Archivum Mathematicum

Jan Voráček

Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 1, 19--26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104602`

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER EINE NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

JAN VORÁČEK, OLOMOUC

Eingegangen am 16. November 1965

In der vorliegenden Arbeit (welche an die gleichnamige Arbeit [1] anknüpft) beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung

$$x''' + ax'' + bx' + h(x) = Q(t), \tag{1}$$

wo a, b positive Konstanten und $h(x)$, $Q(t)$ stetige und beschränkte Funktionen ihrer Argumente im Intervalle $(-\infty, +\infty)$ sind. Die obere Schranke von $h(x)$ bezeichnen wir mit H, so daß $|h(x)| \leqq H$ für alle x gilt.

Satz 1. Jede Lösung der Gleichung (1) existiert in einem nach rechts unbeschränktem Intervalle $\langle t_0, +\infty)$ und es gibt eine Gleichungkonstante $D > 0$ so, daß die Relationen

$$\limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq D, \quad \limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq D$$

für jede Lösung gelten.

Satz 2. Es sei noch

$$\left| \int_0^t Q(s)\, \mathrm{d}s \right| \leqq Q \text{ für alle } t. \tag{V_1}$$

Gibt es eine Konstante $h > 0$ so, daß für $|x| \geqq h$, $h(x) \,.\, \operatorname{sgn} x \geqq 0$ ist, so sind alle Lösungen der Gleichung (1) beschränkt.

Die Beweise dieser Sätze sind in [1].

Satz 3. Wenn eine Konstante $h > 0$ existiert so, daß für $|x| \geqq h$

$$h(x) \operatorname{sgn} x > 0 \tag{V_2}$$

ist und wenn noch (V_1) gilt, so gibt es eine Gleichungkonstante $D_1 > 0$ so, daß für jede Lösung $x(t)$ der Gleichung (1)

(2) $\limsup\limits_{t\to+\infty} |x(t)| \leqq D_1$, $\limsup\limits_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq D_1$, $\limsup\limits_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq D_1$

ist.

Beweis: Da in diesem Falle die Voraussetzungen des Satzes 2 befriedigt sind, ist jede Lösung von (1) beschränkt. Betrachten wir eine beliebige, fest erwählte Lösung $x(t)$ von (1). Sei t_0 eine solche Zahl, daß $x(t)$ für alle $t \geqq t_0$ existiert und schließlich sei $\sup\limits_{t\geqq t_0} |x(t)| = X$. Wir bemerken noch, daß wir $X > h$ voraussetzen dürfen, da die Lösungen, welche dieser Ungleichheit nicht genügen, unseren Satz mit $D_1 = \mathrm{Max}\ (h, D)$ erfüllen. Aus der Stetigkeit der Funktion $h(x)$ im Intervalle $\langle h, X\rangle$ und aus (V_2) schließen wir jetzt, daß ein $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft existiert: für alle t, für welche $|x(t)| \geqq h$ ist, gilt auch

$$x(t)\, h[x(t)] \geqq \delta. \tag{3}$$

Aus dem Satz 1 geht auch die Existenz eines solchen $T \geqq t_0$ hervor, daß für alle $t \geqq T$ die Ungleichheiten $|x'(t)| \leqq D+1$, $|x''(t)| \leqq D+1$ gelten. Durch Integration von (1) ($t \geqq t_1 \geqq T$) bekommen wir also die Abschätzung

$$\left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)]\, \mathrm{d}s \right| \leqq 2(a+1)(D+1) + 2bX + 2Q. \tag{4}$$

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir für diese t

$$|x(t)| \leqq |x(t_1)| + (D+1)(t-t_1). \tag{5}$$

Setzen wir jetzt voraus, daß für $t \geqq t_1$ stets $|x(t)| \geqq h$ ist. Nach (3) und (5) bekommen wir in diesem Falle

$$h[x(t)]\ \mathrm{sgn}\, x(t) \geqq \frac{\delta}{|x(t_1)| + (D+1)(t-t_1)}. \tag{6}$$

Gleichzeitig gilt freilich $\mathrm{sgn}\, x(t) = \mathrm{sgn}\, h[x(t)] = \mathrm{sgn} \int_{t_1}^{t} h[x(s)]\, \mathrm{d}s$. Durch Integration von (6) folgt also

$$\left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)]\, \mathrm{d}s \right| \geqq \delta \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{|x(t_1)| + (D+1)(s-t_1)}.$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{t\to+\infty} \left| \int_{t_1}^{t} h[x(s)]\, \mathrm{d}s \right| = +\infty,$$

was im Widerspruch mit (4) steht. Es muß also die Relation

$$\liminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqq h \tag{7}$$

richtig sein. Sei $\alpha > 0$. Gibt es nun überhaupt einen Zeitpunkt $t \geqq T$, in dem $|x(t)| > h + \alpha$ ist, so gibt es nach (7) auch einen Wert $t_2 \geqq T$ mit $|x(t_2)| = h + \alpha$. Dann liefert aber die Gleichung (1) durch Integration, für $t \geqq t_2$ (solange $|x(t)| > h + \alpha$ gilt):

$$\begin{aligned} b\,|x(t)| &\leqq |x''(t) - x''(t_2)| + a\,|x'(t) - x'(t_2)| + b\,|x(t_2)| - \\ &\quad - \int_{t_2}^{t} h[x(s)]\,\mathrm{d}s \operatorname{sgn} x(t) + \left|\int_{t_2}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq \\ &\leqq 2(a+1)(D+1) + 2Q + b(h+\alpha). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung unseres Satzes.

Bemerkung 1. Satz 3 stimmt mit dem Resultat von Reissig [2] überein, das mit einer anderen Methode gefunden wurde. Die hier benutzte Methode läßt mehr Raum für das Studium anderer Eigenschaften der Lösungen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 4. Wenn (V_1) und (V_2) für alle $x \neq 0$ gelten, ist jede Lösung $x(t)$ von (1) oszillatorisch, oder es gilt

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0. \tag{7'}$$

Beweis siehe [1].

In den folgenden zwei Sätzen benutzen wir das Symbol $\operatorname{sg} Q(t)$, definiert wie folgt: Ist $Q(t) \geqq 0$ ($\leqq 0$) für alle t, setzen wir $\operatorname{sg} Q(t) = 1$ (-1). Ist $Q(t) = 0$, setzen wir $\operatorname{sg} Q(t) = 1$ oder $\operatorname{sg} Q(t) = -1$.

Satz 5: Es sei $\operatorname{sg} Q(t) = \text{const}$ und

$$h(x) \operatorname{sgn} x \leqq 0 \text{ für } x \neq 0. \tag{V_3}$$

Dann existieren nichtoszillierende Lösungen von (1), welche die Relationen

$$\operatorname{sgn} \liminf_{t\to+\infty} x(t) = \operatorname{sgn} \limsup_{t\to+\infty} x(t) = \operatorname{sg} Q(t)$$

begriedigen.

Beweis: Wir benutzen die Identität

$$\begin{aligned} & x''(t)\,x(t) - \frac{1}{2}x'^2(t) + ax'(t)\,x(t) - a\int_{t_0}^{t} x'^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b}{2}x^2(t) = \\ & = x''(t_0)\,x(t_0) - \frac{1}{2}x'^2(t_0) + ax'(t_0)\,x(t_0) + \frac{b}{2}x^2(t_0) - \int_{t_0}^{t} x(s)\,h[x(s)]\,\mathrm{d}s + \\ & \quad + \int_{t_0}^{t} x(s)\,Q(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{8}$$

welche aus (1) durch Multiplizieren mit $x(t)$ und partielle Integration zwischen den Grenzen t_0, t entsteht.

Sei $x_1(t)$ eine Lösung von (1) mit folgenden Eigenschaften:

1°: $F(t_0) = x_1(t_0)\, x_1''(t_0) - \frac{1}{2}\, x_1'^2(t_0) + a x_1'(t_0)\, x_1(t_0) + \frac{b}{2}\, x_1^2(t_0) > 0.$

2°: Es gibt ein $\delta > 0$ so, daß im Intervalle $\langle t_0, t_0 + \delta)$ $\operatorname{sgn} x_1(t) =$ $= \operatorname{sg} Q(t)$ ist.

(Um eine solche Lösung zu bekommen, brauchen wir zum Beispiel nur, für die Anfangsbedingungen im Punkte t_0 folgende Relationen vorzuschreiben: $\operatorname{sgn} x_1(t_0) = \operatorname{sgn} x_1''(t_0) = \operatorname{sg} Q(t)$, $x_1'(t_0) = 0$.)

Wir beweisen jetzt, daß die Gleichheit in 2° für alle $t \geqq t_0$ richtig bleibt. Anderenfalls würde sie nur in einem Intervalle $\langle t_0, t_1)$ $(t_1 > t_0)$ richtig und $x_1(t_1) = 0$. Aus (V_3) haben wir

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1(s)\; h[x_1(s)]\, ds \leqq 0. \tag{9}$$

Wenn wir also in (8) $x_1(t)$ für $x(t)$ und t_1 für t setzen, erhalten wir

$$-\frac{1}{2}\, x_1'^2(t_1) - a \int_{t_0}^{t_1} x_1'^2(t)\, dt = F(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)\, h[x_1(t)]\, dt + \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)\, Q(t)\, dt.$$

Wegen 1°, (9) und 2° ist die rechte Seite dieser Formel positiv, die linke dagegen nicht positiv. Dieser Widerspruch beweist uns, daß kein solches endliches t_1 existieren kann und damit auch die Existenz nichtoszillierender Lösungen. Es kann aber auch nicht $\liminf_{t\to+\infty} |\, x_1(t)\, | = 0$ gelten, denn sonst könnte man eine monoton wachsende, divergente Folge $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ aufstellen so, daß $\lim_{n\to+\infty} x_1(t_n) = 0$ wäre. Daraus würde aber [$x_1(t)$ kann jetzt nicht mehr konstant sein]

$$\lim_{n\to+\infty} \Big[x_1''(t_n)\, x_1(t_n) - \frac{1}{2}\, x_1'^2(t_n) + a x_1'(t_n)\, x_1(t_n) - \\ - a \int_{t_0}^{t_n} x_1'^2(t)\, dt + \frac{b}{2}\, x_1^2(t_n) \Big] < 0 \tag{10}$$

folgen, da $x_1'(t)$ und $x_1''(t)$ beschränkt sind laut Satz 1. Aus dem Vorangehenden bekommen wir aber für alle n

$$F(t_0) - \int_{t_0}^{t_n} x_1(t)\, h[x_1(t)]\, dt + \int_{t_0}^{t_n} x_1(t)\, Q(t)\, dt > 0$$

und also kann (10) nicht richtig sein. Der Satz ist somit bewiesen.

Satz 6. Es sei $\operatorname{sg} Q(t) = \text{const}$ und

$$(\mathrm{V}_4) \qquad h(x) \operatorname{sgn} x < 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Dann existieren Lösungen $x(t)$ von (1) mit $\limsup_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$.

Beweis: Wir nehmen wieder die Lösung $x_1(t)$ mit den Eigenschaften 1°, 2° aus dem Beweise des Satzes 5. Es gibt (Satz 1) ein $T \geqq t_0$ so, daß für alle $t \geqq T$ die Ungleichheiten $|x_1'(t)| \leqq D + 1$, $|x_1''(t)| \leqq D + 1$ gelten. Nach Satz 5 können wir ein $t_1 > T$ und ein $d > 0$ finden so, daß für $t \geqq t_1$ $|x_1(t)| \geqq d$ ist. Nehmen wir jetzt an, daß $x_1(t)$ im Intervalle $\langle t_0, +\infty)$ beschränkt sei und bezeichnen $\sup |x_1(t)| = X_1$ (für $t_0 \leqq t < +\infty$). Da $h(|x|)$ stetig ist, sehen wir aus (V_4), daß eine positive Zahl $\varepsilon(d)$ existiert von der Beschaffenheit, daß für $d \leqq |x| \leqq X_1$ die Ungleichheit $h(x) \operatorname{sgn} x < -\varepsilon(d)$ gilt. Für $t \geqq t_1$ haben wir also $x_1(t)\, h[x_1(t)] < -\varepsilon(d)\, d$ und daraus für dieselben t

$$(11) \qquad -\int_{t_0}^{t} x_1(s)\, h[x_1(s)]\, ds \geqq -\int_{t_1}^{t} x_1(s)\, h[x_1(s)]\, ds \geqq d\varepsilon(d)\,(t - t_1).$$

Aus dem Beweise des vorigen Satzes wissen wir aber, daß $\int_{t_0}^{t} x_1(s)\, Q(s)\, ds$ nicht negativ ist und daher nach 1° und (8) (wieder für $t \geqq t_1$)

$$-\int_{t_0}^{t} x_1(s)\, h[x_1(s)]\, ds < x_1''(t)\, x_1(t) + a x_1'(t)\, x_1(t) + \frac{b}{2} x_1^2(t).$$

Diese Ungleichheit liefert uns (da $t_1 > T$) die Abschätzung

$$-\int_{t_0}^{t} x_1(s)\, h[x_1(s)]\, ds \leqq (D + 1)\,(a + 1)\, X_1 + \frac{b}{2} X_1^2,$$

die im Widerspruch mit (11) ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 2. Ist im Satze 6 $\operatorname{sg} Q(t) = 1\ (-1)$, gilt natürlich $\limsup_{t \to +\infty} x_1(t) = +\infty$ $(\liminf_{t \to +\infty} x_1(t) = -\infty)$. In dem Falle $Q(t) \equiv 0$ gibt es also Lösungen beider Typen.

Satz 7. Wenn (V_1) gilt und

$$(\mathrm{V}_5) \qquad \limsup_{|x| \to +\infty} x h(x) < -S$$

$\left(\text{wo } S = \dfrac{H}{b}(D + Q),\ D \text{ aus dem Satz 1}\right)$

ist, dann existieren Lösungen der Gleichung (1), für welche $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$ ist.

Beweis: Wir betrachten die Vergleichsfunktion $V(x_1, x_2, x_3, t)$, definiert wie folgt:

(12)

$$2V(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{2a}{b}\int_0^{x_1} h(x)\, dx + \frac{1}{b}[x_3 + ax_2 + bx_1 - \int_0^t Q(s)\, ds]^2.$$

Es ist leicht einzusehen, daß für $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < +\infty$

(13) $$\lim_{|x_1| \to +\infty} V(x_1, x_2, x_3, t) = +\infty$$

gilt, da das Integral $\int_0^{x_1} h(x)\, dx$ kann nur linear wachsen, der zweite Summand aus der rechten Seite von (12) dagegen kvadratisch in x_1 ist. Wir bezeichnen mit $S(k)$ die Nummer sup $V(x_1, x_2, x_3, t)$ auf der Menge $|x_1| \leqq k$, $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < +\infty$. Die Voraussetzung (V_5) sichert uns die Existenz zwei positiven Zahlen h_1 und d so, daß für $|x| \geqq h_1$ die Ungleichheit $xh(x) < -S - d$ gilt. Aus (13) folgern wir daß

$$V(x_1, x_2, x_3, t) > S(h_1)$$

gilt für $|x_2| \leqq D$, $|x_3| \leqq D$, $-\infty < t < +\infty$ und genügend großes $|x_1|$, $|x_1| \geqq h > h_1$. Wir ziehen auch eine Lösung $x(t)$ von (1) ins Betracht, und zwar solche, für welche $|x(t_0)| > h$, $x'(t_0) = x''(t_0) = 0$. Für diese Lösung gilt für $t \geqq t_0$ stets $|x'(t)| \leqq D$, $|x''(t)| \leqq D$ (siehe [1]). Setzen wir jetzt in die Funktion (12) für x_1, x_2, x_3 die Funktionen $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ ein. Wir erhalten so eine zusammengesetzte Funktion $V_x(t)$; für seine Ableitung gilt in einem Intervall $\langle t_0, t_0 + \delta)$

(14) $$V_x'(t) = -x(t)\, h[x(t)] - \frac{1}{b} x''(t)\, h[x(t)] + \frac{1}{b} h[x(t)] \int_0^t Q(s)\, ds \geqq$$
$$\geqq -x(t)\, h\,[x(t)] - S > d > 0.$$

Das Intervall $\langle t_0, t_0 + \delta)$ ist durch die Ungleichheit $|x(t)| \geqq h_1$ charakterisiert. Gäbe es aber eine Zahl $\Theta > t_0$ so, daß $|x(t)| > h_1$ für $t_0 \leqq t < \Theta$, $|x(\Theta)| = h_1$ wäre, so hätten wir

$$V_x(\Theta) \leqq S(h_1) < V_x(t_0).$$

Die letzte Relation kann aber nicht richtig sein, da laut (14) die Ableitung $V_x'(t)$ für $t_0 \leqq t \leqq \Theta$ positiv ist. Für $t \geqq t_0$ gilt also stets $|x(t)| > h_1$; dann gilt für diese t auch (14) und also $\lim_{t \to +\infty} V_x(t) = +\infty$. Daher auch $\lim_{\to +\infty} |x(t)| = +\infty$ und der Satz ist bewiesen.

Satz 8. Wenn in (1) die Voraussetzungen (V_1), (V_2) für alle $x \neq 0$ gelten und darüber noch $\lim_{t \to +\infty} Q(t) = 0$ ist und $\int_0^\infty Q(t)\,dt$ existiert nicht, so sind alle Lösungen von (1) oszillierend.

Beweis: Wir betrachten eine solche Lösung $x(t)$ von (1), für welche (7′) gilt. Wir haben wie in [1]:

$$x'(t) = y_1(t) + \int_T^t y_0(t-s)\{-h[x(s)] + Q(s)\}\,ds, \tag{15}$$

wo $y_1(t)$ und $y_0(t)$ geeignete Lösungen der Gleichung $y'' + ay' + by = 0$ bedeuten. Nehmen wir nun ein $\varepsilon > 0$. Es ist klar, daß bei genügend großem T für alle $t \geqq T$ die Relationen $|y_1(t)| \leqq \varepsilon$, $|h[x(t)]| \leqq \varepsilon$, $|Q(t)| \leqq \varepsilon$ richtig sein müssen und daher nach (15) $|x'(t)| \leqq \varepsilon[1 + 2M]$.

Das bedeutet aber

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = 0. \tag{16}$$

Ähnlich gilt auch

$$\lim_{t \to +\infty} x''(t) = 0 \tag{17}$$

und nach (1) auch

$$\lim_{t \to +\infty} x'''(t) = 0. \tag{18}$$

Es ist leicht einzusehen, daß in unserem Falle die Relationen (16), (17), (18) auch eine genügende Bedingung für (7′) darstellen.

Wenn $x(t)$ nicht oszilliert und also für $t \geqq T$ stets $x(t) > 0$ oder $x(t) < 0$ ist, muß nach (V_2) sgn $h[x(t)] =$ const gelten. Durch Integration von (1) bekommen wir nach dem Übergang zu den absoluten Beträgen:

$$\left|\int_T^t h[x(s)]\,ds\right| = \int_T^t |h[x(s)]|\,ds \leqq |x''(T)| + |x''(t)| + a[|x'(T)| +$$
$$+ |x'(t)|] + b[|x(T)| + |x(t)|] + \left|\int_T^t Q(s)\,ds\right|.$$

Nach (V_1) und den Sätzen 1, 2 konvergiert also das Integral $\int_T^\infty h[x(t)]\,dt$ absolut. Es ist aber klar, daß laut (7′), (16), (17) das Limes der rechten Seite der Identität

$$\int_T^t h[x(s)]\,ds = x''(T) - x''(t) + a[x'(T) - x'(t)] + b[x(T) - x(t)] +$$
$$+ \int_T^t Q(s)\,ds$$

nicht existieren kann. Der Widerspruch beweist unseren Satz. Einen anderen Oszillationsatz haben wir in [3] bewiesen:

Satz 9. Wenn in der Gleichung (1) die Voraussetzungen (V_1), (V_2) für alle $x \neq 0$ gelten und $Q(t) \not\equiv 0$ eine periodische Funktion ist, so oszillieren alle Lösungen von (1) und es kann nicht (7') gelten.

Bemerkung 3. Es ist ohne weiteres klar, daß die beschriebene Methode auch auf allgemeinere Gleichungen benutzt werden kann, besonders auf die Gleichung

$$x''' + f(x')\, x'' + bx' + h(x) = Q(t).$$

LITERATUR

[1] Voráček J., *Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung*. Abhandlugen der Deutschen Akademie der Wissenschaften, III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen. S. 372—378. Akademie. Verlag Berlin 1965.

[2] Reissig R., *Ein Beschränkheitsatz für gewisse nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung*. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften, 1964, 6, s. 481—484.

[3] Voráček J., *O některých nelineárních diferenciálních rovnicích třetího řádu*. Acta universitatis Palackianae Olomucensis. F.R.N. (im Druck).