Helmut Boseck

Über die Einlagerung topologischer Gruppen in Kompakte

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 3, 127--139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104615

ÜBER DIE EINLAGERUNG TOPOLOGISCHER GRUPPEN IN KOMPAKTE

HELMUT BOSECK, GREIFSWALD.

Eingegangen am 10. Juni 1966

Es werden Kompaktifizierungen topologischer T_0 — Gruppen auf ihre Zusammenhangseigenschaften untersucht. Nach einigen Definitionen und allgemeinen Bemerkungen, die im 1. Abschnitt zusammengestellt werden, ist der 2. Abschnitt der Untersuchung der total- unzusammenhängenden Kompaktifizierungen gewidmet. Die Existenz einer universellen total- unzusammenhängenden Kompaktifizierung wird bewiesen, und eine Charakterisierung dieser Kompaktifizierung durch Darstellungen der Gruppe wird angegeben. Die Frage, wann die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung nicht trivial ist, führt im 3. Abschnitt zu ihrer Beschreibung als projektiver Limes. Dabei ergibt sich ein Kriterium, wann die universelle Kompaktifizierung einer topologischen Gruppe zusammenhängend ist. Der 4. Abschnitt beschäftigt sich mit zusammenhängenden Kompaktifizierungen, sowie mit gewissen direkten und subdirekten Produkten von zusammenhängenden und total- unzusammenhängenden Kompaktifizierungen. Ein Kriterium für die Existenz einer universellen zusammenhängenden Kompaktifizierung wird abgeleitet. Abschließend wird der Spezialfall der abelschen T_0 — Gruppen erschöpfend behandelt, wobei sich einige neue Aspekte bekannter Sätze ergeben.

1. Es sei G eine topologische T_0 — Gruppe. Als *Einlagerung der topologischen Gruppe G in eine kompakte topologische Gruppe* bezeichnen wir jedes geordnete Paar $(K, \hat{\alpha})$, das aus einer kompakten T_0 — Gruppe K und einem stetigen Homomorphismus $\hat{\alpha}$ von G in K besteht.

Eine Einlagerung $(K_1, \hat{\alpha}_1)$ der topologischen Gruppe G heißt *allgemeiner* als eine Einlagerung $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ von G: $(K_1, \hat{\alpha}_1) \succ (K_2, \hat{\alpha}_2)$, wenn es einen stetigen Homomorphismus $\hat{\alpha}_2^1$ von K_1 in K_2 gibt, für den $\hat{\alpha}_2^1 \cdot \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ ist. Ist die Einlagerung $(K_1, \hat{\alpha}_1)$ allgemeiner als $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ und gleichzeitig $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ allgemeiner als $(K_1, \hat{\alpha}_1)$, so nennen wir die Einlagerungen $(K_1, \hat{\alpha}_1)$ und $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ der topologischen Gruppe G *äquivalent*. Sind $(K_1, \hat{\alpha}_1)$ und $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ zwei Einlagerungen der topologischen Gruppe G und gibt es einen topologischen Isomorphismus $\hat{\alpha}_2^1$ von K_1 auf K_2 mit der Eigenschaft $\hat{\alpha}_2^1 \cdot \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$, so sprechen wir von *topologisch isomorphen* Einlagerungen der Gruppe G.

Eine Einlagerung $(K, \hat{\alpha})$ der topologischen Gruppe G heißt eine *Kompaktifizierung* von G, wenn das Bild des stetigen Homomorphismus $\hat{\alpha}$ in K dicht liegt: $K = \overline{\operatorname{Im} \hat{\alpha}} = \overline{\hat{\alpha}(G)}$. In Anlehnung an die Bezeichnungen für Kompaktifizierungen topologischer Räume schreiben wir dann αG für die kompakte topologische Gruppe K.

Da wir uns auf die Betrachtung topologischer T_0 — Gruppen beschränken, definiert jede Einlagerung $(K, \hat{\alpha})$ einer topologischen Gruppe G in eine kompakte topologische Gruppe eine Kompaktifizierung $(\alpha G, \hat{\alpha})$ der Gruppe G, wenn $\alpha G = \overline{\operatorname{Im} \hat{\alpha}} = \overline{\hat{\alpha} G}$ als in K abgeschlossene Hülle des Bildes von $\hat{\alpha}$ erklärt wird. Offenbar folgt aus der Beziehung $(K_1, \hat{\alpha}_1) \succ (K_2, \hat{\alpha}_2)$ für zwei Einlagerungen $(K_1, \hat{\alpha}_1)$ und $(K_2, \hat{\alpha}_2)$ der topologischen Gruppe G die entsprechende Relation $(\alpha_1 G, \hat{\alpha}_1) \succ (\alpha_2 G, \hat{\alpha}_2)$ für die zugehörigen Kompaktifizierungen. Sind zwei Kompaktifizierungen äquivalent, so sind sie sogar topologisch isomorph, und die Äquivalenz zweier Einlagerungen impliziert die topologische Isomorphie der zugeordneten Kompaktifizierungen.

Es ist bekannt, daß jede Familie Φ von stetigen endlichdimensionalen unitären Darstellungen einer topologischen Gruppe G eine Einlagerung $(K_\Phi, \hat{\alpha}_\Phi)$ und damit eine Kompaktifizierung $(\alpha_\Phi G, \hat{\alpha}_\Phi)$ von G definiert. Ist $\hat{\varphi} \in \Phi$ eine stetige endlichdimensionale unitäre Darstellung von G, und bezeichnet $\mathfrak{A}^{(\varphi)}$ die unitäre Gruppe im Darstellungsraum $H^{(\varphi)}$ von φ, so läßt sich die kompakte Gruppe K_Φ als cartesisches Produkt $K_\Phi = \prod_{\hat{\varphi} \in \Phi} \mathfrak{A}^{(\varphi)}$, versehen mit der Tychonoff- Topologie, erklären. Sind $U_x^{(\varphi)} \in \mathfrak{A}^{(\varphi)}$; $x \in G$ die Darstellungsoperatoren der Darstellung $\hat{\varphi}$: $x \to U_x^{(\varphi)}$, so ist der stetige Homomorphismus $\hat{\alpha}_\Phi$ durch $\hat{\alpha}_\Phi(x) = (U_x^{(\varphi)})_{\hat{\varphi} \in \Phi}$; $x \in G$ definiert. Umgekehrt läßt sich jede Kompaktifizierung $(\alpha G, \hat{\alpha})$ einer topologischen Gruppe G mit Hilfe einer Familie Φ von stetigen endlichdimensionalen unitären (irreduziblen) Darstellungen der Gruppe G durch die zu $(\alpha G, \hat{\alpha})$ topologisch isomorphe Kompaktifizierung $(\alpha_\Phi G, \hat{\alpha}_\Phi)$ beschreiben.

Unter allen Einlagerungen einer gegebenen topologischen Gruppe G in eine kompakte topologische Gruppe gibt es eine in folgendem Sinne *universelle Einlagerung* $(K_u, \hat{\beta})$ von G: Ist $(K, \hat{\alpha})$ eine beliebige Einlagerung der topologischen Gruppe G, so gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{\gamma}$ der kompakten topologischen Gruppe K_u in die kompakte topologische Gruppe K, für den $\hat{\gamma} \cdot \hat{\beta} = \hat{\alpha}$ gilt. Es ist unmittelbar klar, daß die universelle Einlagerung $(K_u, \hat{\beta})$ einer topologischen Gruppe G eine Kompaktifizierung von G ist, die wir mit $(\beta G, \hat{\beta})$ bezeichnen und die *universelle Kompaktifizierung* von G nennen. Aus bekannten Schlüssen folgt, daß die universelle Kompaktifizierung einer topologischen Gruppe G bis auf topologische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man erhält die universelle Kompaktifizierung $(\beta G, \hat{\beta})$ bis auf topologische Isomorphie in der Form $(\alpha_\Phi G, \hat{\alpha}_\Phi)$ durch eine vollständige Familie inäquivalenter stetiger endlichdimensionaler unitärer (irreduzibler) Darstellungen der Gruppe G. Für jede Kompaktifizierung $(\alpha G, \hat{\alpha})$ einer topologischen

Gruppe G ist die kompakte topologische Gruppe αG das stetige homomorphe Bild der kompakten topologischen Gruppe βG bei einem stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}$ mit der Eigenschaft $\hat{\gamma} \,.\, \hat{\beta} = \hat{\alpha}$.

Im folgenden interessieren wir uns vorwiegend für Einlagerungen bzw. Kompaktifizierungen topologischer Gruppen, für die die kompakten topologischen Gruppen K bzw. αG gewisse Zusammenhangseigenschaften besitzen.

2. Ist $(K, \hat{\sigma})$ eine Einlagerung der topologischen Gruppe G und ist K eine total- unzusammenhängende kompakte topologische Gruppe, so sprechen wir von einer *total- unzusammenhängenden Einlagerung* der Gruppe G. Ist $(\sigma G, \hat{\sigma})$ die zugehörige Kompaktifizierung von G, so ist σG ebenfalls eine total- unzusammenhängende kompakte topologische Gruppe, und wir nennen $(\sigma G, \hat{\sigma})$ eine *total- unzusammenhängende Kompaktifizierung*. Aus der Existenz der universellen Einlagerung $(\beta G, \hat{\beta})$ für jede topologische Gruppe G folgt unmittelbar die Existenz einer universellen total- unzusammenhängenden Einlagerung von G:

Satz 1: *Zu jeder topologischen Gruppe G existiert eine total- unzusammenhängende Einlagerung $(K_u^{(\tau)}, \hat{\tau})$ von G mit folgender Eigenschaft: Ist $(K, \hat{\sigma})$ eine total- unzusammenhängende Einlagerung von G, so gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{\gamma}_0$ von $K_u^{(\tau)}$ in K, so daß $\hat{\gamma}_0 \,.\, \hat{\tau} = \hat{\sigma}$ ist.*

Die total- unzusammenhängende Einlagerung $(K_u^{(\tau)}, \hat{\tau})$ ist bis auf topologische Isomorphie eindeutig bestimmt und ist eine Kompaktifizierung $(\tau G, \hat{\tau})$; $K_u^{(\tau)} = \tau G$ der Gruppe G.

Ist $(\sigma G, \hat{\sigma})$ eine total- unzusammenhängende Kompaktifizierung der topologischen Gruppe G, so ist σG das stetige homomorphe Bild der kompakten Gruppe τG bei einem stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_0$ mit der Eigenschaft $\hat{\gamma}_0 \,.\, \hat{\tau} = \hat{\sigma}$.

Die Einlagerung $(\tau G, \hat{\tau})$ heißt die *universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung* der topologischen Gruppe G.

Es genügt offenbar, die erste Aussage des Satzes 1, d. h. die Existenz einer Einlagerung $(K_u^{(\tau)}, \hat{\tau})$ mit den genannten Eigenschaften zu beweisen. Alle anderen Aussagen ergeben sich dann nach bekannten Schlüssen aus der Universalität dieser Einlagerung. Ist $(K, \hat{\sigma})$ eine beliebige total-unzusammenhängende Einlagerung der topologischen Gruppe G, so gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{\gamma}$ von βG in K, so daß $\hat{\gamma} \,.\, \hat{\beta} = \hat{\sigma}$ ist. Dabei bezeichnet $(\beta G, \hat{\beta})$ die universelle Kompaktifizierung von G. Da die topologische Gruppe G total- unzusammenhängend ist, enthält der Kern von $\hat{\gamma}$ die Zusammenhangskomponente C^β des Einselementes von βG, und der stetige Homomorphismus $\hat{\gamma}$ läßt sich durch den kanonischen Epimorphismus $\hat{\pi}$ von βG auf $\beta G/C^\beta$ faktorisieren: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 \,.\, \hat{\pi}$. Setzen wir $\hat{\tau} = \hat{\pi} \,.\, \hat{\beta}$, so ist $(\beta G/C^\beta, \hat{\tau})$ eine Einlagerung und sogar Kompaktifizierung $\beta G/C^\beta = \tau G$ der topologischen Gruppe G mit den im Satz 1 genannten Eigenschaften.

Korollar: *Die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung* $(\tau G, \hat{\tau})$ *der topologischen Gruppe* G *ist der Kompaktifizierung* $(\beta G/C^{\beta}, \hat{\pi} \,.\, \hat{\beta})$ *topologisch isomorph.*

Zur Beschreibung der universellen total- unzusammenhängenden Kompaktifizierung durch eine Familie von Darstellungen führen wir den Begriff der endlichen Darstellung ein:

Eine stetige endlichdimensionale unitäre Darstellung $\hat{\varphi}$ einer topologischen Gruppe G heißt *endlich*, wenn das Bild des stetigen Homomorphismus $\hat{\varphi}$ eine endliche Untergruppe φG der unitären Gruppe $\mathfrak{A}^{(\varphi)}$ ist. Es gilt das folgende.

Lemma 1: *Jede stetige endlichdimensionale unitäre Darstellung einer kompakten total- unzusammenhängenden topologischen Gruppe* K *ist endlich.*

Das Bild von K bei der stetigen Abbildung $\hat{\varphi}$ ist als abgeschlossene Untergruppe der unitären Gruppe $\mathfrak{A}^{(\varphi)}$ nach einem bekannten Satz von E. Cartan eine Liesche Gruppe. Andererseits ist diese Gruppe als stetig-offenes Bild einer total- unzusammenhängenden Gruppe selbst total-unzusammenhängend, also eine kompakte Gruppe in der diskreten Topologie.

Es sei nun $\{H_i\}_{i=1,2,\ldots}$ eine Folge von unitären Räumen mit $\dim H_i = i$, und $\mathfrak{A}_i$ sei die Gruppe der unitären Operatoren des Raumes $H_i (i = 1, 2, \ldots)$. Wir betrachten die Familie $\Phi = \Phi^{(e)}$ der inäquivalenten endlichen (irreduziblen) Darstellungen der topologischen Gruppe G in den unitären Räumen H_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Das Bild φG der topologischen Gruppe G bei der Darstellung $\hat{\varphi} \in \Phi$ ist eine endliche Untergruppe von $\mathfrak{A}^{(\varphi)}$, und $K^{(e)} = \prod\limits_{\hat{\varphi}\in\Phi} \varphi G$ ist eine total- unzusammenhängende kompakte Untergruppe der kompakten Gruppe $K_{\Phi} = \prod\limits_{\hat{\varphi}\in\Phi} \mathfrak{A}^{(\varphi)}$ $(\Phi = \Phi^{(e)})$. Die Abbildung $\hat{\tau}^{(e)} = \hat{\varkappa}_{\Phi}$ ist offenbar ein stetiger Homomorphismus von G in die kompakte, total- unzusammenhängende Untergruppe $K^{(e)}$ von K_{Φ}, und die beiden Einlagerungen $(K_{\Phi}, \hat{\varkappa}_{\Phi})$ und $(K^{(e)}, \hat{\tau}^{(e)})$ definieren die gleiche Kompaktifizierung $(\tau^{(e)}G, \hat{\tau}^{(e)})$ der topologischen Gruppe G. Da $(K^{(e)}, \hat{\tau}^{(e)})$ eine total- unzusammenhängende Einlagerung von G ist, ist $(\tau^{(e)}G, \hat{\tau}^{(e)}) = (\alpha_{\Phi}G, \hat{\varkappa}_{\Phi})$ mit $\Phi = \Phi^{(e)}$ eine total- unzusammenhängende Kompaktifizierung von G. Wir beweisen den

Satz 2: *Die total- unzusammenhängende Kompaktifizierung* $(\tau^{(e)}G, \hat{\tau}^{(e)}) = (\alpha_{\Phi}G, \alpha_{\Phi})$, *die durch eine vollständige Familie* $\Phi = \Phi^{(e)}$ *inäquivalenter endlicher (irreduzibler) Darstellungen der topologischen Gruppe* G *definiert wird, ist zur universellen total- unzusammenhängenden Kompaktifizierung* $(\tau G, \hat{\tau})$ *von* G *topologisch isomorph.*

Offenbar genügt es, einen stetigen Homomorphismus $\hat{\gamma}_1$ von $\tau^{(e)}G$ auf τG anzugeben, für den $\hat{\gamma}_1 \,.\, \hat{\tau}^{(e)} = \hat{\tau}$ gilt. Dazu betrachten wir die Familie

$\Phi^{(e)}$ aller inäquivalenten unitären (irreduziblen) Darstellungen der kompakten total- unzusammenhängenden Gruppe τG in den Räumen H_i ($i = 1, 2, \ldots$). Jeder Darstellung $\hat{\varphi}^{(\tau)} \in \Phi^{(\tau)}$ entspricht eineindeutig eine Darstellung $\hat{\varphi} \in \Phi^{(e)}$, die durch $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{(\tau)} \cdot \hat{\tau}$ gegeben ist. Die topologische Gruppe τG läßt sich als kompakte topologische Gruppe topologisch isomorph in die kompakte topologische Gruppe $K_{\Phi(\tau)} = \prod\limits_{\hat{\varphi} \in \Phi^{(\tau)}} \mathfrak{A}^{(\varphi)}$ einlagern. In der Einlagerung $(K_{\Phi(\tau)}, \hat{\alpha}_{\Phi(\tau)})$ von τG ist $\hat{\alpha}_{\Phi(\tau)}$ ein topologischer Monomorphismus. Bezeichnet $\hat{p}$ die kanonische Projektion der Produktgruppe $K_{\Phi(\tau)} = \prod\limits_{\hat{\varphi} \in \Phi^{(\tau)}} \mathfrak{A}^{(\varphi)}$ auf das Teilprodukt $K_{\Phi(\tau)} = \prod\limits_{\hat{\varphi} \in \Phi^{(\tau)}} \mathfrak{A}^{(\varphi)}$, so ist $\hat{p} \cdot \hat{\tau}^{(e)} = \hat{p} \cdot \hat{\alpha}_{\Phi(e)} = \hat{\alpha}_{\Phi(\tau)} \cdot \hat{\tau}$. Ist $\hat{p}^{(e)}$ die Einschränkung von $\hat{p}$ auf $\tau^{(e)}G$, so ist $\hat{\gamma}_1 = \hat{\alpha}^{-1}_{\Phi(\tau)} \cdot \hat{p}^{(e)}$ der gesuchte stetige Homomorphismus.

3. Es entsteht die Frage, wann die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung einer topologischen Gruppe nicht trivial ist, d. h. unter welchen Bedingungen für die Gruppe G die Kompaktifizierung $(\tau G, \hat{\tau})$ nicht zu der trivialen Kompaktifizierung $(\{e\}, \hat{\pi}_0)$ topologisch isomorph ist. Zur Beantwortung dieser Frage charakterisieren wir die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung als projektiven Limes der „endlichen" Kompaktifizierungen von G, doch beweisen wir zunächst einen Hilfssatz über die in G abgeschlossenen Normalteiler von endlichem Index, die bekanntlich mit den offenen Normalteilern von endlichem Index übereinstimmen.

Lemma 2: *Ist $(\alpha G, \hat{\alpha})$ eine Kompaktifizierung der topologischen Gruppe G, die allgemeiner als die total- unzusammenhängende Kompaktifizierung von G ist, so existiert eine eineindeutige, die Inclusion erhaltende Abbildung der Menge $\mathfrak{N}$ aller abgeschlossenen Normalteiler von endlichem Index in G auf die Menge $\mathfrak{N}^{(\alpha)}$ aller offenen Normalteiler in αG, sodaß für einander entsprechende Normalteiler $N \in \mathfrak{N}$ und $N^\alpha \in \mathfrak{N}^\alpha$ gilt $G/N \cong \alpha G/N^\alpha$.*

Es sei N ein abgeschlossener Normalteiler von endlichem Index in G. Dann ist G/N eine endliche, also total- unzusammenhängende kompakte Gruppe und bezeichnet $\hat{\pi}_N$ den kanonischen Epimorphismus von G auf G/N, so ist $(G/N, \hat{\pi}_N)$ eine total- unzusammenhängende Kompaktifizierung von G. Es sei $\hat{\gamma}_1$ ein stetiger Epimorphismus von αG auf τG mit der Eigenschaft $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\alpha} = \hat{\tau}$. Ferner sei $\hat{\gamma}_0$ der eindeutig bestimmte stetige Epimorphismus von τG auf G/N mit der Eigenschaft $\hat{\gamma}_0 \cdot \hat{\tau} = \hat{\pi}_N$. Dann gilt $\hat{\gamma}_0 \cdot \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\alpha} = \hat{\pi}_N$, und wir definieren das Bild von N als $N^\alpha = \mathrm{Ker}\,(\hat{\gamma}_0 \cdot \hat{\gamma}_1)$. Offenbar gilt $\alpha G/N^\alpha \cong G/N$, und N^α ist als abgeschlossener Normalteiler von endlichem Index offen in αG. Ist nun N^α ein beliebiger offener Normalteiler in αG, so ist N^α abgeschlossen, und die Faktorgruppe G/N^α ist als kompakte Gruppe in der diskreten Topologie endlich. Ist N^τ das Bild des Normalteilers N^α bei dem stetigen

Epimorphismus $\hat{\gamma}_1$ von αG auf τG, so ist $\alpha G/N^\alpha \cong \tau G/N^\tau$, und der kanonische Epimorphismus $\hat{\pi}_{N^\alpha}$ von αG auf $\alpha G/N^\alpha$ läßt sich mit $\hat{\gamma}_1$ faktorisieren $\hat{\pi}_{N^\alpha} = \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\gamma}_1$. Wählen wir $N = \operatorname{Ker} \hat{\pi}_{N^\alpha} \cdot \hat{\alpha}$, so ist N ein abgeschlossener Normalteiler in G und $G/N \cong \alpha G/N^\alpha$. Damit besitzt N einen endlichen Index in G, und das Lemma 2 ist bewiesen.

Nennen wir eine Kompaktifizierung $(\varepsilon G,\ \hat{\varepsilon})$ endlich, wenn εG eine endliche Gruppe ist, so erhalten wir den

Satz 3: *Die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung* $(\tau G,\ \hat{\tau})$ *ist dem projektiven Limes des inversen Spektrums* $\{(\varepsilon G,\ \hat{\varepsilon});\ \hat{\varepsilon}_2^1\}$ *eines vollständigen Systems endlicher Kompaktifizierungen von* G *topologisch isomorph.*

Dabei sind die Kompaktifizierungen $(\varepsilon G,\ \hat{\varepsilon})$ *durch die Relation „$\prec$" gerichtet und sind* $(\varepsilon_1 G,\ \hat{\varepsilon}_1) \succ (\varepsilon_2 G,\ \hat{\varepsilon}_2)$ *zwei Kompaktifizierungen des Systems, so gilt* $\hat{\varepsilon}_2^1 \cdot \hat{\varepsilon}_1 = \hat{\varepsilon}_2$.

Ein System endlicher Kompaktifizierungen der Gruppe G heißt *vollständig*, wenn es zu jedem Normalteiler $N \in \mathfrak{N}$ eine endliche Kompaktifizierung $(\varepsilon G,\ \hat{\varepsilon})$ des Systems gibt, so daß der Kern von $\hat{\varepsilon}$ in N enthalten ist.

Ist N ein offener Normalteiler von endlichem Index in G und bezeichnet $\hat{\pi}_N$ wie oben den kanonischen Epimorphismus von G auf die endliche Gruppe G/N, so genügt es offenbar, den Satz 3 für das System $\{(G/N,\ \hat{\pi}_N)\}_{N\in\mathfrak{N}}$ von endlichen Kompaktifizierungen zu beweisen. Ist $N_2 \subset N_1$, so gilt $(G/N_1,\ \hat{\pi}_{N_1}) \succ (G/N_2,\ \hat{\pi}_{N_2})$, und wir bezeichnen mit $\hat{\pi}_2^1$ den durch $\hat{\pi}_2^1 \cdot \hat{\pi}_{N_1} = \hat{\pi}_{N_2}$ gegebenen Epimorphismus von G/N_1 auf G/N_2. Dann ist $\{(\sigma/N,\ \hat{\pi}_N);\ \hat{\pi}_2^1\}$ ein inverses Spektrum von Kompaktifizierungen, denn mit zwei Normalteilern $N,\ N' \in \mathfrak{N}$ gehört auch $N \cap N'$ zu $\mathfrak{N}$, und es gilt $(G/N \cap N', \hat{\pi}_{N\cap N'}) \succ (G/N, \hat{\pi}_N)$, sowie $(G/N \cap N', \hat{\pi}_{N\cap N'}) \succ (G/N', \hat{\pi}_{N'})$. Die Behauptung $(\tau G,\ \hat{\tau}) \underset{\text{top.}}{\cong} \varprojlim \{G/N,\ \hat{\pi}_N);\ \hat{\pi}_2^1\}$ ergibt sich unmittelbar aus dem Lemma 2 und dem bekannten Satz, daß jede total- unzusammenhängende kompakte topologische Gruppe als proketiver Limes ihrer endlichen Faktorgruppen dargestellt werden kann.

Aus dem Beweis von Satz 3 folgt als

Korollar 1: *Ist* $(\tau G,\ \hat{\tau})$ *die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung der topologischen Gruppe* G, *so gilt* $\operatorname{Ker} \hat{\tau} = C_0 = \bigcap_{N\in\mathfrak{N}} N$.

Dabei bezeichnet $\mathfrak{N}$ *wie oben das System aller offen- abgeschlossenen Normalteiler von endlichem Index in* G.

Korollar 2: *Die universelle total- unzusammenhängende Kompaktifizierung einer topologischen Gruppe* G *ist dann und nur dann nicht trivial, wenn in* G *ein echter abgeschlossener Normalteiler von endlichem Index existiert.*

Nennen wir eine Kompaktifizierung $(\eta G,\ \hat{\eta})$ der topologischen Gruppe

G zusammenhängend, wenn $\eta G = \overline{\hat{\eta}(G)}$ eine zusammenhängende kompakte topologische Gruppe ist, so erhalten wir aus dem Korollar 2 zum Satz 3 und dem Korollar zum Satz 1 den

Satz 4: *Die universelle Kompaktifizierung* $(\beta G, \hat{\beta})$ *(und damit jede Kompaktifizierung) einer topologischen Gruppe G ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn die Gruppe keinen echten abgeschlossenen Normalteiler von endlichem Index besitzt.*

Im letzten Abschnitt werden wir feststellen, daß es sich hierbei um eine direkte Verallgemeinerung des bekannten Satzes handelt, daß die Bohr- Kompaktifizierung einer abelschen Gruppe A dann und nur dann zusammenhängend ist, wenn die Charaktergruppe A^* von A torsionsfrei ist.

Der im Korollar 1 definierte abgeschlossene Normalteiler $C_0 = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N$ von G, der für kompakte topologische Gruppen mit der Zusammenhangskomponente von G zusammenfällt, scheint für die Untersuchung der Kompaktifizierungen einer topologischen Gruppe in verschiedener Hinsicht interessant zu sein. Fragt man z. B. nach den Möglichkeiten, eine gegebene Gruppe stetig und isomorph in eine kompakte topologische Gruppe einzulagern, so gilt der

Satz 5: *Ist* $(\beta G, \hat{\beta})$ *die universelle Kompaktifizierung der topologischen Gruppe G, so ist* $\hat{\beta}$ *dann und nur dann ein stetiger Monomorphismus, wenn die Einschränkung von* $\hat{\beta}$ *auf den Normalteiler* C_0 *ein stetiger Monomorphismus ist.*

Zum Beweis betrachten wir ein Repräsentantensystem $\{a_\iota\}_{\iota \in I}$ von G modulo C_0. Die Faktorgruppe G/C_0 besitzt nach dem Korollar 1 zum Satz 3 und dem Korollar zum Satz 1 die Kompaktifizierung $(\beta G/C^\beta, \hat{\tau}_0)$. Bezeichnet $\hat{\pi}_0$ den kanonischen Epimorphismus von G auf G/C_0, so ist $\hat{\tau}_0$ durch die Gleichung $\hat{\tau}_0 \cdot \hat{\pi}_0 = \hat{\pi} \cdot \hat{\beta}$ definiert und ein stetiger Isomorphismus. Infolgedessen gilt für jeden Repräsentanten $a_\iota \neq e$ die Relation $\hat{\pi} \cdot \hat{\beta}(a_\iota) = \hat{\tau}_0 \cdot \hat{\pi}_0(a_\iota) \neq e$. Ist $x = a_\iota x_0$, $x_0 \in C_0$ ein beliebiges Gruppenelement und $\hat{\beta}(x) = \hat{\beta}(a_\iota) \cdot \hat{\beta}(x_0) = e$, so ist $\hat{\pi} \cdot \hat{\beta}(a_\iota) = e$ und damit $a_\iota = e$. Der Satz 5 ist bewiesen, und wir erhalten.

Korollar 1: *Der Kern des stetigen Homomorphismus* $\hat{\beta}$ *von G in* βG *ist im Normalteiler* C_0 *enthalten.*

Korollar 2: *Ist* $C_0 = \{e\}$, *so ist* $\hat{\beta}$ *ein stetiger Monomorphismus von G in die kompakte topologische Gruppe* βG.

4. In diesem Abschnitt werden zusammenhängende Kompaktifizierungen untersucht. Insbesondere wird die Frage nach der Existenz einer universellen zusammenhängenden Kompaktifizierung einer topologischen Gruppe erörtert.

Wie im 2. Abschnitt bezeichne $\{H_i\}_{i=1,2,\dots}$ eine Folge von unitären Räumen, für die $\dim H_i = i$ $(i = 1, 2, \dots)$ gilt. Unter $\Phi^{(z)}$ verstehen wir die Familie der inäquivalenten unitären Darstellungen $\hat{\varphi}$ der topologischen Gruppe G in den unitären Räumen H_i, für die $\varphi G = \overline{\hat{\varphi} G}$ eine zusammenhängende Untergruppe von $\mathfrak{A}^{(i)}$ und damit $(\varphi G, \hat{\varphi})$ eine zusammenhängende Kompaktifizierung von G ist. Für die durch die Familie $\Phi = \Phi^{(z)}$ definierte Kompaktifizierung $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)}) = (\alpha_\Phi G, \hat{\alpha}_\Phi)$ der topologischen Gruppe G gilt der

Satz 6: *Für jede zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\eta G, \hat{\eta})$ *von* G *ist* $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)}) \succ (\eta G, \hat{\eta})$, *und es gibt genau einen stetigen Epimorphismus* $\hat{\gamma}_1$ *von* $\alpha^{(z)}G$ *auf* ηG *mit der Eigenschaft* $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\alpha}^{(z)} = \hat{\eta}$. *Ist* $(\alpha G, \hat{\alpha})$ *eine Kompaktifizierung von* G, *sodaß für alle zusammenhängenden Kompaktifizierungen* $(\eta G, \hat{\eta})$ *von* G $(\alpha G, \hat{\alpha}) \succ (\eta G, \hat{\eta})$ *gilt, so ist* $(\alpha G, \hat{\alpha}) \succ (\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$.

Die erste Aussage des Satzes 6 ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß für jede unitäre (irreduzible) Darstellung $\hat{\psi}$ der kompakten zusammenhängenden Gruppe ηG in den unitären Räumen H_i $(i = 1, 2, \ldots)$ das Bild $\psi\eta G = \hat{\psi}\eta G$ zusammenhängend und damit $\hat{\varphi} = \hat{\psi} \cdot \hat{\eta}$ eine Darstellung der Familie $\Phi^{(z)}$ ist. Zum Beweis der zweiten Aussage von Satz 6 betrachten wir eine Darstellung $\hat{\varphi} \in \Phi^{(z)}$ der topologischen Gruppe G. Da $(\varphi G, \hat{\varphi})$ eine zusammenhängende Kompaktifizierung von G ist, gibt es einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_\varphi$ von αG auf φG mit der Eigenschaft $\hat{\gamma}_\varphi \cdot \hat{\alpha} = \hat{\varphi}$. Die Abbildung $\hat{\gamma}'$, $x \to (\hat{\gamma}_\varphi x)_{\hat{\varphi}\in\Phi^{(z)}}$; $x \in \alpha G$ ist ein stetiger Epimorphismus von αG auf $\alpha^{(z)}G$.

Die Kompaktifizierung $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ der topologischen Gruppe G ist im allgemeinen nicht zusammenhängend. Wir nennen die bis auf topologische Isomorphie eindeutig bestimmte Kompaktifizierung $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ *die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* und bezeichnen sie mit $(\zeta G, \hat{\zeta})$, wenn $\alpha^{(z)}G$ eine zusammenhängende kompakte topologische Gruppe ist.

Um die Frage nach der Existenz der universellen zusammenhängenden Darstellung zu beantworten, beweisen wir zunächst das

Lemma 3: *Ist* $(\eta G, \hat{\eta})$ *eine zusammenhängende Kompaktifizierung der topologischen Gruppe* G *und* $(\alpha G, \hat{\alpha}) \succ (\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$, *so gibt es einen stetigen Epimorphismus* $\hat{\gamma}_0$ *der Zusammenhangskomponente* C^α *des Einselementes von* αG *auf* ηG.

Zunächst gibt es einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_2$ von αG auf $\alpha^{(z)}G$ und einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_1$ von $\alpha^{(z)}G$ auf ηG; damit ist $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ eine stetiger Epimorphismus von αG auf ηG mit der Eigenschaft $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\alpha} = \hat{\eta}$. Die Einschränkung von $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ auf C^α ist aber ebenfalls ein Epimorphismus $\hat{\gamma}_0$ von C^α auf ηG, da $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ die Zusammenhangskomponente der kompakten topologischen Gruppe αG auf die Zusammenhangskomponente der ebenfalls kompakten Gruppe ηG abbildet. Damit ist das Lemma 3 bewiesen.

Aus dem Lemma 3 folgt der

Satz 7: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Kompaktifizierung* $(\alpha G, \hat{\alpha}) \succ (\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ *der topologischen Gruppe* G, *sodaß* $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha)$ *eine zusammenhängende Kompaktifizierung von* G *ist;*

(2) *es gibt eine Kompaktifizierung* $(\alpha G, \hat{\alpha}) \succ (\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ *der topologischen Gruppe* G, *deren Zusammenhangskomponente des Einselementes* C^α *direkter Faktor in* αG *ist;*

(3) *die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\zeta G, \hat{\zeta})$ *existiert und ist zu* $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha)$ *topologisch isomorph.*

Aus (1) und dem Lemma 3 folgt die Existenz eines topologischen Isomorphismus $\hat{\gamma}_0$ von C^α auf $\eta_\alpha G = C^\alpha$ als Einschränkung des stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ von αG auf C^α. Damit ist aber C^α direkter Faktor in αG: $\alpha G = C^\alpha \times H^\alpha$. Ist $(\eta G, \hat{\eta})$ eine beliebige zusammenhängende Kompaktifizierung von G, $\alpha G = C^\alpha \times H^\alpha$ und $\hat{\gamma}_3$ ein stetiger Epimorphismus von αG auf ηG, so gilt $H^\alpha \subset \operatorname{Ker} \hat{\gamma}_3$. Infolgedessen läßt sich $\hat{\gamma}_3$ durch $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ faktorisieren: $\hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_4 \cdot \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$ sodaß $\hat{\gamma}_4 \cdot \hat{\eta}_\alpha = \hat{\eta}$ ist. Daraus folgt $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha) \succ (\eta G, \hat{\eta})$, und nach Satz 6 ist $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha) \succ (\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$. Da andererseits $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha)$ eine zusammenhängende Kompaktifizierung ist, gilt abermals nach Satz 6 $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)}) \succ (C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha)$. Die Kompaktifizierungen $(C^\alpha, \hat{\eta}_\alpha)$ und $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ sind also topologisch isomorph, und $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ ist zusammenhängend. Damit ist (3) bewiesen. Die Aussage (1) folgt nun trivial, wenn man $(\alpha G, \hat{\alpha}) = (\zeta G, \hat{\zeta})$ setzt.

Für den Spezialfall $(\alpha G, \hat{\alpha}) = (\beta G, \hat{\beta})$ erhalten wir als

Korollar: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\zeta G, \hat{\zeta})$ *der topologischen Gruppe* G *existiert, und* ζG *ist topologisch isomorph der Zusammenhangskomponente des Einselementes* C^β *von* βG*;*

(2) *die Zusammenhangskomponente des Einselementes* C^β *ist direkter Faktor in* βG*;*

(3) βG *besitzt einen zu* τG *topologisch isomorphen direkten Faktor;*

(4) *es gilt* $\beta G \underset{\text{top.}}{\cong} \alpha^{(z)}G \times \tau G$.

Ist $\beta G = C^\beta \times H^\beta$, so folgt unmittelbar $\tau G \underset{\text{top.}}{\cong} \beta G / C^\beta \underset{\text{top.}}{\cong} H^\beta$. Ist umgekehrt $\beta G = H_0^\beta \times H^\beta$ und $\hat{\iota}$ ein topologischer Isomorphismus von H^β auf τG, so ist $\hat{\iota} \,.\, \hat{\pi}_0$ ein stetiger Epimorphismus von βG auf τG, wenn $\hat{\pi}_0$ den kanonischen Epimorphismus von βG auf $\beta G / H_0^\beta$ bezeichnet. Da τG total- unzusammenhängend ist, gilt $H_0^\beta \subset C^\beta$, und aus $\tau G \underset{\text{top.}}{\cong} \beta G / C^\beta$ folgt $H_0^\beta = C^\beta$. Damit ist die Äquivalenz von (2) und (3) bewiesen. Gilt nun (1), so ist $\zeta G \underset{\text{top.}}{\cong} C^\beta \underset{\text{top.}}{\cong} \alpha^{(z)}G$, und aus (2) folgt (4). Umgekehrt folgt aus (4) die Aussage (3) und damit (1).

Der Korollar zum Satz 7 läßt sich zu einem Satz verallgemeinern, der die Existenz einer universellen zusammenhängenden Kompaktifizierung mit der Existenz gewisser, in einem anderen Sinne universeller Kompaktifizierungen in Beziehung setzt:

Satz 8: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\zeta G, \hat{\zeta})$;

(2) *unter allen Kompaktifizierungen* $(\alpha G, \hat{\alpha})$, *für die die Zusammenhangskomponente des Einselementes* C^{α} *direkter Faktor in* αG *ist, existiert eine universelle;*

(3) *unter allen Kompaktifizierungen* $(\alpha G, \hat{\alpha})$, *für die* αG *einen zu* τG *isomorphen direkten Faktor besitzt, existiert eine universelle.*

Es sei $(\alpha G, \hat{\alpha})$ eine Kompaktifizierung von G und $\alpha G = C^{\alpha} \times H^{\alpha}$. Es gibt genau einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}$ von βG auf αG. Die Einschränkung $\hat{\gamma}_0$ von $\hat{\gamma}$ auf C^{β} ist ein stetiger Epimorphismus von C^{β} auf C^{α}. Da $(C^{\alpha}, \hat{\eta}_{\alpha})$ eine zusammenhängende Kompaktifizierung ist, gibt es einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_1$ von ζG auf C^{α}, durch den $\hat{\gamma}_0$ faktorisiert werden kann $\hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$. Dabei ist $\hat{\gamma}_2$ die Einschränkung des stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_3$ von βG auf ζG auf die Untergruppe C^{β} (vgl. Lemma 3). Die Untergruppe Ker $\hat{\gamma}_2$ ist abgeschlossener Normalteiler in βG, und $(\beta G/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2, \hat{\pi}_2 \cdot \hat{\beta})$ ist eine Kompaktifizierung von G mit der Eigenschaft $(\beta G/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2, \hat{\pi}_2 \cdot \hat{\beta}) \succ (\alpha G, \hat{\alpha})$. Dabei bezeichnet $\hat{\pi}_2$ den kanonischen Epimorphismus von βG auf $\beta G/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2$. Beachten wir die Gleichungen $\beta G = C^{\beta} \cdot \mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_3$ und $\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_3 \cap C^{\beta} = \mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2$, so ist $\beta G/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2 = \delta G$ eine kompakte topologische Gruppe, in der die Zusammenhangskomponente des Einselementes $C^{\delta} = C^{\beta}/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2$ direkter Faktor ist. Mit $\hat{\delta} = \hat{\pi}_2 \cdot \hat{\beta}$ ist $(\delta G, \hat{\delta})$ die in (2) genannte universelle Kompaktifizierung. Aus der topologischen Isomorphie $\beta G/C^{\beta} \underset{\text{top.}}{\cong} \beta G/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2/C^{\beta}/\mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_2$ folgt unmittelbar, daß $\delta G \underset{\text{top.}}{\cong} C^{\delta} \times \tau G$ ist. Ist aber umgekehrt $(\alpha G, \hat{\alpha})$ eine Kompaktifizierung von G und $\alpha G \underset{\text{top.}}{\cong} H_0^{\alpha} \times \tau G$, so ist $H_0^{\alpha} \underset{\text{top.}}{\cong} C^{\alpha}$, d. h. $\alpha G = C^{\alpha} \times H^{\alpha}$, und es gilt $(\delta G, \hat{\delta}) \succ (\alpha G, \hat{\alpha})$. Ist schließlich $(\eta G, \hat{\eta})$ eine zusammenhängende Kompaktifizierung, so ist $\eta G = C^{\eta} \times \{e\}$, und folglich gibt es einen stetigen Epimorphismus $\hat{\gamma}_4$ von δG auf ηG, wobei $\tau G \subset \mathrm{Ker}\,\hat{\gamma}_4$ ist. Daraus folgt, daß $(\zeta G, \hat{\zeta})$ existiert und zu $(\delta G/H^{\delta}, \hat{\pi}_{\delta} \cdot \hat{\delta})$ topologisch isomorph ist. Der Satz 8 ist bewiesen, und aus dem Beweis ergibt sich als

Korollar: *Ist eine der Aussagen des Satzes* 8 *erfüllt, so sind die unter* (2) *und* (3) *genannten universellen Kompaktifizierungen topologisch isomorph zu* $(\delta G, \hat{\delta})$ *mit* $\delta G = \zeta G \times \tau G$ *und* $\hat{\delta} = \hat{\zeta} \times \hat{\tau}$, *d. h.*

$$\hat{\delta} : x \to (\hat{\zeta} x, \hat{\tau} x);\ x \in G.$$

Zur Beschreibung der Kompaktifizierung $(\delta G, \hat{\delta})$ durch eine Familie von endlichdimensionalen unitären (irreduziblen) Darstellungen der Gruppe G betrachten wir die Familie $\Phi^{(s)} = \Phi^{(e)} \cup \Phi^{(z)}$, die sich als Vereinigung der endlichen (irreduziblen) Darstellungen von G mit den unitären (irreduziblen) Darstellungen von G ergibt, für die φG zusammenhängend ist. Die zugehörige Kompaktifizierung $(\alpha^{(s)}G, \hat{\alpha}^{(s)}) = (\alpha_\Phi G, \hat{\alpha}_\Phi)$ für $\Phi = \Phi^{(s)}$ erhalten wir auch als zugeordnete Kompaktifizierung aus der Einlagerung $(\alpha^{(z)}G \times \tau G, \hat{\alpha}^{(z)} \times \hat{\tau})$, die im allgemeinen keine Kompaktifizierung von G ist. Mit $\hat{\alpha}^{(z)} \times \hat{\tau}$ ist dabei der stetige Homomorphismus $x \to (\hat{\alpha}^{(z)}x, \hat{\tau}x)$ von G in $\alpha^{(z)}G \times \tau G$ bezeichnet. Die kompakte topologische Gruppe $\alpha^{(s)}G$ ist ein subdirektes Produkt der kompakten topologischen Gruppen $\alpha^{(z)}G$ und τG. Als abschließendes Ergebnis erhalten wir den

Satz 9: *Die Kompaktifizierung $(\delta G, \hat{\delta})$ und damit die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung $(\zeta G, \hat{\zeta})$ der topologischen Gruppe G existiert dann und nur dann, wenn die Einlagerung $(\alpha^{(z)}G \times \tau G, \hat{\alpha}^{(z)} \times \hat{\tau})$ eine Kompaktifizierung von G ist. Dann gilt $(\delta G, \hat{\delta}) \cong (\zeta G \times \tau G, \hat{\zeta} \times \hat{\tau})$.*

Die eine Richtung des Satzes 9 ergibt sich aus dem Korollar zum Satz 8, während die andere trivial aus den Eigenschaften von $(\alpha^{(z)}G, \hat{\alpha}^{(z)})$ und $(\tau G, \hat{\tau})$ folgt.

5. Als Spezialfall betrachten wir die abelschen topologischen T_0-Gruppen. Ist $\hat{\varphi}$ ein stetiger Charakter der abelschen topologischen Gruppe A, so ist $\overline{\hat{\varphi} A} = \varphi A$ eine endliche Untergruppe von $\mathfrak{A}_1$ oder gleich $\mathfrak{A}_1$ und damit zusammenhängend. Infolgedessen ist $\Phi^{(s)} = \Phi^{(e)} \cup \Phi^{(z)}$ die Charaktergruppe der abelschen Gruppe A, und $(\alpha^{(s)}A, \hat{\alpha}^{(s)})$ ist zu $(\beta A, \hat{\beta})$ topologisch isomorph. Aus den Sätzen 7 und 9 erhalten wir den

Satz 10: *Ist A eine abelsche topologische Gruppe, so existiert dann und nur dann eine universelle zusammenhängende Kompaktifizierung $(\zeta A, \hat{\zeta})$ von A, wenn die kompakte abelsche Gruppe βA in das direkte Produkt einer total- unzusammenhängenden und einer zusammenhängenden Untergruppe zerfällt. Dann ist die universelle Kompaktifizierung $(\beta A, \hat{\beta})$ zur Kompaktifizierung $(\zeta A \times \tau A, \hat{\zeta} \times \hat{\tau})$ topologisch isomorph, und es gilt $\zeta A \underset{\text{top.}}{\cong} C^\beta$.*

Ist Φ eine beliebige Menge von stetigen Charakteren der abelschen topologischen Gruppe A und ist $(\alpha_\Phi A, \hat{\alpha}_\Phi)$ die zugehörige Kompaktifizierung, so erhält man die kompakte abelsche Gruppe $\alpha_\Phi A$ bis auf topologische Isomorphie als die Charaktergruppe der von Φ erzeugten Untergruppe der Charaktergruppe von A, wobei diese Untergruppe mit der diskreten Topologie zu versehen ist. Beachtet man, daß ein Charakter $\hat{\varphi}$ der abelschen Gruppe A dann und nur dann eine endliche Ordnung besitzt, wenn φA eine endliche Untergruppe von $\mathfrak{A}_1$ ist, so ergibt sich der

Satz 11: a) *Für die universelle total- unzusammenhängende Kompakti-*

fizierung $(\tau A, \hat{\tau})$ *einer abelschen Gruppe* A *ist die kompakte abelsche Gruppe* τA *zur Charaktergruppe der mit der diskreten Topologie versehenen Torsionsuntergruppe* $\Phi^{(e)}$ *der Charaktergruppe* $\Phi^{(s)}$ *von* A *topologisch isomorph.*

b) *Die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\zeta A, \hat{\zeta})$ *existiert für eine abelsche topologische Gruppe dann und nur dann, wenn die mit der diskreten Topologie versehene Charaktergruppe* $\Phi^{(s)}$ *von* A *das direkte Produkt ihrer Torsionsuntergruppe* $\Phi^{(e)}$ *und einer torsionsfreien Unterguppe* $\Phi^{(z)}$ *ist. Die kompakte abelsche Gruppe* ζA *ist dann zur Charaktergruppe der diskreten Gruppe* $\Phi^{(z)}$ *topologisch isomorph.*

c) *Die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung* $(\zeta A, \hat{\zeta})$ *existiert für eine abelsche topologische Gruppe genau dann, wenn die Charaktere* $\hat{\varphi}$ *mit zusammenhängender Bildgruppe* $\varphi A = \overline{\hat{\varphi} A}$ *eine Gruppe bilden.*

Aus diesem Satz folgen unmittelbar die bekannten Aussagen:

Korollar: *Die universelle Kompaktifizierung* $(\beta A, \hat{\beta})$ *einer abelschen Gruppe* A *ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn die Charaktergruppe von* A *torsionsfrei ist, und* $(\beta A, \hat{\beta})$ *ist dann und nur dann total-unzusammenhängend, wenn die Charaktergruppe von* A *eine Torsionsgruppe ist.*

Als Beispiel betrachten wir die diskrete abelsche Gruppe Γ^+, die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Hier ist $(\tau\Gamma^+, \hat{\tau})$ die universelle total- unzusammenhängende monothetische Gruppe d. h. die universelle monothetische Cantor-Gruppe. Die kompakte Gruppe $\tau\Gamma^+$ ist die Charaktergruppe der diskreten additiven Gruppe der rationalen Zahlen mod 1. Die universelle zusammenhängende Kompaktifizierung $(\zeta\Gamma^+, \hat{\zeta})$ der abelschen Gruppe Γ^+ existiert und ist das universelle kompakte Solenoid. Bezeichnet N^+ die additive Gruppe der reellen Zahlen und ist $(\beta N^+, \hat{\beta})$ die universelle Kompaktifizierung von N^+, so sind die kompakten Gruppen $\zeta\Gamma^+$ und βN^+ topologisch isomorph. Für die universelle Kompaktifizierung von Γ^+ gilt dann die topologische Isomorphie: $(\beta\Gamma^+, \hat{\beta}) \underset{\text{top.}}{\cong} \underset{\text{top.}}{\cong} (\zeta\Gamma^+ \times \tau\Gamma^+; \hat{\zeta} \times \hat{\tau})$. Ist N_g^+ die additive total- unzusammenhängende Gruppe eines g— adischen Zahl- oder Funktionenkörpers, so folgt aus der bekannten Isomorphie zwischen Gruppe und Charaktergruppe der

Satz 12: *Ist* N_g *ein Körper der Charakteristik* 0, *so ist* $(\beta N_g^+, \hat{\beta}) = = (\zeta N_g^+, \hat{\zeta})$ *zusammenhängend, und die kompakten topologischen Gruppen* βN_g^+ *und* βN^+ *sind topologisch isomorph. Ist* N_g *ein Körper der Charakteristik* $p \neq 0$, *so ist* $(\beta N_g^+, \hat{\beta}) = (\tau N_g^+, \hat{\tau})$ *total- unzusammenhängend, und* βN_g^+ *ist topologisch isomorph zum Tychonoffschen Produkt eines Kontinuums von Exemplaren der zyklischen Gruppe der Ordnung* p.

LITERATUR

[1] Alfsen E. M. u. Holm P., *A note on compact representations and almost periodicity in topological groups*, Math. Scand. 10 (1962), 127—136

[2] Anzai H. u. Kakutani S., *Bohr compactifications of a locally compact abelian group I. II.* Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), 476—480 und 533—539

[3] Boseck H., *Darstellungen von Matrizengruppen über topologischen Körpern I*, Math. Nachrichten 24 (1962), 229—243.

[4] Freudenthal H., *Einige Sätze über topologische Gruppen*, Ann. of Math. 37 (1936), 46—56.

[5] Freudenthal H., *Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen*, Ann. of Math. 37 (1936), 57—77.

[6] Hewitt E. u. Ross K. A., *Abstract harmonic analysis I*, Springer Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg 1963.

[7] Weil A., *L'integration dans les groupes topologiques*. Deuxiéme édition, Act. Sci. Ind. 869/1145 Paris 1953