzordnungen der Ableitungen $x'(t)$, $x''(t)$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(t)$ bestimmen. Differenziert man (43) nach t, so erhält man für $x^{(r)}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ die Darstellung

$$(47)\quad x^{(r)}(t) = \sum_{\delta=0}^{\omega}\left(X_{\delta}^{(r)} + \binom{r}{1} X_{\delta-1}^{(r-1)} + \binom{r}{2} X_{\delta-2}^{(r-2)} + \ldots + X_{\delta-r}\right)\frac{t^{\omega-\delta}}{(\omega-\delta)!}$$

$$, r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

wobei die formal hingeschriebenen Funktionen $X_{\beta}^{(\alpha)}(t)$ mit $\beta < 0$ durch Null zu ersetzen sind. Daraus folgt unmittelbar

Satz 4. Ist in (43) $X_0(t)$ nicht konstant, so haben alle Ableitungen $x^{(\,)}(t)$ von (43) mit $r = 1, \ldots, n-1$ dieselbe Potenzordnung t^{ω} wie $x(t)$ selbst. Sind dagegen X_0, X, $\ldots$, X_{l-1} konstant, während $X_l(t)$ nicht konstant ist, so nehmen die Potenzordnungen der Ableitungen von $x(t)$ sukzessiv um 1 ab bis zu $x^{(l)}(t)$ und bleiben von da an konstant und gleich $\omega - l$.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass in der Differentialgleichung (16) der letzte Koeffizient

$$(48)\qquad a_n(t) \not\equiv 0$$

ist. Wir erhalten den

Satz 5. Ist $a_n(t) \not\equiv 0$, so besitzt die homogene Differentialgleichung (20) keine konstanten Lösungen.

Beweis: Die Behauptung folgt indirekt. Angenommen $y(t) =$ konst. wäre eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (20), dann würden in der Differentialgleichung (20) alle Glieder mit y', y'', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ verschwinden, und man würde die Gleichung

$$a_n(t)\, y = a_n(t)\,.\,\text{Konst} \equiv 0$$

erhalten. Dieses ist aber ein Widerspruch.

Aus den Sätzen 5 und 4 mit Blick auf Satz 2 folgt unmittelbar der

Satz 6. Unter der Bedingung (48) haben sämtliche Ableitungen $x^{(r)}(t)$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ einer Normallösung (43) von (16) die gleiche Potenzordnung.

Bemerkung: Als einzigen Ausnahmefall zu Satz 5 kann man den Fall betrachten, daß

$$(49)\qquad x(t) = \text{const.} = C \neq 0$$

ist, was für

$$f(t) = C\, a_n(t) \tag{50}$$

eintritt; dann ist ja $x^{(l)}(t) \equiv 0$ für $l \geqq 1$. Es lohnt sich, diesen trivialen, aber interessanten Spezialfall in die allgemeinen Überlegungen einzuordnen.

Zunächst darf hier ja der Teilresonanzfall nicht auftreten, da sonst zwangsläufig mit t-Potenzen behaftete Glieder in (43) vorkommen müßten. Es ist also die Annahme einer mit p periodischen Lösung $\mathbf{z}_\alpha(t)$ von (4), für die [vgl. (28) und (50)]

$$\int_0^p z_\alpha(\tau)\, a_n(\tau) = a_\alpha \neq 0 \tag{51}$$

gilt, zum Widerspruch zu führen. Dieser ergibt sich sofort aus der ersten und letzten Gleichung (23) mit Hinblick auf (51), da ${}_1z_\alpha(t)$ nicht die Periode p hat, also auch $\mathbf{z}_\alpha(t)$ nicht (vgl. (24)).

Es liegt mithin für $\nu = 1, \ldots, \varrho$ der Ausnahmefall vor, für $\nu = \varrho + 1, \ldots, s$ der Hauptfall; $\varrho = 0$ und $\varrho = s$ ist dabei zugelassen.

Zunächst werde der Vektor

$$\boldsymbol{b}_\nu(t) = \begin{bmatrix} b_{(\nu)}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{[\nu]}(t) \end{bmatrix} \tag{52}$$

für den vorliegenden Spezialfall berechnet. Nach [1], (27), (20) und der Schreibweise [1], (41) (vgl. Fußnote 2) wird

$$ {}^\nu\boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{b}_\nu(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = {}^\nu\Psi^{\mathsf{T}} . \boldsymbol{f} = \mathrm{e}^{Kt} . {}^\nu\mathrm{z}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{f} = \mathrm{e}^{Kt} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{(\nu)} f \\ \vdots \\ z_{[\nu]} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also erhält man bei Beachtung von (50) und der ersten und letzten Gleichung (23)

$$(53)\qquad \mathbf{b}_\nu(t) = C \,.\, e^{K_\nu t} \begin{bmatrix} {}_1z'_{(\nu)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}_1z'_{[\nu]} \end{bmatrix} \text{ mit } e^{K_\nu t} = e^{\alpha_\nu t} \begin{bmatrix} 1, t, \ldots, \dfrac{t^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \\ 1, \ldots, \dfrac{t^{m_\nu - 2}}{(m_\nu - 2)!} \\ \ddots \quad \vdots \\ \cdot \; t \\ \cdot 1 \end{bmatrix}$$

nach (8).

Wir definieren die Zeilenvektoren

$$(54)\qquad {}_1\overline{\psi}_\nu^{\mathsf{T}} = ({}_1\psi_{(\nu)} \ldots, {}_1\psi_{[\nu]}) \quad \text{und} \quad {}_1\mathbf{z}_{(\nu)}^{\mathsf{T}}, = ({}_1z_{(\nu)}, \ldots, {}_1z_{[\nu]}).$$

Nach (7) ist

$$(55)\qquad {}^\nu\Psi(t) = {}^\nu Z(t) \,.\, e^{K_\nu^{\mathsf{T}} . t} = \{e^{K_\nu t} \,.\, {}^\nu Z^T(t)\}^T;$$

demnach gilt für die entsprechenden Spaltenvektoren

$$(56)\qquad {}_1\overline{\psi}_\nu(t) = ({}_1\overline{\psi}_\nu^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = e^{K_\nu t} \,.\, {}_1\mathbf{z}_\nu(t).$$

Die Gleichung [1], (42), nämlich

$$(57)\qquad \mathbf{v}'_\nu = K_\nu \,.\, \mathbf{v}_\nu + \mathbf{b}_\nu(t)$$

hat also, wie man sofort aus (56) und (53) verifiziert, die mit p periodische Lösung

$$(58)\qquad \mathbf{v}_\nu(t) = C \,.\, {}_1\overline{\psi}_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Damit schreibt sich (43) nach [1], (44) und (43) in der Form

$$(59)\qquad x(t) = C \,.\, \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\gamma=0}^{m_\nu - 1} \varphi_{(\nu)+\gamma}(t)\; {}_1\psi_{(\nu)+\gamma}(t) = C \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(t)\; {}_1\psi_r(t) = C,$$

wo bei der letzten Umformung $\Phi\Psi^{\mathsf{T}} = I$ nach (7) benutzt wurde.

§ 5. KONSTRUKTION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT PERIODISCHEN KOEFFIZIENTEN

Hilfssatz 1: Die Funktionen

$$(60)\qquad y_\mu(t) = e^{\alpha_\mu . t} \,.\, \varphi_\mu(t) \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, n,$$

wobei die $\varphi(t)$ n-mal stetig differenzierbar und periodisch sind mit p, bilden ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung n-ter Ordnung mit p periodischen Koeffizienten, wenn die Wronskische Determinante der Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ für jeden Wert von t aus dem Intervall $0 \leqq t \leqq p$ von Null verschieden ist. Hierbei enthält die Matrix $P = Y^{-1}(o)\,Y(p)$ nur Elementarbestandteile von der Ordnung eins (vgl [1], (10)).

Beweis: Ersichtlich genügen die Funktionen $y_\mu(t)$ der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$
(61) \qquad \begin{vmatrix}
y, & e^{\alpha_1 t}\varphi_1, \ldots, & e^{\alpha_n \cdot t}\cdot \varphi_n \\
y', & e^{\alpha_1 t}(\alpha_1\varphi_1 + \varphi_1'), \ldots, & e^{\alpha_n \cdot t}(\alpha_n\varphi_n + \varphi_n') \\
y'', & e^{\alpha_1 t}(\alpha_1^2\varphi_1 + 2\alpha_1\varphi_1' + \varphi_1''), \ldots, & e^{\alpha_n t}(\alpha_n^2\varphi_n + 2\alpha_n\varphi_n' + \varphi_n'') \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
y^{(n)}, & e^{\alpha_1 t}(\alpha_1^n\varphi_1 + \binom{n}{1}\alpha_1^{n-1}\varphi_1' + \ldots + \varphi_1^{(n)}), \ldots, & e^{\alpha_n t}(\alpha_n^n\varphi_n + \binom{n}{1}\alpha_n^{n-1}\varphi_n' + \ldots + \varphi_n^{(n)}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Kürzt man die Exponentialfunktionen aus den Spalten heraus, so erhält man eine Differentialgleichung mit mit p periodischen Koeffizienten, wobei der Faktor der höchsten Ableitung, der bis auf das Vorzeichen mit der Wronskischen Determinante der Funktionen $y_1. \ldots, y_n$ übereinstimmt, nach Voraussetzung eine von Null verschiedene stetige Funktion ist. — Ferner gilt für das Fundamentalsystem:

$$
(62) \qquad Y(t) = \begin{bmatrix}
y_1 & ,y_2, & \ldots, & y_n \\
y_1' & ,y_2', & \ldots, & y_n' \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\varphi_1 & ,\ldots, & \varphi_n \\
\alpha_1\varphi_1 + \varphi_1' & ,\ldots, & \alpha_n\varphi_n + \varphi_n' \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\alpha_1^{n-1}\varphi_1 + \binom{n-1}{1}\alpha_1^{n-2}\varphi_1' + \ldots + \varphi_1^{(n-1)}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} + \binom{n-1}{1}\alpha_n^{n-1}\varphi_n' + \ldots + \varphi_n^{(n-1)}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
e^{\alpha_1 t} & & & \\
& e^{\alpha_2 t} & & \\
& & \ddots & \\
& & & e^{\alpha_n t}
\end{bmatrix}.
$$

$$(63)\qquad Y(t+P) = Y(t)\,.\begin{bmatrix} e^{\alpha_1 p} & & & \\ & e^{\alpha_2 p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\alpha_n p} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt (vgl. [1], (10))

$$(64)\qquad P = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 p} & & & \\ & e^{\alpha_2 p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\alpha_n p} \end{bmatrix}.$$

Also besteht die Matrix P aus Elementarbestandteilen von der Ordnung 1.

Hilfsatz 2. Die Funktionen

$$(65)\qquad \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}\varphi_1(t) \\ y_2(t) = e^{\alpha t}(t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \\ y_3(t) = e^{\alpha t}\left(\frac{t^2}{2!}\,\varphi_1(t) + t\varphi_2(t) + \varphi_3(t)\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) = e^{\alpha t}\left(\frac{t^{n-1}}{(m-1)!}\,\varphi_1(t) + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\,\varphi_2(t) + \dots + \varphi_m(t)\right), \end{cases}$$

wobei die $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ m-mal stetig differenzierbar und mit p periodisch sind, bilden ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung m-ter Ordnung mit mit p periodischen Koeffizienten, wenn die Wronskische Determinante der Funktionen $y_1(t), \dots, y_m(t)$ für jeden Wert von t aus dem Intervall $0 \leqq t \leqq p$ von Null verschieden ist. Die entsprechende Matrix P besteht aus genau einem Elementarbestandteil von der Ordnung m.

Beweis: Die zu (61) anologe Differentialgleichung m-ter Ordnung läßt sich nach Kürzung durch $e^{n\alpha t}$ und Einführung des Operators

$$(66)\qquad D = \frac{d}{dt}$$

sowie der Beziechnung

$$(67)\qquad \vartheta_{\mu r} = \sum_{l=1}^{\mu} \binom{\mu-1}{l-1} (D+\alpha)^{\mu-l}\,\varphi_{r-l+1}(t) \text{ für } \begin{cases} \mu = 1, 2, \dots, m+1, \\ r = 1, \dots, m \end{cases}$$

— Summanden, bei denen der Index von $\varphi \leqq 0$ ist, sind durch 0 zu ersetzen — in der Form

$$(68)\quad \left|\begin{matrix} y, \vartheta_{11}, t\vartheta_{11} + \vartheta_{12}, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{11} + \frac{t^{n-2}}{(m-2)!}\vartheta_{12} + \cdots + \vartheta_{1m} \\ y', \vartheta_{21}, t\vartheta_{21} + \vartheta_{22}, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{21} + \frac{t^{n-2}}{(m-2)!}\vartheta_{22} + \cdots + \vartheta_{2m} \\ y'', \vartheta_{31}, t\vartheta_{31} + \vartheta_{32}, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{31} + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\vartheta_{32} + \cdots + \vartheta_{3m} \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ y^{n-1}, \vartheta_{m,1}, t\vartheta_{m,1} + \vartheta_{m,2}, \ldots, \frac{t^{n-1}}{(m-1)!}\vartheta_{m,1} + \frac{t_u^{-2}}{(m-2)!}\vartheta_{m,2} + \cdots + \vartheta_{r,m} \\ y^{(m)}, \vartheta_{m+1,1}, t\vartheta_{m+1,1} + \vartheta_{m+1,2} \ldots, \frac{t^{n-1}}{(m-1)!}\vartheta_{m+1,1} + \frac{t^{n-2}}{(m-2)!}\vartheta_{m+1,2} + \cdots + \vartheta_{m+1,m} \end{matrix}\right| = 0$$

schreiben. Die erste Zeile ergibt sich unmittelbar, die weiteren durch vollständige Induktion in bezug auf den Zeilenindex. Hebt man durch Bildung von Spaltenkombinationen die Potenzfaktoren fort, so erhält man eine Differentialgleichung mit mit p periodischen Koeffizienten. Der Faktor der höchsten Ableitung $y^{(n)}(t)$ ist wieder bis auf das Vorzeichen der Wronskischen Determinante der Funktionen $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ gleich, also stetig und von Null verschieden. Ferner gilt analog zu (62)

$$(69)\quad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1, y_2, \ldots, y_m \\ y_1', y_2', \ldots, y_m' \\ y_1'', y_2'', \ldots, y_m'' \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \ldots y_m^{(m-1)} \end{bmatrix}$$

$$= e^{\varkappa at} \begin{bmatrix} \vartheta_{11}, t\vartheta_{11} + \vartheta_{12}, \frac{t^2}{2!}\vartheta_{11} + t\vartheta_{12} + \vartheta_{13}, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{11} + \cdots + \vartheta_{1m} \\ \vartheta_{21}\ t\vartheta_{21} + \vartheta_{22}, \frac{t^2}{2!}\vartheta_{21} + \vartheta_{22} + \vartheta_{23}, \ldots, \frac{t^{n-1}}{(m-1)!}\vartheta_{21} + \cdots + \vartheta_{2m} \\ \vartheta_{31}, t\vartheta_{31}, + \vartheta_{32}\frac{t^2}{2!}\vartheta_{31} + t\vartheta_{32} + \vartheta_{33}, \ldots, \frac{t^{n-1}}{(m-1)!}\vartheta_{31} + \cdots + \vartheta_{3m} \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \vartheta_{m,1}, t\vartheta_{m,1} + \vartheta_{m,2}, \frac{t^2}{2!}\vartheta_{m,1} + t\vartheta_{m,2} + \vartheta_{m,3}, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{m,1} + \cdots + \vartheta_{m,m} \end{bmatrix}$$

$$Y(t+p)=e^{m\alpha(t+p)}\,.\begin{bmatrix} \vartheta_{11}, (t+p)\vartheta_{11}+\vartheta_{12}, \ldots, \dfrac{(t+p)^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{11}+\ldots+\vartheta_{1m} \\ \vartheta_{21}, (t+p)\vartheta_{21}+\vartheta_{22}, \ldots, \dfrac{(t+p)^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{21}+\ldots+\vartheta_{2m} \\ \vartheta_{31}, (t+p)\vartheta_{31}+\vartheta_{32}, \ldots, \dfrac{(t+p)^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{31}+\ldots+\vartheta_{3m} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vartheta_{m,1}, (t+p)\vartheta_{m,1}+\vartheta_{m,2}, \ldots, \dfrac{(t+p)^{m-1}}{(m-1)!}\vartheta_{m,1}+\ldots+\vartheta_{m,m} \end{bmatrix}$$

$$= Y(t)\,.\,e^{m\alpha p}\begin{bmatrix} 1 & p & \dfrac{p^2}{2!} & \cdots & \dfrac{p^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & p & \cdots & \dfrac{p^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt wieder nach [1], (10)

$$(71) \quad P=e^{m\alpha p}.\begin{bmatrix} 1, & p, & \dfrac{p^2}{2!}, & \ldots, & \dfrac{p^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1, & p, & \ldots, & \dfrac{p^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & p, & \dfrac{p^2}{2!}, & \ldots, & \dfrac{p^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1, & p, & \ldots, & \dfrac{p^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha p} & & & \\ & e^{\alpha p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\alpha p} \end{bmatrix}$$

Also besteht die Matrix P aus einem einzigen Elementarbestandteils von der Ordnung m. Hilfsatz 1 für $\mu = 1$ ist ein Spezialfall von Hilfssatz 2 für $m = 1$.

Unmittelbar ergibt sich aus den Hilfssätzen 1 und 2 der folgende

Satz 7: Geht man bei Bildung der Differentialgleichung (61) oder (68) von mehreren Funktionssystemen der Art (65), also etwa

$$y_{(1)}, y_{(1)+1}, \ldots, y_{(1)+m_1-1}; y_{(2)}, y_{(2)+1}, \ldots, y_{(2)+m_2-1}; \ldots; y_{(s)}, y_{(s)+1} \ldots, y_{(s)+m_s-1},$$

auss, so erhält man eine Differentialgleichung von der Ordnung

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$$

mit mit p periodischen stetigen Koeffizienten und einer Matrix

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & & \\ & P_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & P_s \end{bmatrix}, \tag{72}$$

wobei P_ν von der Ordnung m_ν ist.

§ 6. BEISPIELE

Die Funktionen

$$y_{(1)} = 1/3 \cos t, \; y_{[1]} = 1/3 t \cos t + 1/3 \sin t + 1, \; y_{(2)} = \sin t \tag{73}$$

sind Lösungen der Differentialgleichung

(74) $L[y] \equiv$

$$\equiv \begin{vmatrix} y & , \; y', & y'', & y''' \\ \frac{1}{3}\cos t & , -\frac{1}{3}\sin t & , -\frac{1}{3}\cos t & , \frac{1}{3}\sin t \\ \frac{1}{3}t\cos t + \frac{1}{3}\sin t + 1, & -\frac{1}{3}t\sin t + \frac{2}{3}\cos t, & -\frac{1}{3}t\cos t - \sin t, & \frac{1}{3}t\sin t - \frac{4}{3}\cos t \\ \sin t & , \; \cos t & , -\sin t & , -\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= y''' + \frac{2\cos t}{3-2\sin t} y'' + y' + \frac{2\cos t}{3-2\sin t} y = 0,$$

bei der der auftretende Nenner positiv ist. Die entprechends Lösungsmatrix $Y(t)$ lautet (vgl. (6))

$$Y(t) = \Phi(t)\, e^{Kt} = \begin{bmatrix} 1/3\cos t, 1/3\sin t + 1, \sin t \\ -1/3\sin t,\ 2/3\cos t,\ \cos t \\ -1/3\cos t,\ -\sin t,\ -\sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{array}{|cc|} 1 & t \\ & 1 \end{array} & \\ & \boxed{1} \end{bmatrix} \tag{75}$$

mit

$$K = \begin{bmatrix} \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ & 0 \end{array} & \\ & \boxed{0} \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Die transponierte reziproke Matrix $Z(t) = (Y^{-1}(t))^T$ (vgl. (5)) ist

$$Z(t) = \Psi(t)\,.\, e^{-K^T . t}.$$

Die Elemente der letzten Zeile:

$$\begin{cases} z_{(1)} = -t\psi_{[1]} + \psi_{(1)} = -t. \dfrac{-3}{2\sin t - 3} + \dfrac{3(3\cos t - \sin t\cos t)}{2\sin t - 3} \\ z_{[1]} = \psi_{[1]} \qquad = \dfrac{-3}{2\sin t - 3} \\ z_{[2]} = \psi_{[2]} \qquad = \dfrac{1 + 3\sin t + \cos^2 t}{2\sin t - 3} \end{cases} \tag{77}$$

bilden ein Fundamentalsystem für die zu (74) adjungierte homogene Dgl.

$$\bar{\mathrm{L}}[z] \equiv -z''' + \left(\frac{2\cos t}{3 - 2\sin t} z\right)'' - z' + \frac{2\cos t}{3 - 2\sin t} z = 0. \tag{78}$$

Wir betrachten nun die inhomogene Dgl.

$$\mathrm{L}[x] \equiv x''' + \frac{2\cos t}{3 - 2\sin t} x'' + x' + \frac{2\cos t}{3 - 2\sin t} x = f(t) \tag{79}$$

mit

(a) $f(t) = \sin t\,(2\sin t - 3)$,
(b) $f(t) = (\sin t - 1)(2\sin t - 3)$.

Die Differentialgleichung (79) entspricht dann dem Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{80}$$

mit

$$(81)\quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{bmatrix},\ A(t) = \begin{bmatrix} o & 1 & o \\ o & o & 1 \\ \frac{2\cos t}{2\sin t - 3}, & -1, & \frac{2\cos t}{2\sin t - 3} \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} o \\ o \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Im Falle (a) ergibt sich:

$$(82)\quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} z_{[1]}(t) f(t)\, dt = -\int\limits_0^{2\pi} 3 \sin t\, dt = o,\ \nu = 1 \text{ Ausnahmeindex}^{3)} \\ \int\limits_0^{2\pi} z_{[2]}(t) f(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin t (1 + 3 \sin t + \cos^2 t)\, dt = 3\pi \neq 0,\ \nu = \\ = 2 \text{ Resonanzindex}^{3)} \end{cases}$$

und im Falle (b):

$$(83)\quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} z_{[1]}(t) f(t)\, dt = -3 \int\limits_0^{2\pi} (\sin t - 1)\, dt = 6\pi \neq o,\ \nu = 1 \text{ Resonanzindex} \\ \int\limits_0^{2\pi} z_{[2]}(t) f(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} (\sin t - 1)(1 + 3 \sin t + \cos^2 t)\, dt = o,\ \nu = \\ = 2 \text{ Ausnahmeindex.} \end{cases}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten [vgl. (10)] bzw. [1], F. N. (5) erhält man für die skalare Komponenten $x(t)$, $x'(t)$ $x''(t)$ des allgemeinen Lösungsvektors $\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{2} {}^{\nu}\mathbf{x}(t)$ des Differentialgleichungssystems (80) im Falle (a) die Gestalt:

$$(84)\quad \begin{cases} x(t) = t[3/2 \sin t + (1/3\, {}^1c_1 - 1) \cos t] + (1/3 + 1/3\, {}^1c_1 + {}^2c_0) \\ \sin t + (3 + 1/3\, {}^1c_0) \cos t + 2/3 \sin t \cos t + {}^1c_1 - 3 \\ x'(t) = t\, [3/2 \cos t - (1/3\, {}^1c_1 - 1) \sin t] - (3/2 + 1/3\, {}^1c_0) \sin t + \\ + (-2/3 + 2/3\, {}^1c_1 + {}^2c_0) \cos t + 4/3 \cos^2 t - 2/3 \\ x''(t) = t\, [-3/2 \sin t - (1/3\, {}^1c_1 - 1) \cos t + (5/3 - {}^1c_1 - {}^2c_0) \\ \sin t - 1/3\, {}^1c_0 - 8/3 \sin t \cos t. \end{cases}$$

Man sieht sofort aus (84), daß jede skalare Komponente $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ der allgemeinen Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Differentialgleichungssystems (80)

---

3) Der Index ν wird als Resonanzindex bzw. Ausnahmeindex bezeichnet, wenn für dieses ν der Teil-Resonanzfall bzw. Ausnahmefall vorliegt.

für beliebige Werte der Konstanten ${}^1c_0$, ${}^1c_1$, ${}^2c_0$ Werte von der Größenordnung t^1 annimmt. Entsprechend erhält man im Falle (b)

$$(85)\quad \begin{cases} x(t) = t^2/2 \cos t + t\,[(1/3\,{}^1c_1 - 1)\cos t + \sin t + 3] + (1/3\,{}^1c_1 + \\ + {}^2c_0 - 8/3)\sin t + (1/3\,{}^1c_0 + 11/4)\cos t + 2/3 \sin t \cos t + {}^1c_1 - 3 \\ x'(t) = -t^2/2 \sin t + t[2\cos t - (1/3\,{}^1c_1 - 1)\sin t] - (7/4 + 1/3\,{}^1c_0) \\ \sin t + (-11/3 + 2/3\,{}^1c_1 + {}^2c_0)\cos t + 4/3\cos^2 t + 7/3 \\ x''(t) = -t^2/2\cos t + t[(1 - 1/3\,{}^1c_1)\cos t - 3\sin t] + (14/3 - {}^1c_1 - \\ - {}^2c_0)\sin t - (1/3\,{}^1c_0 - 1/4)\cos t - 8/3 \sin t \cos t. \end{cases}$$

Also nimmt jede skalare Komponente $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ des allgemeinen Lösungsvektors $\mathbf{x}(t)$ von (80) mit beliebigen Konstanten ${}^1c_0$, ${}^1c_1$, ${}^2c_0$ Werte von der Größenordnung t^2 an.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$(86)\quad L[x] \equiv x^{(V)} + \frac{\sin t - \cos t - 2}{2 + \cos t} x^{(IV)} + \frac{4 + \cos t - \sin t}{2 + \cos t} x''' + $$
$$+ \frac{\sin t - \cos t - 4}{2 + \cos t} x'' + \frac{2 - \sin t}{2 + \cos t} x' - 2x = 4\,(2 + \cos t).$$

Die entsprechende Lösungsmatrix $Y(t) = \Phi(t)\,.\,e^{Kt}$ der zu (86) gehörigen homogenen Differentialgleichung [vgl. (20), (3)] hat die Form

$$(87)\quad Y(t) = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t, & \cos t + 2, & \sin t - \cos t, & \sin t, & 1 \\ \cos t - \sin t, & \cos t, & \cos t + \sin t, & \sin t, & 1 \\ -\sin t - \cos t, & \cos t - 2\sin t, & -\sin t + \cos t, & 2\cos t + \sin t, & 1 \\ -\cos t + \sin t, & -3\sin t - 3\cos t, & -\cos t - \sin t, & -3\sin t + \cos t, & 1 \\ \sin t + \cos t, & -2\cos t - 4\sin t, & -\cos t + \sin t, & -4\cos t - \sin t, & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & t \\ & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & t \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{e^t} \end{bmatrix} .$$

Dabei

$$(88)\quad K = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

ist. Mit Hilfe der Matrix $Z(t) = (Y^{-1}(t))^T$, deren letzte Zeile (vgl. (77))

$$(89)\quad \frac{1}{4(2+\cos t)}\Big(2t\sin t+2\cos t+\sin^2 t+1,\ -2\sin t,\ -t(1+2\cos t)-$$
$$-\cos t\sin t+2\sin t,\ 2\cos t+1,\ e^{-t}(-2+\sin t-\cos t)\Big)$$

ist, berechnet man für die entscheidenden Integrale

$$(90)\quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} z_{[1]}(t)\,f(t)\,dt = -2\int\limits_0^{2\pi}\sin t\,dt = o\ \ \nu = 1 \text{ Ausnahmeindex,} \\ \int\limits_0^{2\pi} z_{[2]}(t)\,f(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi}(2\cos t+1)\,dt = 2\pi \neq o,\ \nu = 2 \text{ Resonanzindex.} \end{cases}$$

Der Index $\nu = 3$ ist selbverständlich der Hauptindex, weil in (88) (vgl. (8)) $\alpha_2 = 1 \neq o$ ist. Weiter rechnet man nach der Methode der Variation der Konstanten (vgl. (10)) aus:

$$(91)\quad x(t) = e^t({}^3c_0 - 2) - \tfrac{1}{2}t^2(\sin t - \cos t) + t[(\tfrac{1}{2} + {}^1c_1 + {}^2c_1)\sin t + $$
$$+ (-\tfrac{1}{2} + {}^1c_1 - {}^2c_1)\cos t]$$
$$+\left(\frac{11}{4} + {}^1c_0 + {}^2c_0 + {}^2c_2\right)\sin t + \left(-\frac{9}{4} + {}^1c_0 + {}^1c_1 - {}^2c_0\right)\cos t + (4 + 2\,{}^1c_1)$$

und entsprechende Ausdrücke für $x^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Ist nun ${}^3c_0 = 2$ (Normallösung), so nimmt die Lösung $x(t)$ von (86) und gleichzeitig auch sämtliche Ableitungen x', x'', x''', x'''' Werte von der Größenordnung t^2 an. Ist aber ${}^3c_0 \neq 2$, so nehmen sämtliche Ableitungen $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \ldots, 4$) Werte von der Größenordnung t^2 an.

LITERATUR

[1] R. I. I. A. Karim: *Studium des Resonanzfalles bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Arch. Rational Mech. Anal. 10, 229—241 (1962).

[2] Coddingten & Levinson: *Theory of ordinary differential equations,* New York, Toronto, London.

[3] R. I. I. A. Karim: *Über den Resonanzfall bei Systemen von n Linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Arch. Rational Mech. Anal. 7, 21—28 (1961).

[4] E. L. Ince: *Ordinary differential equations,* Dower Publications, Inc., U.S.A. 1956.

z. Z.: Cairo
Military Technical College
Chair Of Mathematics