Michal Greguš

Die Anwendung der Quasilinearisation auf gewisse Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 3. Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 3, 189--198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104590

DIE ANWENDUNG DER QUASILINEARISATION AUF GEWISSE PROBLEME AUS DER THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 3. ORDNUNG

M. Greguš, Bratislava

Eingegangen am 17. 5. 1965

In der vorliegenden Arbeit wird die Quasilinearisation [1] auf ein gewisses Anfangs — und Randproblem dritter Ordnung angewendet. Dabei kommen Ergebnisse der Theorie der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung [2] zur Geltung.

1. x sei ein Punkt des Euklidischen Raumes R_n. Wir betrachten eine nichtlineare Differentialgleichung von der Form

(1) $$E(u) = f(x, u), \quad x \in A;$$

E ist ein linearer (bei $n = 1$ ein gevönlicher, bei $n > 1$ ein partieller) Differentialoperator, $f(x, u)$ eine im Bezug auf u nichtlineare Funktion und A ein beschränktes Gebiet von R_n.

Die Frage ist, ob eine die Randbedingungen

(2) $$L(u) = 0, \quad x \in \partial A,$$

erfüllende Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung (1) existiert, wobei L ein Linearoperator und ∂A die Grenze des Gebietes A ist:

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

Mit dieser Fragestellung im Zusammenhang mit der Quasilinearisation des Problems (1), (2) befaßten sich R. Bellman und R. Kalaba. Die auf diesem Gebiete erzielten Ergebnisse waren das Thema der von A. Ghizetti [1] in der Sommerschule „Centro Internazionale Matematico Estivo" in Perugia im Jahre 1964 gehaltenen Vorträge.

In [1] wurde bewiesen:

Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

I. Das Problem

(3) $$E(v) = g(x), \quad x \in A; \quad L(v) = 0, \quad x \in \partial A,$$

wobei $g(x)$ eine stetige Funktion für $x \in \bar{A}$ ist, hat eine einzige für $x \in \bar{A}$ stetige Lösung $v(x)$, welche in der Form

(4) $$v(x) = \int_{\bar{A}} G(x, s)\, g(s)\, ds$$

ausgedrückt werden kann; $G(x, s)$ stellt eine Greensche Funktion des Problems (3) dar.

Dabei ist

$$C = \| \int_{\bar{A}} | G(x, s) | \, ds \|, \quad C = \text{konst.}$$

$\| \psi(x) \|$ ist die folgendermaßen

$$\| \psi(x) \| = \max_{x \in \bar{A}} |\psi(x)|$$

definierte Norm der Funktion $\psi(x)$; $x \in \bar{A}$.

II. $f(x, u)$ und ihre Ableitungen $f_u(x, u)$, $f_{uu}(x, u) > 0$ seien stetige Funktionen für $x \in D$ und $| u | \leqq \beta$, $\beta > 0$ und es sei

$$\max_{x \in D, |u| \leqq \beta} \begin{cases} | f(x, u) | = M, \\ | f_u(x, u) | = M_1; \\ f_{uu}(x, u) = M_2. \end{cases}$$

D ist ein das Gebiet A enthaltendes Gebiet von R_n: $A \subset D$.

III. Es gelte

$$C(M + 2\beta M_1) \leqq \beta.$$

IV. $z(x)$ sei eine für $x \in A$ definierte stetige Funktion, so beschaffen, daß $| z(x) | \leqq \beta$ ist.

Wenn die Funktion $\varphi(x)$ die Bedingungen

$$E(\varphi) \geqq f_u[x, z(x)] \, \varphi(x), \quad x \in A; \quad L(\varphi) = 0, \quad x \in \partial A$$

erfüllt, dann sei $\varphi(x) \geqq 0$ $(\varphi(x) \leqq 0)$ $x \in \bar{A}$; ferner sei $\varphi(x) \equiv 0$ dann und nur dann, wenn $E(\varphi) = f_u[x, z(x)] \, \varphi(x)$, $x \in A$ ist. Dann gilt:

Satz A. Es existiert eine einzige Lösung $u(x)$ des Problems (1), (2), welche durch die Formel

$$u(x) = \max_{z(x)} \omega[x, z(x)]$$

($u(x) = \min \omega[z(x)]$ *im Falle* $\varphi(x) \leqq 0$) *gegeben ist, wobei* $\omega[x, z(x)]$ *die Lösung des linearen Problems*

(5) $$E(\omega) = f(x, z) + (\omega - z) f_u(x, z), \quad x \in A;$$

$$L(\omega) = 0, \quad x \in \partial A$$

mit der parametrischen Funktion $z(x)$ darstellt.

Satz B. $z(x)$ sei eine feste parametrische Funktion und die Folge $\{\omega_n(x)\}$ sei durch die Formeln

(6) $$E(\omega_1) = f(x, z) + (\omega_1 - z) f_u(x, z), \quad x \in A; \quad L(\omega_1) = 0, \quad x \in \partial A$$

(7) $$E(\omega_{n+1}) = f(x, \omega_n) + (\omega_{n+1} - \omega_n) f_u(x, \omega_n), \quad x \in A;$$
$$L(\omega_{n+1}) = 0, \quad x \in \partial A$$

definiert.

Dann ist a) die Folge $\{\omega_n(x)\}$ in jedem Punkte $x \in \bar{A}$ monoton, nichtabnehmend (nichtwachsend, wenn in der Voraussetzung IV. $\varphi(x) \leqq 0$ gilt.)

b) die Folge $\{\omega_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig zu der Lösung $u(x)$ des Problems (1), (2).

2. Satz 1. $f(x, u), f_u(x, u) \geqq 0$, $f_{uu}(x, u) > 0$ seien stetige Funktionen von $x \in \langle 0, \alpha \rangle$ und es sei $| u | \leqq \beta$. Dann existiert eine einzige Lösung des Problems

(8) $$u''' = f(x, u), \quad u(o) = u'(o) = u''(o) = 0, \quad 0 \leqq x \leqq a,$$
$$0 < a \leqq \alpha,$$

für welche die Behauptung des Satzes A und B besteht.

Beweis. Der Satz 1 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß die Voraussetzungen I., II., III. und IV. aus Nr 1 erfüllt sind.

I. $g(x)$ sei eine stetige Funktion für $0 \leqq x \leqq a$. Durch Variation der Konstanten stellen wir leicht fest, daß die Lösung des Problems $v''' = g(x)$,

$$v(o) = v'(o) = v''(o) = 0$$

für $x > 0$ durch die Formel

$$v(x) = \int_0^x \frac{W(x, t)}{W(t)} g(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2, & t, & 1 \\ 2t, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad W(x, t) = \begin{vmatrix} x^2, & x, & 1 \\ t^2, & t, & 1 \\ 2t, & 1, & 0 \end{vmatrix} = -(x - t)^2.$$

bedeutet und $x^2, x, 1$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $v''' = 0$ ist. Wir haben also

$$v(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 g(t)\, dt.$$

Es ist

$$C = \left\| \frac{1}{2} \int_0^a (x - t)^2 \, dt \right\| = \max_{0 \leq x \leq a} \frac{1}{2} \int_0^a (x - t)^2 \, dt =$$

$$= \max_{0 \leq x \leq a} \frac{1}{2} \left[- \frac{(x-t)^3}{3} \right]_0^a = \max_{0 \leq x \leq a} \frac{1}{2} \left(- \frac{(x-a)^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{a^3}{6}.$$

II. Diese Voraussetzung ist offenbar erfüllt.

III. Wenn wir die Bezeichnung von Nr 1 beibehalten, so bekommen wir für a, d.h. für die Länge des Intervalls, in welchem die Behauptung des Satzes 1 gilt, die folgende Abschätzung

$$\frac{a^3}{6} (M + 2\beta M_1) \leqq \beta,$$

d.h.

(9) $$a \leqq \sqrt[3]{\frac{6\beta}{M + 2\beta M_1}}.$$

IV. $z(x)$ sei eine stetige Funktion von $x \in \langle 0, a \rangle$ und es sei $| z(x) | \leqq \beta$. Wir wollen zeigen, daß die Lösung $\varphi(x) \leqq 0$ für $0 \leqq x \leqq a$ des Problems

$$\varphi'''(x) \geqq f_u[x, z(x)] \, \varphi(x), \quad 0 \leqq x \leqq a; \quad \varphi(o) = \varphi'(o) = \varphi''(o) = 0$$

existiert.

Dieses Problem kann in der Form

(10) $$\varphi'''(x) - f_u[x, z(x)] \, \varphi(x) = h(x) \geqq 0, \quad \varphi(o) = \varphi'(o) = \varphi''(o) = 0$$

geschrieben werden, wo $h(x)$ eine stetige Funktion von $x \in \langle 0, a \rangle$ ist.

Die Lösung des Problems (10) ist durch die Formel

(11) $$\varphi(x) = \int_0^x W(x, t) \, h(t) \, dt$$

mit

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x) \\ \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \varphi_3(t) \\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t), & \varphi_3'(t) \end{vmatrix}$$

gegeben; φ_1, φ_2, φ_3 ist ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $\varphi''' - f_u(x, z) \, \varphi = 0$, mit der Wronskischen Determinante $W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 1$.

Die Formel (11) erhält man leicht durch Variation der Konstanten. Aus (11) ist Folgendes ersichtlich: Im Falle $h(t) \equiv 0$, für $0 \leqq x \leqq a$, ist $\varphi(x) \equiv 0$; umgekehrt, aus $\varphi(x) \leqq 0$ folgt $h(x) \leqq 0$, da $W(x, t)$ bei festem t eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist, und diese Lösung im Punkte t eine doppelte Nullstelle hat. Es ist bekannt [2], daß $W(x, t) > 0$ für $t < x$; daraus folgt $\varphi(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1. *Die rechte Seite von (9) stellt eine wachsende Funktion von β dar.*

Deshalb ist

$$\max_{\beta} a \leqq \lim_{\beta \to \infty} \sqrt[3]{\frac{6\beta}{M + 2\beta M_1}} = \sqrt[3]{\frac{3}{M_1}}\,.$$

Folgerung 2. *Es sei $f(x, o) > 0$. Dann hat die Lösung des Problems* (8) *im Intervall $\langle 0, a \rangle$ keine weitere Nullstelle.* Der Beweis wird durch Variation der Konstanten durchgeführt, wenn wir in die Beziehung (6) $z(x) \equiv 0$ einsetzen.

Satz 2. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Dann existiert eine einzige nichttriviale Lösung des Problems

$$u''' = f(x, u), \quad u(o) = u'(o) = u(a) = 0, \quad 0 < a \leqq \alpha, \tag{12}$$

für welche die Behauptungen der Sätze A und B gelten.

Beweis. Der Satz 2 ist richtig, wenn die Voraussetzungen I., II., III., IV. von Nr 1 erfüllt sind.

I. $g(x)$ sei eine stetige Funktion für $0 \leqq x \leqq a$. Das Problem

$$v''' = g(x), \quad v(o) = v'(o) = v(a) = 0 \tag{13}$$

hat die einzige Lösung

$$v(x) = \int_0^a G(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

wo $G(x, \xi)$ eine Greensche Funktion des homogenen Problems (13) ist.

In der Tat, für das Fundamentalsystem von Lösungen x^2, x, 1 der Gleichung $v''' = 0$, dessen Wronskische Determinante $W = -2$ ist, haben wir

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1x^2 + a_2x + a_3, & 0 \leqq x \leqq \xi \\ b_1x^2 + b_2x + b_3, & 0 \leqq \xi \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

Im Punkte ξ gilt

$$\begin{aligned} C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3 &= 0 \\ 2C_1\xi + C_2 &= 0 \\ 2C_1 &= 1, \quad C_i = b_i - a_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

woraus $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\xi$, $C_3 = \frac{1}{2}\,\xi^2$.

Aus der Bedingung, dass $G(x, \xi)$ die Randbedingungen erfüllen soll, erhalten wir

$$a_3 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$b_1 a^2 + b_2 a + b_3 = 0,$$

also $a_1 = \frac{\xi}{a} - \frac{\xi^2}{2a} - \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{\xi^2}{2a^2} + \frac{\xi}{a}$, $b_2 = -\xi$, $b_3 = \frac{1}{2}\xi^2$.

Wir haben also

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^2 x^2, & 0 \leqq x \leqq \xi \leqq a \\ \frac{\xi}{a}\left(1 - \frac{\xi}{2a}\right)x^2 - \xi x + \frac{1}{2}\xi^2, & 0 \leqq \xi \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

Wir wollen nun $C = \| \int\limits_0^a | G(x, \xi) | \, d\xi \|$ berechnen. Es ist leicht einzusehen, daß bei festem x für $0 \leqq \xi \leqq a : G(x, \xi) \leqq 0$ ist. Folglich gilt

$$\int\limits_0^a | G(x, \xi) \, d\xi = - \int\limits_0^a G(x, \xi) \, d\xi = \frac{x^2}{6}(a - x).$$

$$\max_{0 \leqq x \leqq a} \frac{x^2}{6}(a - x) = \frac{2}{81} a^3$$

und es kommt

$$C = \frac{2}{81} a^3$$

heraus.

Die Voraussetzung II. ist offenbar erfüllt.

III. Belassen wird dieselbe Bezeichnung wie in Nr 1, so erhalten wir für a, d.h. für die Länge des Intervalls, in dem die Behauptung des Satzes 2 gilt, die folgende Abschätzung:

$$\frac{2}{81} a^3 (M + 2\beta M_1) \leqq \beta,$$

also

$$a \leqq 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\beta}{M + 2\beta M_1}}. \tag{14}$$

IV. $z(x)$ sei eine stetige Funktion für $0 \leqq x \leqq a$ und es sei $| z(x) | \leqq \beta$. Wir wollen die Existenz einer Lösung $\varphi(x) \leqq 0$, $0 \leqq x \leqq a$, des

Problems

$$\varphi''' \geqq f_u(x, z)\, \varphi, \quad \varphi(o) = \varphi'(o) = \varphi(a) = 0$$

beweisen.

Das erwähnte Problem kann in der Form

$$\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = h(x) \geqq 0, \quad \varphi(o) = \varphi'(o) = \varphi(a) = 0 \tag{15}$$

geschrieben werden, wo $h(x)$, $0 \leqq x \leqq a$ eine stetige Funktion ist.

Konstruieren wir eine Greensche Funktion des zu (15) gehörigen homogenen Problems.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = 0$ mit den Eigenschaften $\varphi_1(o) = \varphi_1'(o) = 0$, $\varphi_1''(o) = 1$, $\varphi_2(o) = \varphi_2''(o) = 0$, $\varphi_2'(o) = 1$, $\varphi_3'(o) = \varphi_3''(o) = 0$, $\varphi_3(o) = 1$.

Es ist $W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -1$.

Wir setzen:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \xi \leqq a \\ b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + b_3\varphi_3(x) & \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

Im Punkte ξ sollen folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} C_1\varphi_1(\xi) + C_2\varphi_2(\xi) + C_3\varphi_3(\xi) &= 0 \\ C_1\varphi_1'(\xi) + C_2\varphi_2'(\xi) + C_3\varphi_3'(\xi) &= 0 \\ C_1\varphi_1''(\xi) + C_2\varphi_2''(\xi) + C_3\varphi_3''(\xi) &= 1, \quad C_i = b_i - a_i, \\ & \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$C_1 = -\begin{vmatrix} \varphi_2(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_2'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix} \quad C_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix} \quad C_3 = -\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_2(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix}.$$

Da $G(x, \xi)$ die Randbedingungen erfüllen soll, so haben wir

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix}, \quad b_3 = -\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_2(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix},$$

$$b_1 = \frac{1}{\varphi_1(a)} \left[\varphi_3(a) \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_2(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix} - \varphi_2(a) \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix} \right],$$

$$a_1 = \frac{1}{\varphi_1(a)} \left[\varphi_3(a) \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_2(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix} - \varphi_2(a) \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_1'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \varphi_1(a) \begin{vmatrix} \varphi_2(\xi), & \varphi_3(\xi) \\ \varphi_2'(\xi), & \varphi_3'(\xi) \end{vmatrix} \right] = \frac{1}{\varphi_1(a)} W(a, \xi)$$

und somit kommt die Formel

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_1(a)} W(a, \xi)\, \varphi_1(x), & 0 \leqq x \leqq \xi \leqq a \\ \dfrac{1}{\varphi_1(a)} W(a, \xi)\, \varphi_1(x) - W(x, \xi), & 0 \leqq \xi \leqq x \leqq a \end{cases}$$

heraus.

Es ist klar, daß $W(x, \xi)$ bei festem ξ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = 0$ mit der doppelten Nullstelle ξ darstellt, wobei $W''_{xx}(\xi, \xi) < 0$ ist.

Setzen wir jetzt voraus, daß eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = 0$ mit der doppelten Nullstelle $x_0 \in \langle 0, a\rangle$ keine weitere Nullstelle hat. (Von dieser Voraussetzung werden wir uns später befreien.)

Sodann hat jede Lösung dieser Gleichung im Intervall $\langle 0, a\rangle$ höchstens zwei Nullstellen. Dies geht aus den Eigenschaften der Büschel linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung hervor ([2]).

Nun wollen wir beweisen, daß bei festem x die Beziehung $G(x, \xi) \leqq 0$ für $0 \leqq \xi \leqq a$ besteht. Offenbar ist $G(x, \xi) \leqq 0$ für $a \geqq \xi \geqq x \geqq 0$. Wir zeigen: $G(x, \xi) \leqq 0$ für $0 \leqq \xi \leqq x \leqq a$.

Bei festem ξ stellt die Funktion $G(x, \xi)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq a$ dar und es gilt $G(a, \xi) = 0$, $G(0, \xi) > 0$, $G(\xi, \xi) < 0$.

Folglich hat die Funktion $G(x, \xi)$ im Intervall $0 < x < \xi$ eine Nullstelle und kann, da die zweite Nullstelle im Punkte a liegt, keine weitere Nullstelle besitzen. Daraus folgt $G(x, \xi) \leqq 0$ für $0 \leqq \xi \leqq x \leqq a$.

Die Lösung des Problems (15) kann in der Form

$$\varphi(x) = \int_0^a G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

geschrieben werden und es ist offenbar $\varphi(x) \leqq 0$ für $0 \leqq x \leqq a$.

Wir wollen uns nun von der Voraussetzung befreien, daß die Lösung $\overline{\varphi}(x)$ der Differentialgleichung $\varphi''' - f_u(x, z)\, \varphi = 0$ mit der doppelten Nullstelle x_0, $0 \leqq x_0 \leqq a$, im Intervall $0 \leqq x \leqq a$ keine weitere Nullstelle hat. Es ist bekannt ([2]), daß $\overline{\varphi}(x) \neq 0$ für $x_0 < x \leqq a$. Dies folgt aus der Voraussetzung $f_u(x, z) \geqq 0$.

Wir haben zu zeigen, daß $\overline{\varphi}(x)$ links von x_0 keine Nullstalle hat. Es genügt, wenn wir dies für den Fall $x_0 = a$ ([2]) beweisen.

Die rechte Seite von (14) ist eine wachsende Funktion von β. Folglich haben wir

$$\max_{\beta} a \leqq \lim_{\beta\to\infty} 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\beta}{M+2\beta M_1}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{1}{M_1}}, \tag{16}$$

wobei ist $M_1 = \max\limits_{0\leqq x\leqq a} |f_u(x, z(x))|$.

In dem Beweis daß die Lösung $\overline{\varphi}(x)$ mit der doppelten Nullstelle a keine weitere Nullstellen hat, stützen wir uns auf das folgende Lemma.

Lemma 1. Die Lösung y der Differentialgleichung $y''' + M_1 y = 0$, mit einer doppelten Nullstelle 0, *hat im Intervall* $0 \leqq x \leqq a$, $a = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{1}{M_1}}$ *keine weitere Nullstelle.*

Beweis. Die Lösung y der Differentialgleichung $y''' + M_1 y = 0$ mit der doppelten Nullstelle 0 ist

$$y = \frac{1}{3}k^2\left[e^{-kx} - e^{\frac{k}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \sqrt{3}\,e^{\frac{k}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right],$$

wobei $k = \sqrt[3]{M_1}$ ist.

Es ist offenbar:

$$y = \frac{1}{3}k^2 e^{\frac{k}{2}x}\left[e^{-\frac{3}{2}kx} - 2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right)\right],$$

$$y = \frac{1}{3}k^2 e^{\frac{k}{2}x}\left[e^{-\frac{3}{2}kx} + 2\left(-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right)\right]$$

$$y = \frac{1}{3}k^2 e^{\frac{k}{2}x}\left[e^{-\frac{3}{2}kx} + 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Die erste rechts von Null liegende Nullstelle der Lösung y ist ersichtlich größer als die zweite Nullstelle der Funktion $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right)$.

Betrachten wir die zweite positive Nullstelle x_2 dieser Funktion!

Aus
$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$
haben wir
$$\frac{\sqrt{3}}{2}kx_2 - \frac{\pi}{6} = \pi$$

$$x_2 = \frac{7}{6}\pi\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{k} = \frac{7}{3\sqrt{3}}\frac{\pi}{k}.$$

Wir wollen zeigen:

$$a < x_2$$

Dies geht aus

$$a = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[3]{3}\, \frac{1}{k} < x_2 = \frac{7}{\sqrt{3}}\, \frac{\pi}{k},$$

$$9\sqrt{3}\, \sqrt[3]{3} < 7\pi \sqrt[3]{4},$$

hervor.

Kehren wir nun zu dem Beweis, daß für $x > a$ die Ungleichung $\overline{\varphi}(x) \neq 0$ besteht, zurück. Nun ist $\varphi''' - f_u[x, z(x)]\, \varphi = 0$ die zu der Differentialgleichung $\psi''' + f_u[x, z(x)]\, \psi = 0$, adjungierte Differentialgleichung.

Aus dem Vergleichungssatz ([2]) geht hervor, daß diese letztere die im Lemma 1 für die Differentialgleichung $y''' + M_1 y = 0$ angeführte Eigenschaft besitzt. Die zwischen den Lösungen von gegenseitig adjungierten Differentialgleichungen dritter Ordnung bestehenden Beziehungen [2] ergeben, daß $\overline{\varphi}(x)$ im Intervall $\langle 0, a \rangle$ keine weitere Nullstelle hat.

Literatur

[1] **Ghizzetti**: *Lezioni sui procedimenti di quazilinearizzazione*, Centro internazionale matematico estivo (CIME), Perugia, 1964.

[2] M. **Greguš**: *Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung*, Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat. XII/3, S. 265—286, 1963.