Miloš Ráb

Les formules asymptotiques pour les solutions d'un système des équations différentielles

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 3, 199--212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104591`

LES FORMULES ASYMPTOTIQUES POUR LES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

M. RÁB, Brno

Prèsentè le 1, juin 1965

Dans cet article on déduit, par la méthode des approximations successives, des formules asymptotiques pour les composantes des solutions du système $x_i' = a_{ij}(\tau)x_i + f_i(\tau,x_1,\ldots, x_n)$.

Introduction. Envisageons le système

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\tau)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}),$$

où $\mathbf{x}$ signifie un vecteur $x_1,\ldots,x_n$, τ une variable réelle, $\mathbf{A}(\tau)$ une matrice carrée dont les composantes a_{ij} sont des fonctions continues pour $\tau \geqq \tau_0$ et $\mathbf{g}(\tau,\mathbf{x})$ une fonction vectorielle. Nous supposons que toutes les valeurs caractéristiques de la matrice $\mathbf{A}(\tau)$ sont simples. Dans ces hypothèses il existe une matrice $\mathbf{R}(\tau)$ de telle sorte que, le systéme en question se transforme par la substitution $\mathbf{x} = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{y}$ en

$$(*) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{J}(\tau)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\tau,\mathbf{y})$$

$\mathbf{J}(\tau)$ étant une matrice diagonale et $\mathbf{f}(\tau,\mathbf{y}) = -\mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{R}'(\tau)\mathbf{y} + \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau,\mathbf{R}(\tau)\mathbf{y})$. Si la perturbation $\mathbf{f}(\tau,\mathbf{y})$ est assez petite, on peut comparer les solutions du systéme (*) avec celles du système réduit

$$\mathbf{z}' = \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}.$$

Plusieurs auteurs se sont occupés du système (*) dans l'hypothèse que matrice $\mathbf{J}(\tau)$ tend vers une matrice constante. On trouve une bibliographie détaillée à ce sujet par ex. dans la monographie de M. L. Cesari [1] ou celle de M. R. Bellman [2].

Dans ce qui suit, on déduit par la méthode des approximations successives des formules asymptotiques pour les solutions du système (*) dans le cas général.

Théorème 1. *Soient $\alpha > 0$, c_i des constantes réelles,*[1] $a(\tau)$, $\gamma_i(\tau)$, $a_{ii}(\tau)$ $(i = 1,\ldots,n)$ *des fonctions continues pour* $\tau \in J = \langle \tau_0, \infty)$,

$$\gamma_i(\tau) \geqq 0,$$

[1]) Les minuscules grecques signifient des nombres réels.

$f_i(\tau,x_1,\ldots,x_n)$ des fonction continues dans la région R: $\tau\in J$, $|x_i| < \infty$.

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\textit{Soit} & \\ (1) & |f_i(\tau,0,\ldots,0)| \leqq \gamma_i(\tau)\exp\left\{\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{Re} a\right\},^{2)} \\ (2) & |f_i(\tau,x_1',\ldots,x_n') - f_i(\tau,x_1'',\ldots,x_n'')| \leqq \gamma_i(\tau)\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j' - x''_j|\end{cases}$$

pour tous les couples de points $(\tau,x_1',\ldots,x_n')$, $(\tau,x_1'',\ldots,x_n'')\in R$. Supposons ci-après l'existence d'un nombre ε, $0 < \varepsilon < 1$, de manière qu'il soit remplie pour $\tau\in J$ et $i = 1,\ldots,$n, au moins une des conditions suivantes:

$$(\mathrm{A})\begin{cases}(3) & \delta_i^A(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{n}, \\ (4) & |x_i(\tau_0) + c_i| \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{Re}(a_{ii} - a) \leqq \alpha < \infty,\end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\begin{cases}(5) & \delta_i^B(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{n}, \\ (6) & |x_i(\tau_0)| \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{Re}(a_{ii} - a) \leqq \alpha < \infty;\end{cases}$$

on pose

$$\delta_i^A(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty}\exp\left\{\int\limits_{\sigma}^{\tau}\operatorname{Re}(a_{ii} - a)\right\}\gamma_i(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\delta_i^B(\tau) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\left\{\int\limits_{\sigma}^{\tau}\operatorname{Re}(a_{ii} - a)\right\}\gamma_i(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Soit A l'ensemble de tous les i pour lesquels se trouvent remplies les inégalités (A), B l'ensemble de tous les i qui n'appartiennent pas à A. Soit $x_1(\tau),\ldots,x_n(\tau)$ une solution des équations différentielles

$$x_i' = a_{ii}(\tau)\,x_i + f_i(\tau,x_1,\ldots,x_n). \tag{7}$$

Alors il existe pour chaque $(i = 1,\ldots,n)$ une fonction h_i de sorte qu'on a

$$x_i(\tau) = \left([x_i(\tau_0) + c_i]\exp\left\{\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(a_{ii} - a)\right\} + h_i(\tau)\right)\exp\left\{\int\limits_{\tau_0}^{\tau} a\right\}, \tag{8}$$

---

[2]) Nous écrivons dans la règle, pour simplifier, $\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f$ au lieu de $\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(s)\,ds$.

$$h_i(\tau) = O[\delta_i^A(\tau)] \textit{ pour } i \in A, \tag{9}$$

$$x_i(\tau) = \Big(x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} (a_{ii} - a)\Big\} + h_i(\tau)\Big) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a\Big\}, \tag{10}$$

$$h_i(\tau) = O[\delta_i^B(\tau)] \textit{ pour } i \in B. \tag{11}$$

Démonstration. Posons

$$x_i(\tau) = [x_i(\tau_0) + c_i] \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} - \tag{12}$$
$$- \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma \textit{ pour } i \in A,$$

$$x_i(\tau) = x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} + \tag{13}$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma \textit{ pour } i \in B.$$

On vérifie facilement que toute solution de ce système des équations intégrales est en même temps une solution du système (7). Nous allons démontrer, par la méthode des approximations successives, que les composantes de chaque solution en question satisfont aux conditions (8), (9) ou bien (10), (11).

Posons, dans ce but,

$$x_i^{(0)}(\tau) = x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a\Big\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_i^{(m+1)}(\tau) = [x_i(\tau_0) + c_i] \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} - \tag{14}$$
$$- \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1^{(m)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m)}(\sigma)]\, d\sigma \text{ pour } i \in A,$$

$$x_i^{(m+1)}(\tau) = x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} + \tag{15}$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1^{(m)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m)}(\sigma)]\, d\sigma \text{ pour } i \in B.$$

En posant

$$\Delta x_i^{(0)}(\tau) = |x_i^{(0)}(\tau)|,$$
$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) = |x_i^{(m+1)}(\tau) - x_i^{(m)}(\tau)|,$$

on a évidemment

$$\Delta x_i^{(0)}(\tau) \leqq |x_i(\tau_0)| \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\} \tag{16}$$

et d'après (14) il vient pour $m = 0$:

$$\Delta x_i^{(1)}(\tau) = \Big| [x_i(\tau_0) + c_i] \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} - x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a\Big\} -$$

$$- \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1^{(0)}(\sigma), \ldots, x_n^{(0)}(\sigma)]\, d\sigma \Big| \leq$$

$$\leqq \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\} \Big[\, | x_i(\tau_0) + c_i | \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re}(a_{ii} - a)\Big\} + | x_i(\tau_0) | +$$

$$+ \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii} - \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\} | f_i[\sigma, x_1^{(0)}(\sigma), \ldots, x_n^{(0)}(\sigma)] |\, d\sigma\Big].$$

En posant $\varkappa = \sum_{i=1}^{n} | x_i(\tau_0) |$, nous avons d'après (1) et (2)

$$| f_i[\sigma, x_1^{(0)}(\sigma), \ldots, x_n^{(0)}(\sigma)] | = | f_i[\sigma, x_1^{(0)}(\sigma), \ldots, x_n^{(0)}(\sigma)] - f_i[\sigma, 0, \ldots, 0] | +$$

$$+ | f_i[\sigma, 0, \ldots, 0) | \leqq \gamma_i(\sigma) \sum_{j=1}^{n} | x_j^{(0)}(\sigma) | + \gamma_i(\sigma) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\sigma} \operatorname{Re} a\Big\} \leqq$$

$$\leqq (\varkappa + 1)\, \gamma_i(\sigma) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{0} \operatorname{Re} a\Big\}.$$

Les formules et les inégalités (3), (4) entraînent

$$\Delta x_i^{(1)}(\tau) \leqq \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\} [\alpha + \varkappa + (\varkappa + 1)\, \delta_i^A(\tau)] \leqq \tag{17}$$

$$\leqq \varepsilon\delta \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\}, \quad \delta = \frac{\alpha + \varkappa}{\varepsilon} + \frac{\varkappa + 1}{n}.$$

Pour $i \in B$ on trouve d'une manière analogue, d'après (15), (5) et (6),

$$\Delta x_i^{(1)}(\tau) = \Big| x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{ii}\Big\} - x_i(\tau_0) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a\Big\} + \tag{18}$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1^{(0)}(\sigma), \ldots, x_n^{(0)}(\sigma)]\, d\sigma \Big| \leq \varepsilon\delta \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\Big\}.$$

Pour $m \geqq 1$ et $\tau \in J$ on tire des équations (14), (15):

$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) \leq \Big| \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} a_{ii}\Big\} (f_i[\sigma, x_1^{(m)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m)}(\sigma)] -$$

$$- f_i[\sigma, x_1^{(m-1)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m-1)}(\sigma)]\, d\sigma \Big| \leqq$$

$$\leqq \int_{\tau}^{\infty} \exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\Big\} \gamma_i(\sigma) \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^{(m)}(\sigma) \quad \text{pour } i \in A$$

et

$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} \gamma_i(\sigma) \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^{(m)}(\sigma) \quad \text{pour } i \in B.$$

Nous allons démontrer par récurrence, pour $\tau \in J, m \geqq 1$ et $i = 1, \ldots, n$, les formules:

$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) \leqq \varepsilon^{m+1} \delta \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\}. \tag{19}$$

Soit d'abord $i \in A$. Dans ce cas on a

$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) \leqq \varepsilon^m n \delta \int_{\tau}^{\infty} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a + \int_{\tau_0}^{\sigma} \operatorname{Re} a\right\} \gamma_i(\sigma)\, d\sigma \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^m n \delta \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\} \delta_i^A(\tau).$$

De même pour $i \in B$,

$$\Delta x_i^{(m+1)}(\tau) \leqq \varepsilon^m n \delta \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\} \delta_i^B(\tau).$$

Les inégalités (3) et (5) entraînent, pour $i = 1, \ldots, n$ et $m \geqq 1$ la formule (19). En vertu de (16), (17) et (18) cette formule est valable aussi pour $m = 0, -1$. On voit en tenant compte de

$$|x_i(\tau)| \leqq \delta \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\} \sum_{0}^{\infty} \varepsilon^m = \frac{\delta}{1-\varepsilon} \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\} \tag{20}$$

que la série

$$x_i(\tau) = x_i^{(0)}(\tau) + \sum_{m=0}^{\infty} [x_i^{(m+1)}(\tau) - x_i^{(m)}(\tau)]$$

est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle $\tau_0 \leqq \tau \leqq T < \infty$. L'inégalité (19) entraîne que les fonctions $\Delta x_i^{(m+1)}(\tau)$ sont finies dans J. On en déduit par récurrence l'existence de la deuxième intégrale figurant dans (14) pour chaque m.

On a

$$|x_i(\tau) - x_i^{(m)}(\tau)| = \left|\sum_{j=m}^{\infty} |[x_i^{(j+1)}(\tau) - x_i^{(j)}(\tau)]|\right| \leqq \delta \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\} \sum_{j=m}^{\infty} \varepsilon^{j+1} =$$

$$= \frac{\delta \varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon} \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} a\right\}$$

et

$$|x_i(\tau) - x_i^{(m+1)}(\tau)| = \Big| \int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^\tau a_{ii}\Big\} (f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)] -$$

$$- f_i[\sigma, x_1^{(m)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m)}(\sigma)])\, d\sigma \leqq \frac{\varepsilon^{m+1}\delta n}{1-\varepsilon} \exp\Big\{\int_{\tau_0}^\tau \operatorname{Re} a\Big\} \delta_i^A(\boldsymbol{\tau}) \to 0$$

pour $m \to \infty$ et $i \in A$. Il en résulte

$$\lim_{m\to\infty} \int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^\tau a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1^{(m)}(\sigma), \ldots, x_n^{(m)}(\sigma)]\, d\sigma =$$

$$= \int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^\tau a_{ii}\Big\} f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma.$$

En se servant de l'inégalité (20) on obtient finalement

$$\Big|\int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^\tau a_{ii} - \int_{\tau_0}^\tau a\Big\} f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma\Big| \leq \Big(1 + \frac{n\delta}{1-\varepsilon}\Big) \delta_i^A(\tau)$$

et puisque, on a, pour $i \in A$,

$$x_i(\tau) = \exp\Big\{\int_{\tau_0}^\tau a\Big\} \Big([x_i(\tau_0) + c_i] \exp\Big\{\int_{\tau_0}^\tau (a_{ii} - a)\Big\} -$$

$$- \int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^\tau a_{ii} - \int_{\tau_0}^\tau a\Big\} f_i[\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma\Big),$$

on trouve les formules (8) et (9).

Pour achever la démonstration il faut démontrer que les fonctions $x_i(\tau)$ sont différentiables dans J. A cause de la continuité des fonctions $x_i^{(m+1)}(\tau)$ et de la convergence uniforme $x_i^{(m)}(\tau) \to x_i(\tau)$ les fonctions $x_i(\tau)$ sont continues et par conséquent différentiables; cette dernière propriété résulte de la formule

$$x_i(\tau) = \exp\Big\{\int_{\tau_0}^\tau a_{ii}\Big\} \Big[x_i(\tau_0) + c_i -$$

$$- \int_\tau^\infty \exp\Big\{\int_\sigma^{\tau_0} a_{ii}\Big\} f_i([\sigma, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)]\, d\sigma\Big].$$

On démontre les formules (10) et (11) par des considérations analogues aux précédentes.

Théorème 2. *Nous supposons valables les hypothèses (I) du théorème* 1. *Soit a (τ) une fonction continue satisfaisant au moins pour un index i, aux conditions*

$$\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)<0,\qquad \int_{\tau_0}^{\infty}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)=-\infty \tag{21}$$

et remplissant pour les autres indices les formules

$$\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)<0,\qquad \int_{\tau_0}^{\infty}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)=\infty. \tag{22}$$

Soit finalement

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\gamma_i(\tau)}{\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\tau)-a(\tau)]}=0\quad pour\ i=1,\ldots,n. \tag{23}$$

Dans ces hypothèses le système (7) *possède une solution x_k dont les composantes x_{ki} satisfont aux relations*

$$\lim_{\tau\to\infty}x_{ki}(\tau)\exp\Big\{-\int_{\tau_0}^{\tau}\mathrm{Re}\,a\Big\}=0. \tag{24}$$

Démonstration. Soit A l'ensemble de tous les i pour lesquels subsistent les relations (22), B l'ensemble de tous les i qui n'appartient à A. Pour chaque $i\in A$ on a

$$\delta_i^A(\tau)\leqq\max_{\sigma\geqq\tau}(\gamma_i(\sigma)/\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-a(\sigma)])\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-$$
$$-a\,(\sigma)]\exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)\Big\}\,d\sigma=\max_{\sigma\geqq\tau}(\gamma_i(\sigma)/\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-$$
$$-a(\sigma)])\Big[-\exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)\Big\}\Big]_{\tau}^{\infty}=$$
$$=\max_{\sigma\geqq\tau}(\gamma_i(\sigma)/\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-a(\sigma)])\to 0\quad\text{pour }\tau\to\infty$$

et, par conséquent, $\lim_{\tau\to\infty}\delta_i^A(\tau)=0$.

Pour $i\in B$ et pour tout nombre $\sigma>T>\tau_0$ on a

$$\delta_i^B(\tau)=\exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)\Big\}\int_{\tau_0}^{T}\exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau_0}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)\Big\}\gamma_i(\sigma)\,d\sigma+ \tag{25}$$
$$+\int_{T}^{\tau}\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-a(\sigma)]\exp\Big\{\int_{\sigma}^{\tau}\mathrm{Re}\,(a_{ii}-a)\Big\}\gamma_i(\sigma)/\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma)-a(\sigma)]\,d\sigma.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (23) il existe un nombre T tel qu'on a

$$\max_{\sigma \geqq T} \gamma_i(\sigma)/\mathrm{Re}\,[a_{ii}(\sigma) - a(\sigma)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

la dernière intégrale du second membre de l'équation (25) étant inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. La première intégrale de cette relation tend vers zéro pour $\tau \to \infty$; il en résulte que l'intégrale en question est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour τ suffisamment grand. On a alors $\delta_i^B(\tau) < \varepsilon$ pour $\tau > \tau_1$. En posant

$$x_i(\tau_0) + c_i = 0$$

pour $i \in A$ et $x_i(\tau_0) \neq 0$ pour $i \in B$, la formule (24) résulte du théorème 1.

Lemme 1. *Si les fonctions φ, ψ sont continues pour $\tau \geqq \tau_0, \psi \geqq 0$ et*

$$\inf_{\tau_0 < \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi = -\infty, \quad \sup_{\tau_0 < \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi < \infty \tag{26}$$

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \psi < \infty, \tag{27}$$

alors

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \varphi\right\} \psi(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Démonstration. Nous allons démontrer tout d'abord $\lim\limits_{\tau \to \infty} \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi = -\infty$. Supposons que l'on ait $\overline{\lim\limits_{\tau \to \infty}} \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi > -\infty$. Alors, il existe une constante $\varkappa_1$ et une suite $\tau_n' \to \infty$ satisfaisant à la formule $\int_{\tau_0}^{\tau_n'} \varphi > \varkappa_1$. Posons

$$\sup_{\tau_0 < \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi = \varkappa_2$$

et choisissons $\varkappa_3 < \varkappa_1 - 2\varkappa_2$. En vertu de (26) il existe deux nombres $\tau_1, \tau_2, \tau_1 < \tau_2$ de sorte que $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi < \varkappa_3$. Il en résulte $\int_{\tau_0}^{\tau_n'} \varphi < \varkappa_3 + 2\varkappa_2 < \varkappa_1$ pour chaque $\tau_n' > \tau_2$, ce qui est absurde.

Choisissons maintenant $T = T(\tau)$ de manière à avoir $\int\limits_T^\tau \varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0}^\tau \varphi$.

On a évidemment $T(\tau) \to \infty$ et $\int\limits_T^\tau \varphi \to -\infty$ pour $\tau \to \infty$. Subsiste évidemment, la formule

$$\int\limits_{\tau_0}^\tau \exp\Big\{\int\limits_\sigma^\tau \varphi\Big\}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{\tau_0}^T + \int\limits_T^\tau \tag{28}$$

et on peut facilement démontrer que le second membre tend vers zéro pour $\tau \to \infty$. On a, en effet,

$$\int\limits_{\tau_0}^T \exp\Big\{\int\limits_\sigma^\tau \varphi\Big\}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = \exp\Big\{\int\limits_T^\tau \varphi\Big\}\int\limits_{\tau_0}^T \exp\Big\{\int\limits_\sigma^T \varphi\Big\}\,\psi(\sigma)\,d\sigma \leqq$$
$$\leqq e^{\varkappa_2}\exp\Big\{\int\limits_T^\tau \varphi\Big\}\int\limits_{\tau_0}^T \psi(\sigma)\,d\sigma \to 0 \quad \textit{pour}\ \tau \to \infty$$

et les relations (26) et (27) donnent

$$\int\limits_T^\tau \exp\Big\{\int\limits_\sigma^\tau \varphi\Big\}\psi(\sigma)\,d\sigma \leqq e^{\varkappa_2}\int\limits_T^\tau \psi(\sigma)\,d\sigma \to 0.$$

Le second membre de (28) tendant vers zéro pour $\tau \to \infty$, le lemme se trouve démontré.

Théorème 3. *Soient dans le système*

$$x_i' = a_{i1}(\tau)x_1 + a_{i2}(\tau)x_2 + \ldots + a_{in}(\tau)x_n,\ i = 1,\ldots,n, \tag{29}$$

les fonctions $a_{ij}(\tau)$ continues pour $\tau \geqq \tau_0$ et telles que

$$\int\limits_{\tau_0}^\infty |a_{ij}(\tau)|\,d\tau < \infty \text{ pour } i \neq j. \tag{30}$$

Si tous les couples d'indices i, k vérifient au moins une des inégalités

$$\inf_{\tau_0 \leqq \tau_1 < \tau_2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{kk}) > -\infty \tag{31}$$

$$\sup_{\tau_0 \leqq \tau_1 < \tau_2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{kk}) < \infty \tag{32}$$

alors il existe n solutions indépendentes, $\mathbf{x}_k$, du systéme (29) *qui jouissent de la propriété*

$$\mathbf{x}_k(\tau) = \exp\Big\{\int\limits_{\tau_0}^\tau a_{kk}(\sigma)\,d\sigma\Big\}\,(\mathbf{C}_k + \mathbf{o}\,(1)), \tag{33}$$

$\mathbf{C}_k$ étant un vecteur constant différent de $\mathbf{0}$.

Démonstration. Les hypothèses du théorème 1 se trouvent remplies pour $\gamma_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}(\tau)|$. Posons $a = a_{kk}$. Soit A l'ensemble des i pour lesquels subsistent les inégalités (31) et B l'ensemble des i qui n'appartiennent pas à A. Choisissons finalement $c_i = 0$ pour tous les i et $x_i(\tau_0) = 0$ pour $i \neq k$, $x_k(\tau_0) = 1$. On voit immédiatement que les hypothèses (4) et (6) sont satisfaites et qu'on a, en vertu de (31), $\delta_i^A(\tau) \leqq \varkappa \int_\tau^\infty \gamma_i \to 0$.

Pour $i \in B$ subsiste l'inégalité (32) et comme $\inf\limits_{\tau_0 \leqq \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{kk}) = -\infty$, on a $\lim\limits_{\tau\to\infty} \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{kk}) = -\infty$. Du lemme 1 on tire

$$\delta_i^B(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\int_\sigma^\tau \mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{kk})\Big\}\, \gamma_i(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \to 0 \text{ pour } \tau \to \infty.$$

D'après le théorème 1 il existe pour chaque k une solution dont les composantes x_{ki} satisfont aux relations

$$x_{ki} = (\delta_{ki} + o(1)) \exp\Big\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{kk}(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\Big\}, \quad \delta_{ki} = 0 \quad \textit{pour} \quad i \neq k, \quad \delta_{kk} = 1.$$

On voit immédiatement que les solutions en question sont indépendantes.

Lemme 2. *Soient α, λ, μ des nombres quelconques, $\alpha > 0$, $\mu > 0$, et φ, ψ des fonctions continues pour $\tau \geqq \tau_0$, $\psi \geqq 0$. Posons $\varepsilon(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\{\int_\sigma^\tau \varphi\}\, \psi(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$. Soit*

$$\sup_{\sigma \geqq \tau_0} \int_\sigma^{\sigma+\alpha} \psi = \varkappa < \infty \tag{34}$$

$$\int_\sigma^\tau \varphi < \lambda - \mu(\tau - \sigma),\ \tau > \sigma \geqq \tau_0. \tag{35}$$

Alors on a

$$\varepsilon(\tau) < \frac{\varkappa e^\lambda}{1 - e^{-\mu\alpha}}. \tag{36}$$

Si l'on suppose au lieu de (34) *la validité de la formule*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_\sigma^{\sigma+\alpha} \psi = 0 \tag{37}$$

on a

$$\lim_{\tau\to\infty} \varepsilon(\tau) = 0. \tag{38}$$

Démonstration. Pour chaque $\tau > \tau_0 + \alpha$ il existe un nombre naturel, n, de sorte que $n\alpha \leqq \tau - \tau_0 < (n+1)\alpha$. Pour $N < n$ on peut écrire

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{1}^{N} \int_{\tau-j\alpha}^{\tau-(j-1)\alpha} \div + \sum_{N+1}^{n} \int_{\tau-j\alpha}^{\tau-(j-1)\alpha} \div + \int_{\tau_0}^{\tau-n\alpha} \div .$$

En posant

$$\varkappa_1 = \sup_{\tau_0<\sigma<\tau-N\alpha} \int_{\sigma}^{\sigma+\alpha} \psi, \quad \varkappa_2 = \sup_{\tau-N\alpha<\sigma<\tau-N\alpha} \int_{\sigma}^{\sigma+\alpha} \psi,$$

on a en vertu de (35)

$$\varepsilon(\tau) < \varkappa_2 \sum_{1}^{N} e^{\lambda-\mu\alpha(j-1)} + \varkappa_1 \Big(\sum_{N+1}^{n} e^{\lambda-\mu\alpha(j-1)} + e^{\lambda-\mu n\alpha} \Big) \tag{39}$$

et alors

$$\varepsilon(\tau) < \varkappa_2 \, e^{\lambda} \frac{1}{1-e^{-\mu\alpha}} + \varkappa_1 e^{\lambda-\mu N\alpha} \frac{1}{1-e^{-\mu\alpha}} .$$

Soit η un nombre positif. En supposant vraie la formule (37) on peut choisir N, $N > \dfrac{1}{\mu\alpha} \log \dfrac{2\varkappa_1 e^{\lambda}}{\eta(1-e^{-\mu\alpha})}$ de sorte que $\varkappa_2 < \dfrac{\eta}{2} \dfrac{1-e^{-\mu\alpha}}{e^{\lambda}}$.

On a donc $\varepsilon(\tau) < \dfrac{1}{2}\eta + \dfrac{1}{2}\eta = \eta$ et il en résulte (38).

En supposant vraie la formule (34), posons $N = 0$. L'inégalité (39) donne (36). Le lemme se trouve ainsi démontré.

Théorème 4. *Nous supposons que les hypothèses* (I) *du théorème* 1 *soient remplies et que l'on ait*

$$\int_{\sigma}^{\tau} \mathrm{Re}\, a_{ii} < \lambda - \mu(\tau - \sigma) \quad (\mu < 0, \tau > \sigma \geqq \tau_0, i = 1, \ldots, n).$$

S'il existe un nombre positif ε de sorte

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha} \gamma_i < \frac{\varepsilon(1-e^{-\mu\alpha})}{n\, e^{\lambda}}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{40}$$

alors toutes les solutions du système (7) *sont bornées. S'il subsiste au lieu* *de* (40) *la relation*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha}\gamma_i = 0,$$

alors toute solution tend vers zéro pour $\tau \to \infty$.

Démonstration. La proposition découle du lemme 2 ($\psi = \gamma_i$, $\varphi = \operatorname{Re} a_{ii}$) et du théorème 1.

Théorème 5. *Nous supposons les fonctions* $a_{ij}(\tau)$ *continues pour* $\tau \geqq \tau_0$ *et remplissant pour tous les* i, j, $1 \leqq i, j \leqq n$ *au moins une des conditions (C), (D)*

$$(\mathrm{C})\begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma}^{\tau}\operatorname{Re} a_{ii} < \varkappa_1\ (\tau_0 \leqq \sigma < \tau), \\ (41) \qquad \displaystyle\int_{\tau_0}^{\infty}|a_{ij}| < \varkappa_2\ (j \neq i), \end{cases}$$

$$(\mathrm{D})\begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma}^{\tau}\operatorname{Re} a_{ii} < \lambda - \mu(\tau - \sigma) \quad (\mu > 0, \tau_0 \leqq \sigma < \tau) \\ (42) \qquad \displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha}|a_{ij}| < \varkappa_2 \quad (\alpha > 0, i < j), \\ (43) \qquad \displaystyle\lim_{\sigma\to\infty}\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha}|a_{ij}| = 0 \quad (i > j). \end{cases}$$

Alors toutes les solutions du système (29) *sont bornées.*

Remarque. Au lieu de (42) et (43) on peut supposer $\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha}|a_{ij}| < \varkappa_2$ pour $i > j$, $\lim_{\sigma\to\infty}\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha}|a_{ij}| = 0$ pour $i < j$.

Démonstration. Pour $n = 1$ la proposition est évidente. Supposons alors $n \geqq 2$. Soit η une constante positive. En posant $y_i = \eta^{n-i}x_i$, nous avons

$$y_i' = \eta^{n-i}x_i' = \eta^{n-i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = \eta^{n-i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta^{j-n}y_j$$

et, par conséquent,

$$(44) \qquad y_i' = \sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j,\ b_{ij} = \eta^{j-i}a_{ij}.$$

Les solutions du système (29) sont bornées si et seulement si les solutions du système (44) sont bornées. Posons $\gamma_i = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$. Choisissons η

$$\eta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon(1 - e^{-\mu\alpha})}{2(n-1)\, n\varkappa_2\, e^{\lambda}}\right\},$$

ε ayant le même sens que dans le théorème 1. Nous pouvons choisir τ_0 de sorte qu'on ait pour toute fonction a_{ij} satisfaisant à (41)

$$\int_{\tau_0}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon\eta^{n-1}}{n(n-1)\, e^{\varkappa_1}}$$

et pour chaque a_{ij} vérifiant (43):

$$\sup_{\sigma \geqq \tau_0} \int_{\sigma}^{\sigma+\alpha} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon\eta^{n-1}}{2(n-1)n}.$$

On a donc pour tout index i qui vérifie les hypothèses *(C)*

$$\delta_i(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} \gamma_i(\sigma)\, d\sigma = \sum_{j \neq i} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} |b_{ij}(\sigma)|\, d\sigma \leqq$$

$$\leqq \eta^{1-n}(n-1)\, e^{\varkappa_1} \frac{\varepsilon\eta^{n-1}}{n(n-1)\, e^{\varkappa_1}} = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Pour tout index i qui satisfait aux hypothèses *(D)*, on a $\delta_i(\tau) = \sum_{j<i} + \sum_{j>i}$. La première somme du second membre vérifie les inégalités

$$\sum_{j<i} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} |b_{ij}(\sigma)|\, d\sigma < \eta^{1-n} \sum_{j<i} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} |a_{ij}(\sigma)|\, d\sigma <$$

$$< \eta^{1-n}(n-1) \frac{\varepsilon\eta^{n-1}}{2(n-1)\, n} = \frac{\varepsilon}{2n}$$

et, en ce qui concerne la seconde, nous avons, d'après le lemme 2, $(\psi = |a_{ij}|,\ \varphi = \operatorname{Re} a_{ii},\ \varkappa = \varkappa_2)$

$$\sum_{j>i} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} |b_{ij}(\sigma)|\, d\sigma < \eta \sum_{j>i} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\sigma}^{\tau} \operatorname{Re} a_{ii}\right\} |a_{ij}(\sigma)|\, d\sigma <$$

$$< \eta(n-1) \frac{\varkappa_2 e^{\lambda}}{1 - e^{-\mu\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

On a donc $\delta_i(\tau) < \frac{\varepsilon}{n}$. Les hypothèses du théorème 1 se trouvent remplies pour $a = 0$, l'ensemble A est vide et on a, par conséquent, (10), (11). Le théorème se trouve démontré.

Remarque. Ce théorème généralise le résultat de M. A. П. Моисеенко [3].

Bibliographie

[1] Cesari Lamberto, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.
[2] Bellman Richard, *Stability theory of differential equations*, New York-Toronto-London 1953.
[3] Моисеенко А. П., *Об одном достаточном условии ограниченности на полуоси всех решений системы линейных дифференциальных уравнений*, Успехи Матем. Наук XVII 1 (103) (1962), 205—207.