Iosif Aleksandrovič Vil′ner

Принцип перенесения и номографирование в вещественной проективной плоскости функций одного комплексного дуального переменного Штуди и двойного переменного Клиффорда. II

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 3, 153--188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104589

ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ И НОМОГРАФИРОВАНИЕ В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ДУАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ШТУДИ И ДВОЙНОГО ПЕРЕМЕННОГО КЛИФФОРДА[1])

И. А. Вильнер (Москва)

ГЛАВА III. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВОЙНОГО КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. В дальнейших параграфах, соответствующих порядковым номерам параграфов второй главы будут даваться, не повторяя этого в каждом параграфе, результаты применения принципа перенесения главы I, т. е. преобразования (2.5) главы I к функциям гауссова аргумента, рассмотренными в каждом параграфе главы II. Попрежнему отмечаем, что элементарные функции будут автоматически включены, как случаи вырождения неэлементарных, не выписывая их канонические представления отдельно.

Если читатель желает фактически построить ту или иную номограмму только для элементарной зависимости, являющейся вырождением некоторой рассмотренной в гл. II неэлементарной зависимости, то соответствующее каноническое представление из канонического представления неэлементарной зависимости получится при предельных равных нулю или единице значениях модулях тех эллиптических якобиевых функций, которые входят в канонические представления соответствующих неэлементарных функций.

В этой главе будут часто использоваться следующие обозначения для эллиптических функций (сравнить с § 1 главы II):

$$(1.1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \operatorname{sn}(\tilde{p}; k) = \tilde{s}_1, & \operatorname{cn}(\tilde{p}; k) = \tilde{c}_1, & \operatorname{dn}(\tilde{p}, k) = \tilde{d}_1, \\ \operatorname{sn}(\tilde{q}; k) = \tilde{s}_2, & \operatorname{cn}(\tilde{q}; \mathrm{k}) = \tilde{c}_2, & \operatorname{dn}(\tilde{q}, k) = \tilde{d}_2, \\ \operatorname{sn}(2\tilde{p}; k) = \tilde{S}_1, & \operatorname{cn}(2\tilde{p}; k) = \tilde{C}_1, & \operatorname{dn}(2\tilde{p}; k) = \tilde{D}_1, \\ \operatorname{sn}(2\tilde{q}; k) = \tilde{S}_2, & \operatorname{cn}(2\tilde{q}; k) = \tilde{C}_2, & \operatorname{dn}(2\tilde{q}; k) = \tilde{D}_2. \end{array}\right.$$

---

[1]) Эта статья является второй частью работы. Первая часть вместе с литературой была опубликована в предшествующем номере.

Если систематически будут входить функции от эллиптических функций зависящих от одного и того же аргумента, содержащего $\tilde{p}$ (соответственно $\tilde{q}$), но не равного тождественно ни $\tilde{p}$ (соответственно $\tilde{q}$) при одном и том же модуле, то мы будем обозначать эти эллиптические функции, попрежнему, через s_1, c_1, d_1 (соответственно s_2, c_2, d_2), но рядом с функцией будем в скобках писать аргумент и модуль всех входящих в функцию эллиптических функций, аналогично тому, как мы условились это делать в § 11 II главы [(см. пример такой записи (11.10)].

В дальнейшем будут встречаться вещественные выражения вида

$$(1.2)\quad k\,\mathrm{ch}\,(2\tilde{x}+\ln k),\ kk'\,\mathrm{sh}\left(2\tilde{x}+\ln\frac{k}{k'}\right),\ k'\,\mathrm{ch}\,(2\tilde{x}-\ln k'),$$

и им подобные, содержащие экспоненциальные функции логарифмов.

Выражения (1.2) и им подобные теряют смысл с вещественной точки зрения, когда под логарифмом неположительное число или бесконечность. Надо помнить, что (1.2) это лишь сокращенная запись сохраняющих смысл при

$$(1.3)\qquad -\infty < k^2 < +\infty,\ -\infty < k'^2 < +\infty$$

выражений

$$(1.4)\quad k\,\mathrm{ch}\,(2\tilde{x}+\ln k)=\frac{k^2\,e^{2\tilde{x}}+e^{-2\tilde{x}}}{2},\ kk'\,\mathrm{sh}\left(2x+\ln\frac{k}{k'}\right)=$$

$$=\frac{k^2\,e^{2\tilde{x}}k'^2e^{-2\tilde{x}}}{2},\ k'\,\mathrm{ch}\,(2x-\ln k')=\frac{e^{2\tilde{x}}+k'^2\,e^{-2\tilde{x}}}{2}.$$

В этой главе мы будем определять канонические представления следующих моногенных функций двойного комплексного аргумента:

$$(1.5)\quad \begin{aligned}&1.\ \tilde{z}=\mathrm{amp}\,(\tilde{w};k);\ 2.\ \mathrm{amp}\,(\tilde{w}_k;k)=\mathrm{amp}\,(\tilde{w}_1;1);\\&3.\ \tilde{z}=\ln\mathrm{sn}\,(\tilde{w};k);\ 4.\ \tilde{z}=\ln\mathrm{cn}\,(\tilde{w};k);\ 5.\ z=\ln\mathrm{dn}\,(\tilde{w};k);\\&6.\ \tilde{z}=\ln\,[\wp(\tilde{w};g_2;g_3;)-e_\alpha],\ g_3^2-27g_3^2\leq 0,\end{aligned}$$

(с выделением гармонического случая);

$$7.\ z=\ln\,[\wp(\tilde{w};S_2;S_3)-e_\alpha],\ S_2^3-27S_3^2-0$$

(с выдеением $\mathrm{Im}\,e_\alpha=0$, гармонического и эквигармонического случаев);

$$8.\ \tilde{w}=\int\limits_0^{\tilde{u}}\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}\,d\xi$$

и функций, связанных с этими функциями.

§ 2. Канонические представления для равносильных между собой зависимостей [см. (1.5) главы II].

$$(2.1)\quad \sin\tilde{z} = \operatorname{sn}(\tilde{w}; k),\ \ \tilde{z} = \operatorname{amp}(\tilde{w}; k),\ \ \tilde{w} = \int\limits_0^{\tilde{z}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}},$$

$$\tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{w}} \operatorname{dn}(\xi; k)\, d\xi^{1)}$$

запишутся так [сравнить с (2.2) главы II]:

$$(2.2)\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2\tilde{x}) + \dfrac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2}(\cos 2\tilde{y}) + \left(\dfrac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2 - \tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2}\right) = 0, \\ (+1)(\cos 2x) + \left(\dfrac{\tilde{d}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\ {}_2^2}\right)(\cos 2\tilde{y}) + \left(\dfrac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_2^2 - \tilde{c}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(2.3)\quad \tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2 - \tilde{c}_2^2 = k'^2\tilde{s}_2^4 - \tilde{c}_2^4.$$

§ 3. При помощи результата § 2 можно получить следующую теорему. Зависимость

$$(3.1)\quad \operatorname{amp}(\tilde{w}_k; k) = \operatorname{amp}(\tilde{w}_1; 1),$$

где

$$(3.2)\quad \operatorname{amp}(\tilde{w}_k; k) \equiv \int\limits_0^{\tilde{w}_k} \operatorname{dn}(\xi; k)\, d\xi,\ \operatorname{amp}(\tilde{w}_1; 1) \equiv \operatorname{Arctg}\operatorname{sh}\tilde{w}_1 =$$

$$= \arcsin\operatorname{th} w_1,$$

или, что равносильно (3.1), зависимости

$$(3.3)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(\tilde{w}_k; k) = \operatorname{th}\tilde{w}_1,\ \operatorname{cn}(\tilde{w}_k; k) = \dfrac{1}{\operatorname{cn}\tilde{w}_1},\ \operatorname{tn}(\tilde{w}_k; k) = \operatorname{sh}(\tilde{w}_1), \\ \tilde{w}_k = \displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{Arcsin}\operatorname{th}\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}}, \\ i\tilde{w}_k = \displaystyle\int\limits_0^{i\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}}, \end{cases}$$

допускают канонические представления (3.4) (см. ниже). Мы видим, согласно (3.3₆), что канонические представления (3.3)

---

1) Весьма удобно вместо $\tilde{w}$ и $\tilde{z}$ писать соответственно $\tilde{w}_k$ и w_0.

получаются из канонических представлений (2.1) заменой (3.6) (см. ниже). Для (3.3′) (см. ниже) получаем представления (3.4′):

$$(3.4')\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2\tilde{q}_1)+\left(\dfrac{k'^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2}{\tilde{d}_2^2}\right)(\cos 2\tilde{p}_1)+\left(\dfrac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2-\tilde{c}_2^2}{\tilde{d}_2^2}\right)=0,\\ (+1)(\cos 2q_1)+\left(\dfrac{\tilde{d}_1^2}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2}\right)(\cos 2\tilde{q}_1)+\left(\dfrac{k^2\underline{\tilde{s}}_1^4-\underline{\tilde{c}}_1^4}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2}\right)=0,\end{cases}$$

причем

$$(3.5')\qquad k^2\underline{\tilde{s}}_1^4-\underline{\tilde{c}}_1^4=\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{d}}_1^2-\underline{\tilde{c}}_1^2,\ \underline{\tilde{s}}_2^2\underline{\tilde{d}}_2^2-\underline{\tilde{c}}_2^2=k^2\underline{\tilde{s}}_2^4-\underline{\tilde{c}}_4^3,$$

где черточки снизу означают эллиптические функции от аргументов $\tilde{p}_k$, $\tilde{q}_k$, но могуля k', а не k.

Достаточно наоборот в (3.3) и (3.4) заменить k' на k, $\tilde{w}_k$ на $\tilde{w}$, $\tilde{w}_1$ на $\tilde{z}$ и соответственно p_k на p, q_k на q, p_1 на x, q_1 на y, устранив в (3.4), (3.5) черточки снизу под знаком эллиптических функций, чтобы получить канонические представления для (2.1)

$$(3.6')\qquad \tilde{w}_k=\int\limits_0^{\tilde{z}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}.$$

Удобнее интеграл (3.6′) или, что то же самое (2.1), переписать так, заменив $\tilde{w}$ на $\tilde{w}_k$ и z на $\tilde{w}_0$:

$$(3.7')\qquad \tilde{w}_k=\int\limits_0^{\tilde{w}_0}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}.$$

Тогда канонические представления для (3.7′) в силу (2.2) запишутся так

$$(3.8')\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2q_0)+\left(\dfrac{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2}{\tilde{d}_2^2}\right)(\cos 2p_0)+\left(\dfrac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2-\tilde{c}_2^2}{\tilde{d}_2^2}\right)=0,\\ (+1)(\cos 2q_0)+\left(\dfrac{\tilde{d}_1^2}{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}\right)(\cos 2p_0)+\left(\dfrac{k'^2\tilde{s}_1^4-\tilde{c}_1^4}{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}\right)=0,\end{cases}$$

$$(3.9')\qquad k'^2\tilde{s}_1^4-\tilde{c}_1^4=\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2-\tilde{c}_1^2,\ \tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2-\tilde{c}_2^2=k'^2\tilde{s}_2^4-\tilde{c}_2^4.$$

Однако, канонические представления для (3.3) мы найдем, как обычно, из канонических представлений (3.4) главы II, для зависимостей (3.3) главы II, применив к (3.3) и (3.4) главы II преобразование перенесения

$$(\mathrm{A}):\qquad p_1\to\tilde{p}_1,\ q_1\to-\varepsilon i\tilde{q}_1,\ p_k\to\tilde{p}_k,\ q_k\to-\varepsilon i\tilde{q}_k.$$

Получаем тогда после вычислений аналогичных предыдущим нижеприведеные канонические представления (3.4) зависимости (3.3), которая после простого преобразования замены может быть переписана так:

$$-q_k + ip_k = \int\limits_0^{-q_1+ip_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \xi}}.$$

Применяя принцип перенесения в виде

$(\bar{A})$ $\quad p_k \to -\varepsilon i\tilde{p}_k,\ q_k \to -\tilde{q}_k,\ p_1 \to -\varepsilon i\tilde{p}_1,\ q_1 \to -\tilde{q}_1,$

получаем из предыдущего соотношения, как легко видеть зависимость

$$(3.3') \quad \varepsilon\tilde{w}_k = \int\limits_0^{\varepsilon\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \xi}}, \quad \tilde{w}_k = \int\limits_0^{\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi}}.$$

Так получившееся равенство (3.3′) утрачивает связь со всеми остальными равенствами (3.3) настоящей главы и, что особенно важно для применений, с первым из них.

Сравнивая с последним соотношением (3.3) главы II и с последним соотношением (3.3) настоящей главы, мы видим, что переход от последнего соотношения (3.3) главы II к соотношению (3.3′) настоящец глави выполнеи не толььо преобразованием перенесения относительно аргументов w_1 и w_k, но еще и заменой $i = \sqrt{-1}$ на ε. Для получения канонических представлениц для (3.3′) из канонических представлений (2.2) для (2.1) достаточно в (2.2) сделать замену $\tilde{x} \to \tilde{q}_1,\ \tilde{y} \to \tilde{p}_1,\ \tilde{p} \to \tilde{q}_k,\ \tilde{q} \to \tilde{p}_k,$ $k \to k'$. Получим (3.4′).

Следовательно, канонические представления для равносильных зависимостей (3.3) получим преобразованием (A), таким образом, с помощью канонических представлений (2.2) второй главы для зависимостей (2.1). Получаем канонические преобразования для (3.3)

$$(3.4_1)\ (+1)(\operatorname{ch} 2\tilde{p}_1) + \left(-\frac{k'^2\tilde{s}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right)(\operatorname{ch} 2\tilde{q}_1) + \left(-\frac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2 + \tilde{c}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right) = 0,$$

где аргументом и модулем эллиптических функций служат $\tilde{p}_k$ и k;

$$(3.4_2)\quad (+1)(\operatorname{ch} 2\tilde{p}_1) + \left(-\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right)(\operatorname{ch} 2\tilde{q}_1) + \left(\frac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2 + \tilde{c}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right) = 0,$$

$$(3.5)\qquad -(\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2+\tilde{c}_1^2)\equiv k^2\tilde{s}_1^4-1,\quad \tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2+\tilde{c}_2^2\equiv 1-k^2\tilde{s}_2^4$$

где аргументом и модулем служат $\tilde{q}_k$ и k, причем последние соотношения (3.3) и их канонические представления (3.4) могут быть получены из (2.2) настоящей главы еще заменой

$$\tilde{p}\to i\tilde{p}_k,\ \tilde{q}\to i\tilde{q}_k,\ \tilde{x}\to i\tilde{p}_1,\ \tilde{y}\to i\tilde{q}_1,\ k\to k',\ k'\to k.$$

При этом

$$(\cos 2\tilde{x})\ \text{заменяется на}\ (\mathrm{ch}\,2\tilde{p}_1);$$

$$(\cos 2\tilde{y})\ \text{заменяется на}\ (\mathrm{ch}\,2\tilde{q}_1);$$

$$\frac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2}\ \text{заменяется на}\ \left(-\frac{k'^2\tilde{s}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right),$$

где, согласно ранее принятым обозначениям, аргументом служит $\tilde{p}_k$, а модулем k;

$$\frac{\tilde{d}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2}\ \text{заменяется на}\ \left(-\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right),$$

где, согласно ранее принятым обозначениям, аргументом служит $\tilde{q}_k$, а модулем k;

$$\frac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2-\tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2}\ \text{заменяется на}\ -\frac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2+\tilde{c}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\equiv\frac{k^2\tilde{s}_1^4-1}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2},$$

$$\frac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2-\tilde{c}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2}\ \text{заменится на}\ \frac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2+\tilde{c}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2},$$

где согласно принятым обозначениям, аргументом служит $\tilde{p}_k$, а модулем k;

Отметим, что канонические представления для (3.3′) настоящей главы можно было бы получать и не из канонических представлений (3.4) главы II, а из канонических представлений (2.2) главы II. Вместо преобразования перенесения (A) имели бы преобразование

$$(B)\qquad x\to\tilde{q}_1,\ y\to-\varepsilon i\tilde{p}_1,\ p\to\tilde{q}_k,\ q\to-\varepsilon i\tilde{p}_k.$$

В таком случае преобразование, переводящее каноническое представление (2.2) второй главы в (3.4) второй главы должно выглядеть, согласно (A) и (Б), так

$$(C)\qquad x\to-q_1,\ y\to p_1,\ p\to-q_k,\ q\to p_k.$$

Это и есть, как раз, то преобразование при помощи которого из (2.2) второй главы получено (3.4) второй главы.

Необходимо только твердо иметь в виду, что в эллиптических функциях $\underset{=}{\tilde{s}}_2$, $\underset{=}{\tilde{c}}_2$, $\underset{=}{\tilde{d}}_2$ в (3.4$'_1$) аргументом служит $\tilde{q}_k$, а модулем k', а не k, а в эллиптических функциях $\underset{=}{\tilde{s}}_1$, $\underset{=}{\tilde{c}}_1$, $\underset{=}{\tilde{d}}_1$ в (3.4$'_2$) аргументом служат $\tilde{p}_k$, а модулем служит также k', а не k.

Это подчеркивается наличием черточки снизу.

Докажем формулы (3.1)—(3.3) этой главы, лежащие в основе доказательства высказанной в начале § 3 теоремы.

Прежде всего напомним (глава 1), что в силу нашего определения эллиптических функций от Клиффордова комплексного аргумента $\tilde{u} = \tilde{\sigma} + \varepsilon\tilde{\tau}$ эти функции являются результатом применения принципа перенесения к вещественным рядам эллиптических функций от гауссова комплексного аргумента $u = \sigma + i\tau$.

Если же ряды не являются вещественными, то, оперируя в области гиперкомплексной переменной $u = x + iy + z\varepsilon + t\,\varepsilon\, i$ мы при применении принципа перенесения не затрагиваем i и ε, входящие в другие переменные (например, в модуль $\overline{\overline{k}}$ эллиптических функций) или в постоянные величины, поскольку они не подвергаются преобразованию перенесения (прямого или обратного).

После этих общих замечаний, мы, прежде всего, приведем ряд известных формул для комплексного гауссова аргумента, которые верны в силу определения эллиптических функций от клиффордова аргумента, независимо от понимаем ли мы под w переменную $\delta + i\tau$ или переменную $\tilde{\sigma} + \varepsilon\tilde{\tau}$.

Прежде всего, это формулы вырождения

$$\operatorname{sn}(u;1) = \operatorname{th} u, \operatorname{cn}(u;1) = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \operatorname{tn}(u;1) = \operatorname{sh} u \qquad (3.7.)$$

Затем, это формулы гауссова мнимого модулярного преобразования Якобы первой степени.

$$\operatorname{sn}(iu;k) = \frac{i\operatorname{sn}(u;k')}{\operatorname{cn}(u;k')}, \operatorname{cn}(iu;k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u;k')}, \operatorname{dn}(iu;k) = \frac{\operatorname{dn}(u;k')}{\operatorname{cn}(u;k')},$$

$$\operatorname{tn}(iu;k) = i\operatorname{sn}(u;k'), \ldots.. \qquad (3.8.)$$

Из (3.8-) вытекает, что

$$\operatorname{sn}(u;k) = -i\operatorname{tn}(iu;k'), \qquad (3.9)$$

откуда, в свою очередь, заменяя u' на $-\varepsilon iu$ и „k'“ на $\overline{k}$ и, наоборот, получаем

$$i\operatorname{tn}(u;k) = \operatorname{sn}(iu;k'). \qquad (3.10)$$

Отметим попутно, что в чисто-клиффордовой области формулы (3.8) заменяются более простыми.

$$\sin \varepsilon u = \varepsilon \sin u, \quad \cos \varepsilon u = \cos u, \quad \operatorname{tg} \varepsilon u = \varepsilon \operatorname{tg} u, \ldots$$

$$\operatorname{sh} \varepsilon u = \varepsilon \sin u, \quad \operatorname{ch} \varepsilon u = \operatorname{ch} u, \quad \operatorname{th} \varepsilon u = \varepsilon \operatorname{th} u, \ldots.$$

$$\operatorname{sn}(\varepsilon u; k) = \varepsilon \operatorname{sn}(u; k), \ \operatorname{cn}(\varepsilon u; k) = \operatorname{cn}(u; k), \ \operatorname{dn}(\varepsilon u; k) = \\ = \operatorname{dn}(u; k), \tag{3.11}$$

$$\operatorname{tn}(\varepsilon u; k) = \varepsilon \operatorname{tn}(u; k), \ldots$$

Той же универсальностью (с ограничением, чтобы в случае клиффордова толкования не допускались значения переменных (и постоянных), приводящих к операции деления на делителей нуля) обладает и одновременная справедливость при $k = 1$ равенств

$$w_k = \int_0^{w_0} \frac{d\,\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad w_k = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{w_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.12}$$

или, что равносильно этим равенствам при $k = 1$, но более компактно,

$$\operatorname{th} \frac{w_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{w_0}{2} \tag{3.13}$$

(причем, относительно многозначности w_1, как функции w_0, делаются естественные соглашения), из которого (т. е. из (3.13)) легко следуют равенства (см. (3.3) этой главы)

$$\sin w_0 = \operatorname{th} w_1, \quad \operatorname{tg} w_0 = \operatorname{sh} w_1, \quad \frac{1}{\cos w_0} = \pm \operatorname{ch} w_1, \tag{3.14}$$

причем надо взять верхний знак, если речь идет о той ветви w_1, которая принимает значение нуль, когда $w_0 = 0$.

Равенство (3.13) в свою очередь может быть переписано так:

$$\operatorname{th} \frac{iw_0}{2} = \operatorname{tg} \frac{iw_1}{2}, \tag{3.15}$$

а, следовательно, сравнивая его с (3.13), принимая во внимание то, что (3.13) следует из (3.12), получим из (3.15) при $k = 1$

$$iw_0 = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{iw_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \int_0^{iw_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}. \tag{3.16}$$

Обозначим теперь через w_0 правую часть (3.1). Тогда, с одной стороны имеем

$$\operatorname{amp}(w_1; 1) = w_0. \tag{3.17}$$

Беря синус от обоих частей (3.17), на основании (3.7) получим (см. выше (3.14)), что

$$\operatorname{th} w_1 = \sin w_0, \tag{3.18}$$

откуда

$$w_0 = \operatorname{Arc}\sin \operatorname{th} w_1. \tag{3.19}$$

Но (см. (3.1) этой главы), имея в виду, что мы обозначили обе части равенства (3.1) через w_0, имеем также

$$\operatorname{amp}(w_k; k) = w_0, \tag{3.20}$$

откуда

$$w_k = \int_0^{w_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \tag{3.21}$$

или силу (3.19)

$$w_k = \int_0^{\operatorname{Arcsin} \operatorname{th} w_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \tag{3.22}$$

что совпадает с (3.3-) этой главы.

С другой стороны, беря тангенс от обоих частей равенства (3.1) этой главы, получим

$$\operatorname{tn}(w_k; k) = \operatorname{sh} w_1 \tag{3.23}$$

или

$$i \operatorname{tn}(w_k; k) = \sin(iw_1). \tag{3.24}$$

Принимая во внимание (3.10), это равенство перепишется так

$$\operatorname{sn}(iw_k; k') = \sin(iw_2), \tag{3.25}$$

откуда

$$iw_k = \int_0^{iw_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \xi}}, \tag{3.26}$$

что совпадает с (3.3-) этой главы.

Из изложенного, между прочим, следует совместная номографируемость по прямолинейным комплексным переменным w_0 или w_1 всех соотношений (3.12), (3.15), (3.16), (3.18), (3.23), (3.14), (3.13).

Это вытекает из следующего более общего простого, но важного, замечания.

Если анаморфозируемая зависимость в гауссовой или клиффордовой областях

$$f(z;\ w;\ k) = 0 \tag{3.27}$$

с параметром ,,k,,, причем шкала z (аналогично — шкала w) не зависит от параметра k то, ∞^1, ∞^2, ..., зависимостей между z и w, определяемых уравнением (3.27) при всевозможных допустимых вещественных, комплексных, ..., значениях параметра k номографически совместны по z (ссоответственно — по w).

Возвращаясь к номографированию гауссо-калиффордова соотношения (3.3_5) этой главы, чему в основном посвящен § 3 этой главы, отметим, что ниже, в § 18, приведен аналогичный пример клиффордизации гауссова вещественного соотношения (18.1) главы II, связывающего комплексные гауссовы аргументы z и w по этим аргументам.

В результате (18.1) главы II превращается в (18.1) настоящей главы (см. ниже (18.1)) при одновременной клиффордизации по аргументам z и w равносильного соотношению (18.1) второй главы, но не вещественного соотношения (18.8) второй главы, которое после клиффордизации по z и w, примет невещественную гауссо-клиффордову форму (18.23) настоящей главы (см. ниже), для которой, тем не менее, аналогично получению канонических представлений (3.4) для (3.3-), также получены канонические представления (18.25) в настоящей главе (см. ниже 1 18).

§ 4. Канонические представления зависимости

$$\tilde{z} = \ln \operatorname{sn}(\tilde{w};\ k) \tag{4.1}$$

имеют вид

$$\begin{cases}(+1)(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (-\tilde{S}_1^2)(k \operatorname{ch}(2\tilde{x} + \ln k)) + (\tilde{C}_1\tilde{D}_1) = 0,\\ (+1)(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (-\tilde{S}_2^2)(k \operatorname{ch}(2\tilde{x} + \ln k)) + (-\tilde{C}_2\tilde{D}_2) = 0.\end{cases} \tag{4.2}$$

§ 5. Канонические представления зависимости

$$\tilde{z} = \ln \operatorname{cn}(\tilde{w};\ k) \tag{5.1}$$

имеют вид

$$\begin{cases}(\tilde{D}_1^2)(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (\tilde{S}_1^2)\left(kk' \operatorname{sh}\left(2\tilde{x} + \ln \dfrac{k}{k'}\right)\right) + (-\tilde{C}_1) = 0,\\ (+1)(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + \left(\dfrac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{D}_2^2}\right)\left(kk' \operatorname{sh}\left(2\tilde{x} + \ln \dfrac{k}{k'}\right)\right) + \left(-\dfrac{\tilde{C}_2}{\tilde{D}_2^2}\right) = 0.\end{cases} \tag{5.2}$$

§ 6. Канонические представления зависимости

$$\tilde{z} = \ln \operatorname{dn}(\tilde{w};\ k) \tag{6.1}$$

имеют вид

$$
(6.2)\quad \begin{cases} (\tilde{C}_1^2)\,(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (\tilde{S}_1^2)\,(k' \operatorname{ch}(2\tilde{x} - \ln k')) + (-\tilde{D}_1) = 0, \\ (+1)\,(\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + \left(\dfrac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{C}_2^2}\right)\left(k' \operatorname{ch}\left(2\tilde{x} - \ln k'\right)\right) + \left(-\dfrac{\tilde{D}_2}{\tilde{C}_2^2}\right) = 0. \end{cases}
$$

§ 7. Все элементарные случаи вырождений функций, рассмотренных в §§ 2—6 этой главы при $k = 0$ и $k = 1$ заключаются в полученных в этих §§ результатах.

Канонические представления для логарифмов трёх функций Якоби—Глешера

$$
(7.1)\qquad \tilde{z} = \ln ns(\tilde{w}; k),\ z = \ln nc(\tilde{w}; k);\ \tilde{z} = \ln \operatorname{nd}(w; k)
$$

получаются из канонических представлений соответственно зависимостей (4.1), (5.1), (6.1) простой заменой $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ на $(-\tilde{x})$ и $(-\tilde{y})$.

Канонические представления для логарифмов шести функций Якоби — Глешера.

$$
(7.2)\qquad \tilde{z} = \ln sc(\tilde{w}; k),\ \tilde{z} = \ln cd(\tilde{w}; k),\ \tilde{z} = \ln sd(\tilde{w}; k)
$$

приводятся к случаю рассмотренному в § 6 при помощи тождеств § 12 работы [5], поскольку эти тождества остаются в силе при замене гауссова аргумента эллиптических функций клиффардовым аргументом $\tilde{w}$.

По другому можно эти канонические представления получить из канонических представлений для (7.2) с помощью преобразования (2.5) первой главы.

Канонические же представления для зависимостей Якоби — Глешера

$$
(7.3)\qquad \tilde{z} = \ln cs(\tilde{w}; k),\ \tilde{z} = \ln dc(\tilde{w}; k);\ \tilde{z} = \ln ds(\tilde{w}; k)
$$

получаются из канонических представлений соответствующих зависимостей (7.2) простой заменой x и y на $(-x)$ и $(-y)$.

Вследствие этого мы не будем, за недостатком места, приводить канонические представления функций (7.1), (7.2), (7.3).

Наконец, отметим, что конкретные тождества (7.4), (7.5) второй главы применяются без принципиальных трудностей при помощи (4.2), (5.2) и (6.2).

Построив канонические представления для логарифмов всех двенадцати попарных отношений якобиевых функций гауссова комплексного аргумента (для трех главных это сделано в §§ 4, 5, 6 второй главы), применяя затем к ним принцип перенесения, получим канонические представления для этих же двенадцати функций Якоби — Глешера от двойного комплексного переменного,

§ 8. Канонические представления зависимости

(8.1) $$\tilde{z} = \ln\left[\wp(\tilde{w};\, g_2;\, g_3) - e_\alpha\right]$$

имеют вид

$$(8.2)\begin{cases} (+1)(\operatorname{ch}\tilde{y}) + \left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{e_\beta - e_\alpha} + e^{-\tilde{x}}(e_\gamma - e_\alpha)}{2}\right) + \\ + \left[\operatorname{cn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\operatorname{dn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = \\ = (+1)(\operatorname{ch}\tilde{y}) + \left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{e_\beta - e_\alpha} + e^{-\tilde{x}}(e_\gamma - e_\alpha)}{2}\right) + \\ + \left[-\operatorname{cn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\operatorname{dn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0, \end{cases}$$

если

(8.3) $$e_\beta > e_\alpha;$$

$$(8.4)\begin{cases} \left[-\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)(\operatorname{ch}\tilde{y}) + \left[\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{p};\right.\right.\right. \\ \left.\left.\sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\cdot\left[\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{e_\alpha - e_\beta} + e^{-\tilde{x}}(e_\alpha - e_\beta)}{2}\right] + \left[-\operatorname{dn}\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{p};\right.\right. \\ \left.\left.\sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0, \\ \left[-\operatorname{cn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right](\operatorname{ch}\tilde{y}) + \\ + \left[\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\left[\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{e_\alpha - e_\beta} + e^{-\tilde{x}}(e_\alpha - e_\beta)}{2}\right] + \\ + \left[\operatorname{dn}\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0, \end{cases}$$

если

(8.5) $$e_\alpha > e_\beta.$$

Представления (8.2) получены с помощью принципа перенесения из (8.4), а представления (4.5) — из (8.6) второй главы.

Корни e_α, e_β, e_γ попрежнему, удовлетворяют уравнению и неравенству (8.2) второй главы.

В первом случае вырождения зависимости (8.1), когда имееет место (8.8), (8.9), (8.10) главы II, зависимость (8.1) примет вид

$$\tilde{z} = \ln\left[-\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{ct\,n}^2\left(\tilde{w}\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right)\right], \tag{8.6}$$

получаемый из (8.12) второй главы преобразованием перенесения.

Во втором случае вырождения зависимости (8.1) примет вид (8.8), (8.9), (8.13)

$$\tilde{z} = \ln\left[\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{ctg}^2\left(\tilde{w}\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right)\right], \tag{8.7}$$

получаемый из (8.15) второй главы преобразованием перенесения.

Канонические представления для элементарных зависимостей (8.6) и (8.7) получаются в силу (8.10) и (8.13) из канонических представлений (8.2).

Если бы поменяли местами e_α и e_β в (8.11) и (8.13) главы II, то канонические представления для (8.6) и (8.7) получили бы из канонических представлений (8.4).

§ 9. Рассмотрим отдельно интересный частный гармонический случай функции Веерштрасса,
когда

$$g_3 = 0. \tag{9.1}$$

В этом случае имеют место либо равенства (9.2), (9.3), либо равенства (9.4), (9.5) второй главы. В первом случае мы будем предполагать, что $g_2 > 0$, ибо тривиальный случай $g_2 = 0$ рассматривается непосредственно без всякого труда.

В этом, и только в этом случае, номографируема в полярных координатах непосредственно сама функция Веерштрасса, т. к. (8.1) примет вид

$$\tilde{z} = \ln \wp(\tilde{w}; g_2; 0). \tag{9.2}$$

Эта зависимость в случае (9.4), (9.5) второй главы выходит за пределы применимости канонических представлений (8.2), (8.4), полученных в предположении выполнимости условий (8.2) второй главы.

Применяя канонические представления (8.2) к случаю (9.2_1), второй главы, когда $e_\beta > e_\alpha$, или канонические представления (8.4) к случаю (9.2_2) второй главы, когда $e_\alpha > e_\beta$, получим *в обоих случаях одинаковые канонические представления* для зависимости (9.2) (гармонический случай функции Вееритрасса) при условии (9.1), в согласии с теоремой единственности анаморфозы функции комплексного переменного [4], [5].

Вместо того, однако, чтобы получать искомые канонические представления для (9.2) из канонических представлений (8.2) или (8.4), с последующим их преобразованием к вещественному модулю, как это пришлось делать в § 9 второй главы, которые были получены с помощью принципа перенесения из (8.4), (8.6), мы можем сразу получить их из канонических представлений (9.9) зависимости (9.6) второй главы с помощью принципа перенесения (2.5) первой главы (вместо u и v мы пишем везде p и q).

Получаем, таким образом, из (9.9) второй главы следующие канонические представления зависимости (9.2)

$$(9.3)\quad \begin{cases} \left[2\,\mathrm{du}^2\left(2\sqrt[4]{S_2}\,\tilde p;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\operatorname{ch}\tilde y)+ \\ +\left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde p;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{2e^{\tilde x}}{\sqrt{g_2}}-\dfrac{\sqrt{g_2}}{2}e^{-\tilde x}}{2}\right)+ \\ +\left[2\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde p;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=0, \\ \left[2\,\mathrm{dn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde q;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\operatorname{ch}\tilde y)+ \\ \left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde q;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{2e^{\tilde x}}{\sqrt{g_2}}-\dfrac{\sqrt{g_2}}{2}e^{-\tilde x}}{2}\right)+ \\ +\left[-2\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde q;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=0, \end{cases}$$

если, согласно (9.10) второй главы (случай $g_2 = 0$ тривиален)

$$(9.4)\qquad g_2 > 0.$$

Предоставляем читателю указанным выше более длинным путём получить канонические представления (9.3) из канонических представлений (8.2) или (8.4).

§ 10. Найдем канонические представления для (8.1) в гармоническом случае (9.1), когда имеет место (10.1) второй главы, т. е.

$$(10.1)\qquad e_\alpha = -\frac{\sqrt{g_2}}{2}.$$

Для зависимости

$$(10.2)\qquad z = \ln\left[\wp(\tilde{w};\, g_2;\, 0) + \frac{\sqrt{g_2}}{2}\right]$$

найдем, применяя к каноническим представдениям (10.3) зависимости (10.2) второй главы принцип перенесения, что

$$(10.3)\begin{cases} (+1)(\operatorname{cn}\tilde{y}) + \left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\frac{2e^{\tilde{x}}}{\sqrt{g_2}} + \sqrt{g_2}\,e^{-\tilde{x}}}{4}\right) + \\ + \left[\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0, \\ (+1)(\operatorname{ch}\tilde{y}) + \left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{q};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\frac{2e^{\tilde{x}}}{\sqrt{g_2}} + \sqrt{g_2}\,e^{-\tilde{x}}}{4}\right) + \\ + \left[-\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{q};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{q};\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0. \end{cases}$$

§ 11. Найдем канонические представления для (8.1) в гармоническом случае (9.1), когда согласно (11.1) второй главы

$$(11.1)\qquad e_\alpha = \frac{\sqrt{g_2}}{2}.$$

Для зависимости

$$(11.2)\qquad \tilde{z} = \ln\left[\wp(\tilde{w};\, g_2;\, 0) - \frac{\sqrt{g_2}}{2}\right]$$

найдём, применяя принцип перенесения к каноническим представлениям (11.3) зависимости (11.2) второй главы,

$$
(11.3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[-\mathrm{cn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{q};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)(\mathrm{ch}\,\tilde{y})+\\
&+\left[\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{q};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^{\tilde{x}}}{\sqrt{g_2}}+\sqrt{g_2}\,e^{-\tilde{x}}}{4}\right)+\\
&+\left[\mathrm{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=0,\\
&\left[-\mathrm{cn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\mathrm{ch}\,\tilde{y})+\\
&+\left[\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^{\tilde{x}}}{\sqrt{g_2}}+\sqrt{g_2}\,e^{-x}}{4}\right)+\\
&+\left[-\mathrm{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,\tilde{p};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 12. Найдем канонические представления для

$$(12.1)\qquad \tilde{z}=\ln\left[\wp(\tilde{w};\ g_2,\ g_3)-e_\alpha\right],$$

когда имеет место (12.2) второй главы, т. е.

$$(12.2)\qquad g_2^3-27\,g_3^2<0,$$

т. е. в случае двух комплексных корней, которыми мы будем считать, как и в § 12 второй главы, e_β и e_γ, а e_α — действительный корень.

Итак, пусть имеют место соотношения второй главы (12.3), не исключая и случая вырождения (12.4), когда имеют место соотноешния (12.5). При этом в силу (12.6) второй главы имеем два случая вырождения 1), 2), (12.7).

Таким образом, мы и в настоящем параграфе дадим с помощью принципа перенесения канонические представления для (12.1) при условии более общем, чем (12.2) (см. (12.8) и (12.9) второй главы)

$$(12.3)\qquad g_2^3-27\,g_3^2\gtreqless 0.$$

Исключая лишь случай, когда при условии (12.4) второй главы и

$$(12.4)\qquad m=0,\ e_\beta=e_\gamma=e_\alpha=0.$$

Применяя принцип перенесения к (12.11) второй главы, получим, припоминая принятые в § 12 второй главы обозначения [(в виде примера см. равенсвто (12.10) второй главы)].

$$
(12.5)\quad \begin{cases}
(+1)(\mathrm{ch}\,\tilde{y}) + \left[-\dfrac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2}\left(2\sqrt{H}\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}}\right]\right]\left[\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{H}+He^{-\tilde{x}}}{2}\right]+ \\
+\left[\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3e_\alpha}{4H}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}\right)c_1^4}{c_1^2}\left(2\sqrt{H}\tilde{p};\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]=0, \\
(+1)(\mathrm{ch}\,\tilde{y}) + \left[-\dfrac{s_2^2 d_2^2}{c_2^2}\left(2\sqrt{H}\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]\left[\dfrac{\dfrac{e^{\tilde{x}}}{H}+He^{-\tilde{x}}}{2}\right]+ \\
+\left[-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3e_\alpha}{4H}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}\right)c_2^4}{c_2^2}\left(2\sqrt{H}\tilde{q};\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]=0.
\end{cases}
$$

Все, что сказано в § 12 второй главы после канонических представлений (12.11) сохраняет силу и здесь. А именно, что (12.5) можно считать каноническими представлениями для зависимости (12.1) и при положительном дискриминанте [(см. условия (12.12) второй главы)], лишь бы, кроме того, имело место и неравенство (12.14) второй главы, предполагающее, что $e_\alpha \neq 0$. Если же имеет место (12.16) второй главы, т. е. $e_\alpha = 0$, т. е. $S_3 = 0$ (гармонический случай), то в силу (12.17) второй главы заключаем, что [(см. (12.18) второй главы)]

$$(12.6)\qquad H = \frac{\sqrt{-g_2}}{2}.$$

Таким образом, канонические представления (12.5) в условиях (12.16) второй главы, т. е. в условиях $e_\alpha = 0$, годны только [(см. (12.19) второй главы)] при

$$(12.7)\qquad g_2 < 0,$$

а этот случай гармонического случая, когда

$$(12.8)\qquad g_2^3 - 27\,g_3^2 = g_2^3 < 0$$

нами был пропущен, т. к. в § 9 этой главы мы рассмотрели гармонический случай в условиях неравенства (9.4), отрицающего неравество (12.7).

§ 13. Канонические представления зависимости (12.1) в условиях когда имеет место (12.16), т. к. канонические представления зависимости [(сравнить с (9.6) второй главы)]

$$\tilde{z} = \ln \wp(\tilde{w};\ g_2;\ 0), \tag{13.1}$$

когда имеет место неравенство (12.7), настоящей главы и когда выражается формулой (12.5), т. е. канонические представления зависимости (13.1) в гармоническом случае ($S_3 = 0$), и когда $g_2 < 0$, получаем с помощью принципа перенесения из канонических представлений второй главы (13.1) для зависимости второй главы (9.6) в условиях (9.5) второй главы.

Найдем следующие канонические представления для (13.1), если

$$g_2 < 0, \tag{13.2}$$

$$\begin{cases} (+1)(\operatorname{ch} y) + \left[-\dfrac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2 \tilde{p}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \left[\dfrac{\dfrac{2e^{\tilde{z}}}{\sqrt{-g_2}} + \dfrac{\sqrt{-g_2}}{2}\, e^{-\tilde{z}}}{2} \right] + \\ + \left[\dfrac{1 + c_1^4}{2c_1^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2 \tilde{p}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = 0, \\ (+1)(\operatorname{ch} y) + \left[-\dfrac{s_2^2 d_2^2}{c_2^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2 \tilde{q}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \left[\dfrac{\dfrac{2e^{\tilde{z}}}{\sqrt{-g_2}} + \dfrac{\sqrt{-g_2}}{2}\, e^{-\tilde{z}}}{2} \right] + \\ + - \dfrac{1 + c_2^4}{2c_2^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2 \tilde{q}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \Bigg] = 0. \end{cases} \tag{13.3}$$

§ 14. Перейдем к номографированию эквигармонического случая функции (12.1), когда

$$g_2 = 0. \tag{14.1}$$

В этом случае номографируемая зависимость примет вид

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 = -27\, g_3^2 < 0. \tag{14.2}$$

Случай, когда, помимо (14.1), еще $g_3 = 0$, как тривиальный, мы исключаем, т. е. пусть

$$g_3 \neq 0. \tag{14.3}$$

В этом случае зависимость (12.1) примет вид

$$\tilde{z} = \ln [\wp(\tilde{w};\ 0,\ g_3] - e_\alpha], \tag{14.4}$$

причем в силу (14.6), (14.7), (14.8) второй главы

$$(14.5)\quad e_\alpha = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}},\ e_\beta = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\,\omega,\ e_\gamma = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\,\omega^2,\ \omega = \sqrt{1} \neq 1,$$

$$\operatorname{Im}\omega > 0,$$

$$(14.6)\quad H \equiv \sqrt{2e_\alpha^2 + e_\beta e_\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{g_3^2}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{108 g_3^2} = \sqrt[6]{\frac{27}{16}\,g_3^2},$$

$$2\sqrt{H} = \sqrt[6]{48\,|g_3|\sqrt{3}} = \sqrt[12]{6912\,g_3^2},$$

$$k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin\frac{\pi}{12},\ k' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$$

$$(14.7)\qquad = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{12}.$$

Применяя теперь принцип перенесения к каноническим представлениям (14.9) второй главы и отсылая относительно смысла обозначений к концу § 12 [(см. равенство (12.10)] второй главы, получим следующие канонические представления зависимости (14.4) при условии (14.3):

$$(14.8)\left\{\begin{aligned}
&(+1)(\operatorname{ch}\tilde y) + \left[-\frac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2}\left(\sqrt[6]{48\,|g_3|\sqrt{3}}\,\tilde p;\right.\right.\\
&\left.\left.\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]\left(\frac{\dfrac{2e^{\tilde x}}{\sqrt[6]{108g_3^2}} + \dfrac{\sqrt[6]{108g_3^2}\,e^{-\tilde x}}{2}}{2}\right) +\\
&+\left[\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{12} + \sin^2\dfrac{\pi}{12}\,c_1^4}{c_1^2}\left(\sqrt[6]{48\,|g_3|\sqrt{3}}\,\tilde p;\ \sin\frac{\pi}{12}\right)\right] = 0,\\
&(+1)(\operatorname{ch}\tilde y) + \left[-\frac{s_2^2 d_2^2}{c_2^2}\left(\sqrt[6]{48\,|g_3|\sqrt{3}}\,\tilde p;\right.\right.\\
&\left.\left.\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]\left(\frac{\dfrac{2e^{\tilde x}}{\sqrt[6]{108g_3^2}} + \dfrac{\sqrt[6]{108g_3^2}\,e^{-\tilde x}}{2}}{2}\right) +\\
&+\left[-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{12} + \sin^2\dfrac{\pi}{12}\,c_2^4}{c_2^2}\left(\sqrt[6]{48\,|g_3|\sqrt{3}}\,\tilde q;\ \sin\frac{\pi}{12}\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

§ 15. Эллиптический интеграл второго рода

(15.1) $$E(\tilde{u}; k) = \int\limits_0^{\tilde{u}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}\, \mathrm{d}\xi,$$

где $u = \lambda + \varepsilon\mu$ — комплексная переменная, — преобразуем подстановкой

(15.2) $$\tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{u}} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 h}} \equiv \mathrm{F}(\tilde{u}; k),\ \tilde{u} = \operatorname{amp}(\tilde{z}; k).$$

Полагая

(15.3) $$E(\tilde{u}; k) \equiv E(\operatorname{amp}(\tilde{z}; k); k) = E[\tilde{z}; k],$$

найдем

(15.4) $$E[\tilde{z}; k] = \int\limits_0^{\tilde{z}} \mathrm{dn}^2(\sigma; k)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Введем функцию Якоби

(15.5) $$\mathrm{Zn}(\tilde{z}; k) = E[\tilde{z}; k] - \frac{E(k)}{\mathrm{K}(k)}\tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{z}} \left(\mathrm{dn}^2(\sigma; k) - \frac{E(k)}{\mathrm{K}(k)}\right) \mathrm{d}\sigma.$$

Полагая $\tilde{z} = \mathrm{K}(k)$ (15.2), найдем $\tilde{u} = \frac{\pi}{2}$,

(15.6) $$E[\mathrm{K}(k); k] = E\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = E(k),$$

где $\mathrm{K}(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Полагая $\tilde{z} = 0$, найдем с помощью (15.5), что $\mathrm{Zn}(0; k) = 0$.

В отличие от $E(\tilde{u}; k)$ функция $E[\tilde{z}; k]$ обладает теоремой сложения (хотя и не алгебраической, что для номографии никакого значения не имеет). Для получения этой теоремы с помощью принципа перенесения из теоремы сложения (15.7) главы II, нам придется, заменив слева в (15.7) z на $\tilde{z}$, т. е. согласно преобразованию (2.5) первой главы заменить справа x на $\tilde{x}$ и y на $-\varepsilon i\tilde{y}$.

Обозначим, согласно (1.1) этой главы, через $\tilde{s}_1$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{d}_1$ те же эллиптические функции Якоби, что раньше, но аргумента $\tilde{x}$ и модуля k и через $\tilde{s}_2$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{d}_2$ опять-таки прежние эллиптические функции Якоби, но аргумента $\tilde{y}$ и модуля k (не k', а k). Из естественного определения эллиптических функций Якоби для гауссова и двоичного аргумента вытекает

$$\operatorname{sn}(\varepsilon, \alpha) = \varepsilon \operatorname{sn}(\alpha; k), \ \operatorname{cn}(\varepsilon\alpha; k) = \operatorname{cn}(\alpha; k), \ \operatorname{dn}(\varepsilon\alpha; k) = \\ = \operatorname{dn}(\alpha; k),$$

$$\operatorname{sn}(-\varepsilon i\alpha; k) = -\varepsilon \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}, \ \operatorname{cn}(-\varepsilon i\alpha; k) = \\ = \frac{1}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}, \ \operatorname{dn}(-\varepsilon i\alpha; k) = \frac{\operatorname{dn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}, \tag{15.7}$$

где α вещественный аргумент.

Принимая во внимание (15.1), (15.7) и (15.4), легко найдем, что

$$\left\{\begin{aligned}
&E(\pm\varepsilon\alpha; k) = \pm\varepsilon E(\alpha; k), \ \mathbf{F}(\pm\varepsilon\alpha; k) = \pm\varepsilon\mathbf{F}(\alpha; k),\\
&E[\pm\varepsilon\alpha; k] = \pm\varepsilon E[\alpha; k], \ E[i\alpha; k] = i\int_0^\alpha \operatorname{dn}^2(i\sigma; k)\, d\sigma \equiv\\
&\equiv i\int_0^\alpha \frac{\operatorname{dn}^2(\sigma; k')}{\operatorname{cn}^2(\sigma; k')}\, d\sigma \equiv i\left[\alpha - E[\alpha\, k'] + \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')\operatorname{dn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}\right],\\
&E[-\varepsilon i\alpha; k] = -\varepsilon i\left\{\alpha - E[\alpha; k] + \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')\operatorname{dn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}\right\}\\
&\operatorname{Zn}(\varepsilon\alpha; k) = \varepsilon \operatorname{Zn}(\alpha; k), \ \operatorname{Zn}(-\varepsilon i\alpha; k) = +\varepsilon i\left\{\operatorname{Zn}(\alpha; k') + \right.\\
&\left. + \frac{\pi\alpha}{2K(k)\,K'(k')} - \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k')\operatorname{dn}(\alpha; k')}{\operatorname{cn}(\alpha; k')}\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{15.8}$$

Примняя теперь принцип перенесения (2.5) к теоремам сложения для функций $E[z; k]$ и $\operatorname{Zn}(z; k)$ (15.7), (15.5) второй главы, получим следующие теоремы сложения функций $E[\tilde{z}; k]$ и $\operatorname{Zn}(\tilde{z}; k)$ от двойного комплексного переменного

$$\left\{\begin{aligned}
&E[\tilde{z}; k] = E[\tilde{x}; k] - \frac{k^2\tilde{s}_1\tilde{c}_1\breve{d}_1\tilde{s}_2^2}{\tilde{c}_2^2 + \breve{d}_1^2\tilde{s}_2^2} + \varepsilon\left\{E[\tilde{y}; k] - \frac{\tilde{s}_2\breve{d}_2}{\tilde{c}_2} + \frac{\breve{d}_1^2\tilde{s}_2\breve{d}_2}{\tilde{c}_2^3 + \tilde{s}_2^2\tilde{c}_2\breve{d}_1^2}\right\},\\
&\operatorname{Zn}(\tilde{z}; k) = \operatorname{Zn}(\tilde{x}; k) - \frac{k^2\tilde{s}_1\tilde{c}_1\breve{d}_1\tilde{s}_2^2}{\tilde{c}_2^2 + \breve{d}_1^2\tilde{s}_2^2} + \varepsilon\left\{\operatorname{Zn}(\tilde{y}; k) - \frac{\tilde{s}_2\breve{d}_2}{\tilde{c}_2} + \frac{\breve{d}_1^2\tilde{s}_2\breve{d}_2}{\tilde{c}_2^3 + \tilde{s}_2^2\tilde{c}_2\breve{d}_1^2}\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{15.9}$$

Номограмма зависимости (15.2) строится на основании канонических представлений (2.2) этой главы, где надо только $\tilde{w}$ заменить согласно (15.2) на $\tilde{z}$ и $\tilde{z}$ на $\tilde{u}$. Для получения хорошей по своей конфигурации номограммы для (15.2) можно канонические представления (2.2) подвергнуть тому же самому проективному преобразованию, какому подвергались автором канони ческие представления (2.2) этой главы для получения опубликованной в работе [1] номограммы зависимости (2.1) второй главы, аналогичной зависимости (15.2) этого параграфа.

Чтоже касается зависимостей

$$(15.10) \qquad \tilde{w} = E[\tilde{z}; k], \quad \tilde{w} = \mathrm{Zn}\,(\tilde{z}; k),$$

то для них на основании (15.9) можно построить или ,,двойственно-изотермические, сетки (конечно, они не ортогональные в евклидовой плоскости) или номограммы с транспарантами.

Если надо по $\tilde{u}$ найти $E(\tilde{u}; k)$, то на основании (15.2) по соответствующей номограмме из выравненных точек для (15.2) находим $\tilde{z}$. По номограмме для первой из двух зависимостей (15.10) находим $\tilde{w}$ по $\tilde{z}$. На основании равенств (15.3) это и будет ответом. Для нахождения по $\tilde{w}$ значения $\tilde{u}$, сначала находим по $\tilde{w}$ значение $\tilde{z}$ по номограмме для первого из двух уравнений (15.10). Затем по номограмме из выравненных точек для (15.2) находим $\tilde{u}$ по $\tilde{z}$. На основании равенств (15.3) это и будет ответом.

§ 16. Канонические представления зависимости

$$(16.1) \qquad \tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{w}} \mathrm{cn}\,(\xi; k)\,\mathrm{d}\xi$$

получим, применив принцип перенесения к каноническим представлениям (16.4) второй главы. Получим

$$(16.1)\begin{cases}(+1)(\cos 2k\tilde{x}) + \left[\dfrac{1-\tilde{C}_1}{1+\tilde{C}_1}\right](\mathrm{ch}\, 2k\tilde{y}) + \left[-\dfrac{2\tilde{D}_1}{1+\tilde{C}_1}\right] = 0,\\[2ex] (+1)(\cos 2k\tilde{x}) + \left[\dfrac{1+\tilde{C}_2}{1-\tilde{C}_2}\right](\mathrm{ch}\, 2k\tilde{y}) + \left[\dfrac{2\tilde{D}_2}{\tilde{C}_2-1}\right] = 0.\end{cases}$$

Не переходя к удвоенным аргументам, имели бы вместо (16.1)

$$(16.2)\begin{cases}(+1)(\cos 2k\tilde{x}) + \left(\dfrac{s_1^2 d_1^2}{\tilde{c}_1^2}\right)(\mathrm{ch}\, 2k\tilde{y}) + \left[-\dfrac{\tilde{d}_1^2 - k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}{\tilde{c}_1^2}\right] = 0,\\[2ex] (+1)(\cos 2k\tilde{x}) + \left(\dfrac{\tilde{c}_2^2}{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2}\right)(\mathrm{ch}\, 2k\tilde{y}) + \left[-\dfrac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2 + k'^2\tilde{s}_2^2}{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2}\right] = 0.\end{cases}$$

§ 17. Канонические представления для интеграла

$$(17.1) \qquad \tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{w}} \mathrm{dn}\,(\xi;\, k)\,\mathrm{d}\xi$$

получим, применив принцип перенесения к каноническим представлениям (17.2) второй главы. Получим

$$(17.2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(+1)(\cos 2k\tilde{x}) + \left[\frac{k^2\tilde{S}_1^2}{(1+\tilde{D}_1)^2}\right](\mathrm{ch}\, 2\tilde{y}) + \\ &+ \left[-\frac{2\tilde{C}_1(k'^2 + \tilde{D}_1 + k^2\tilde{C}_1)(1+\tilde{C}_1)}{(1+\tilde{D}_1)^2\,(\tilde{D}_1 + \tilde{C}_1)}\right] = 0, \\ &(+1)(\cos 2\tilde{x}) + \left[\frac{(1+\tilde{D}_2^2)^2}{k^2\tilde{S}_2^2}\right](\mathrm{ch}\, 2\tilde{y}) + \\ &+ \left[\frac{2\tilde{C}_2(k^2\tilde{C}_2 + \tilde{D}_2 + k'^2)}{k^2(\tilde{C}_2 - 1)(\tilde{C}_2 + \tilde{D}_2)}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

§ 18. После того как в § 18 второй главы найдены канонические представления для (18.1), с помощью принципа перенесения из них будут получены канонические представления для зависимости

$$(18.1) \qquad \tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{w}} \mathrm{sn}\,(\xi;\, k)\,\mathrm{d}\xi.$$

Однако, можно избрать принципиально иной путь.

Равенство, (18.1) и, следовательно, и (18.8), второй главы подвергаются преобразованию принципа перенесения (2.5) первой главы.

Имеем

$$(18.2) \qquad \begin{aligned} &ikz - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'} = ikx - y - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'} = \\ &= -yk + i\left(kx - \mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}\right) \to -\tilde{y}k + \varepsilon\left(k\tilde{x} - \mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}\right) = \\ &= k(-\tilde{y} + \varepsilon\tilde{x}) - \varepsilon\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'} = \varepsilon k(\tilde{x} - \varepsilon\tilde{y}) + \varepsilon\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(18.3) \qquad ikw + ik\mathrm{K}(k) \to \varepsilon k(\tilde{p} - \varepsilon\tilde{q}) + \varepsilon k\mathrm{K}(k).$$

Зависимость (18.1) второй главы примет вид (18.1) настоящей главы. А зависимость (18.8) второй главы примет вид

$$(18.4)\quad \sin\left[\varepsilon k(\tilde{x}-\varepsilon\tilde{y})-\varepsilon\,\mathrm{Arsh}\frac{k}{k'}\right]=\mathrm{sn}\left[\varepsilon k(\tilde{p}-\varepsilon\tilde{q})+\varepsilon k\mathrm{K}(k);\ \frac{ik'}{k}\right]$$

При этом модуль в преобразовании перенесения не участвует (клиффордизация только по одному аргументу z). Соотношение (18.4) отождествляется с первым соотношением (2.1) этой главы.

Канонические представления для (18.4), а, следовательно, и для (18.1) это главы, получаются автоматически из (2.2) этой главы, заменив $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, k, k' в (2.2) на соответственно

$$-k\tilde{y},\ k\tilde{x}-\mathrm{Arsh}\frac{k}{k'},\ -k\tilde{q},\ k\tilde{p}+kE\mathrm{K}(k),\frac{ik'}{k},\ \frac{1}{k}.$$

Однако формулы (18.2) и (18.3) встречают возражения, т. к. они частью получены преобразованием перенесения, а частью автоматической заменой i на ε.

О необходимости осторожности говорит следующий пример. Имеем тождество

$$(18.5)\qquad \mathrm{ch}\,w=\cos(iw)$$

или

$$(18.6)\qquad \mathrm{ch}\,w=\cos(-q+pi).$$

Применяя преобразование перенесения (2.5) главы I, получим, заменяя $p\to\tilde{p}$, $q\to-\varepsilon i\tilde{q}$, правильное равенство

$$(18.7)\qquad \mathrm{ch}\,\tilde{w}=\cos(\varepsilon i\tilde{q}+i\tilde{p}).$$

А если бы заменили в (18.6), судя по правой части (18.5)

$$(18.8)\qquad -q\to\tilde{q},\ p\to-\varepsilon i\tilde{p},$$

то получили бы

$$(18.9)\qquad \mathrm{ch}\,(-\varepsilon i\tilde{p}-\tilde{q}i)=\cos(\tilde{q}+\varepsilon\tilde{p}),$$

что тоже правильно.

Но, если бы в (18.5) автоматически i заменить на ε, получили бы неправильный результат:

$$(18.10)\qquad \mathrm{ch}\,(p+q\varepsilon)=\cos(\varepsilon(p+q\varepsilon)).$$

Так что механически менять i на ε нельзя.

Но с другой стороны, если

$$\frac{\sin(zi)}{i} = \operatorname{sh} z \tag{18.11}$$

заменить z на $\tilde{z}$, то получим

$$\frac{\sin(\tilde{z}i)}{i} = \operatorname{sh} \tilde{z} \tag{18.12}$$

правильное равенство.

Но, если и i заменить на ε, то

$$\frac{\sin(\tilde{z}\varepsilon)}{\varepsilon} = \operatorname{sh} \tilde{z}, \tag{18.13}$$

то уже неверно, т. к.

$$\frac{\sin(\tilde{z}\varepsilon)}{\varepsilon} = \sin \tilde{z}. \tag{18.14}$$

Но, поскольку

$$zi = xi - y, \tag{18.15}$$

то

$$\frac{\sin(zi)}{i} = \frac{\sin(xi - y)}{i} \to \frac{\sin(x\varepsilon - y)}{\varepsilon} \tag{18.16}$$

и получаем опять-таки неверное соотношение, что

$$\frac{\sin(x\varepsilon - y)}{\varepsilon} = \operatorname{sh} \tilde{z}. \tag{18.17}$$

Все это говорит о том, что единственным законным преобразованием является преобразование (2.5) или его обобщения, рассмотренные в первой главе.

$$i(x + yi) = ix - y \tag{18.18}$$

при замене $x \to \tilde{x}$, $y \to -\varepsilon i y$ превращается в

$$i(\tilde{x} + \varepsilon\tilde{y}) = ix + i\varepsilon\tilde{y} \tag{18.19}$$

что верно. Но, если i менять на ε, то получим неверный результат

$$\varepsilon(x + \varepsilon y) = \varepsilon x - y. \tag{18.20}$$

Поэтому *априори* законное преобразование равенства (18.8) главы II заключается в замене, согласно преобразованию перенесения (2.5) первой главы

$$(18.21) \qquad ikz - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'} \to ik\tilde{z} - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}\Big),$$

$$(18.22) \qquad ikw + ik\mathrm{K}(k) \to ik\tilde{w} + ik\mathrm{K}(k).$$

Получаем вместо (18.4)

$$(18.23) \qquad \sin\left(ik\tilde{z} - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}\right) = \mathrm{sn}\left(ik\tilde{w} + ik\mathrm{K}(k);\ \frac{ik'}{k}\right).$$

Вхождение и i и ε не является препятствием для использования результатов § 2 второй главы или § 2 этой главы.

Как мы уже знаем гарантированный от ошибок путь перехода от канонических представлений зависимости (18.1) главы II к каноническим представлениям зависимости (18.1) настоящей главы заключается в том, чтобы канонические представления для (18.1) главы II подвергнуть преобразованию перенесения (2.5) первой главы. Что же касается использования канонических представлений (2.2) настоящей главы путем отождествления зависимостей с первой зависимостью (2.1), то на первый взгляд кажется, что это было бы возможно лишь в том случае, если бы (18.23) не содержало i.

На самом же деле это не так (другой пример см. (3.3_2) этой главы). Сделаем этим, а потом первым способом. Имеем из (18.23)

$$(18.24) \qquad ik\tilde{w} + ikK(k) = \int\limits_0^{ik\tilde{z} - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ik'}{k}\right)^2 \sin^2\xi}},$$

что отождествляется с третьим соотношением (2.1) этой главы. Остается теперь в (2.2) этой главы заменить $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{x}, \tilde{y}, k$ на соответственно $ik\tilde{p} + ikK(k)$, $ik\tilde{q}$, $ik\tilde{x} - i\,\mathrm{Arsh}\,\frac{k}{k'}$, $ik\tilde{y}$, $\frac{ik'}{k}$. Поскольку канонические представления (2.2) сохраняют после этой замены свою вещественность, мы получаем канонические представления зависимости (18.1) этой главы. Проверяется это сохранение вещественности в ходе самого преобразования перехода.

При этой замене в (2.2) как легко видеть, $\cos 2\tilde{x}$ заменится на $\dfrac{e^{2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon}+e^{-2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}$, где $\varepsilon=\pm 1$; $\cos 2\tilde{y}$ заменится на $\operatorname{ch} 2k\tilde{y}$;

$$\frac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2} \text{ заменится на } \frac{1}{k'^2}\frac{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}{\tilde{s}_1^2},$$

где аргументом служит $\tilde{p}$ и модулем k;

$$\frac{\tilde{d}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2} \text{ заменится на } \frac{1}{k'^2}\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{\tilde{s}_2^2},$$

$$\frac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2-\tilde{c}_1^2}{\tilde{d}_1^2} \text{ заменится на } -\frac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2+\tilde{d}_1^2}{k'^2\tilde{s}_1^2},$$

где аргументом служит $\tilde{p}$ и модулем k;

$$\frac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2-\tilde{c}_2^2}{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2} \text{ заменится на } -\frac{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2+\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2},$$

где аргументом служит $\tilde{q}$ и модулем k.

Следовательно, канонические представления для (18.1), согласно (2.2) этой главы, примут вид:

$$(18.25_1)\qquad (+1)\left[\frac{e^{2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon}+e^{-2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}\right]+ \\ +\left(\frac{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}{k'^2\tilde{s}_1^2}\right)(\operatorname{ch} 2k\tilde{y})+\left[-\frac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2+\tilde{d}_1^2}{k'^2\tilde{s}_1^2}\right]=0$$

(где в согласии с принятыми обозначениями, аргумент и модуль всех эллиптических функций суть $\tilde{p}$ и k;

$$(18.25_2)\qquad (+1)\left[\frac{e^{2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon}+e^{-2k\tilde{x}}\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}\right]+ \\ +\left(\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right)(\operatorname{ch} 2k\tilde{y})+\left[-\frac{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2+\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right]=0,$$

где в согласии с принятыми обозначениями аргумент и модуль всех эллиптических функций суть $\tilde{q}$ и k.

В полученных канонических представлениях $\varepsilon = \pm 1$. Без ущерба для общности можно взать $\varepsilon = +1$.

Примем

(18.26) $$k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 = 1 - k^2\tilde{s}_1^4, \quad k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2 + \tilde{d}_2^2 = 1 - k^2\tilde{s}_2^4.$$

Канонические представления для (18.4) настоящей (третьей) главы можно, как указано выше, получить и непосредственно из канонических представлений (18.10) для (18.1) второй главы, применив к ним принцип перенесения (2.5). Получим, переставляя (18.10_2) и (18.10_1) второй главы и деля обе части (18.10_2) на $\dfrac{k'^2s_1^2}{c_1^2d_1^2}$, в точности (18.25_1) этой главы.

Заменив в (18.10_1) второй главы $\dfrac{k^2s_2^2 - c_2^2d_2^2}{d_2^2}$ на $-\dfrac{k^2s_2^2c_2^2 + d_2^2}{c_2^2d_2^2}$ $(iq;\, k)$ и $\dfrac{k'^2s_2^2c_2^2}{d_2^2}$ на $\dfrac{k's_2^2}{c_2^2d_2^2}$ $(iq;\, k)$ и разделив обе части получившегося, таким образом, из (18.10_1) второй главы равенства на $\dfrac{k'^2s_2^2}{c_2^2d_2^2}$ $(iq;\, k)$ и применив затем принцип перенесения, получим в точности равенство (18.25_2) этой главы.

§ 19. Можно вполне аналогично исходить из (19.4) главы II, применив принцип перенесения к зависимости (19.4), отождествляя её затем с одной из зависимостей (2.1) этой главы и получив каноническое представление для преобразованной зависимости (19.4), а, следовательно, и для (18.1), из канонических представлений (2.2) зависимости (2.1) этой главы.

§ 20. Можно совершенно аналогично поступить с (20.7), а затем, отождествив преобразованную зависимость (20.7) с (2.1) этой главы, вывести канонические представления для (20.7), а, значит, и для (18.1) этой главы, являющейся преобразованием перенесения зависимости (18.1) второй главы, с помощью опять-так канонических представлений (2.2) зависимости (2.1) этой главы.

§ 21. Канонические представления для зависимостей

(21.1) $$\tilde{z} = \int_0^{\tilde{w}} \frac{d\xi}{\operatorname{sn}(\xi;\, k)}, \quad \tilde{z} = \int_0^{\tilde{w}} \frac{d\xi}{\operatorname{cn}(\xi;\, k)}, \quad \tilde{z} = \int_0^{\tilde{w}} \frac{d\xi}{\operatorname{dn}(\xi;\, k)}$$

можно получить из канонических представлений зависимостей (21.1) предыдущей главы, применив к ним принцип перенесения.

Но можно сделать это и независимо от канонических представлений главы II, применяя принцип перенесения к тождествам (7.4) главы II. При этом ещё надо применить принцип перенесения к тождествам (2.1) работы [5] и к аналогичным тождествам (18.5) предыдущей главы.

Более обще возникает задача получения при помощи принципа перенесения из всех формул теории эллиптических функций гауссова комплексного аргумента всех формул теории эллиптических функций двойного комплексного аргумента Клиффорда, причем выполнить это, применяя клиффордизацию только к аргументу, а затем и к модулю и к аргументу елиптической функции.

Объём статьи заставляет нас по крайней мере возложить это на читателя, в той мере, в какой это нужно для получения канонических представлений остальных интегралов от функций Якоби — Глешера от двойного комплексного аргумента, *независимо от канонических представлений* главы II соответствующих интегралов от функций Якоби-Глешера от гауссова комплексного аргумента, но, используя, конечно, канонические представления настоиящей главы (2.2) [или (17.2)] и (3.4). Для осуществления этого здесь дано все, что нужно. Однако, получение канонических представлений для зависимостей между двойными переменными, не используя канонических представлений для соответствующих им, согласно принципу перенесения, зависимостей гауссова комплексного переменного требует, как сейчас увидим, осторожности.

Рассмотрим

$$\tilde{z} = \int\limits_0^{\tilde{w}} \frac{\mathrm{cn}\,[\xi;\, k]}{\mathrm{dn}\,[\xi;\, k]}\, \mathrm{d}\xi. \tag{21.2}$$

(Заметим, что все 6 случаев типа (21.2) приводятся к случаю (21.1) и им аналогичным при помощи преобразований (15.7).)

Применяя принцип перенесения к соотношению (21.4) второй главы, получим

$$\mathrm{th}\,(k\tilde{z}) = \mathrm{sn}\left(k\tilde{w};\, \frac{1}{k}\right), \tag{21.3}$$

а применяя этот принцип к соотвеношению (21.2) второй главы, получим 21.2 этой главы.

Канонические представление для (21.2), поскольку (21.3) отождествляется с первой зависимостью (3.3) этой главы получаются путем замены в (3.4) $\tilde{p}_1$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{p}_k$, $\tilde{q}_k$, k, k' на соответственно $k\tilde{x}$, $k\tilde{y}$, $k\tilde{p}$, $k\tilde{q}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$ с последующим переходом в них от эллиптических функций мнимого модуля $\frac{ik'}{k}$ к вещественному модулю k, а потом через мнимое преобразование Якоби к модулю k' при помощи равенств типа $\operatorname{sn}\left(u;\ \frac{ik}{k}\right) = ksd\left(\frac{u}{k};\ k'\right)$ и т. д.

Но, если бы мы вместо того, чтобы исходить из (3.3) и (3.4) настоящей главы отправились бы от (3.3′) и (3.4′) настоящей главы, мы бы, как покажем, получили бы неправильный результат. Неправильный потому, что он будет отливаться от того априори правильного результата, к которому придем, прямо применив принцип перенесения (2.5) первой главы к зависимости (21.2) и к соответствующим этой зависимости каноническим представлениям (21.4) второй главы; убедимся в этом.

Выполним это, ошибочно отправляясь от (3.3′) и (3.4′) настоящей главы, сделав правильную замену $\tilde{p}_1$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{p}_k$, $\tilde{q}_k$, k, k' на $k\tilde{x}$, $k\tilde{y}$, $k\tilde{p}_k$, $k\tilde{q}_k$, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$. Тогда

$\cos 2\tilde{q}_1$ заменится на $\cos(2k\tilde{y})$,

$\cos 2\tilde{p}_1$ заменится на $\cos(2\,k\tilde{x})$,

$\frac{k'^2\underline{\tilde{s}}_2^2\underline{\tilde{c}}_2^2}{\underline{\tilde{d}}_2^2}$ заменится на $-k^2\frac{\underline{\tilde{s}}_2^2\underline{\tilde{c}}_2^2}{\underline{\tilde{d}}_2^2}$,

где аргументом служит $\tilde{q}$, а модулем k' а не k;

$\frac{\underline{d}_1^2}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\tilde{c}_1^2}$ заменится на $-\frac{1}{k'^2}\frac{\tilde{d}_1^2}{\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2}$,

где аргументом служит $\tilde{p}$, а модулем k', а не k;

$$\frac{\underline{\tilde{s}}_2^2\underline{\tilde{d}}_2^2 - \underline{\tilde{c}}_2^2}{\underline{\tilde{d}}_2^2} \text{ заменится на } \frac{k^2\underline{\tilde{s}}_2^2 - \underline{\tilde{c}}_2^2\underline{\tilde{d}}_2^2}{\underline{\tilde{d}}_2^2} \equiv \frac{k^2\underline{\tilde{s}}_2^4 - \underline{\tilde{c}}_2^4}{\underline{\tilde{d}}_2^2},$$

где аргументом служит $\tilde{q}$, а модулем k', а не k;

$$\frac{k^2\underline{\tilde{s}}_1^4 - \underline{\tilde{c}}_1^4}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2} \equiv \frac{\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{d}}_1^2 - \underline{\tilde{c}}_1^2}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2} \text{ заменится на } \frac{k^2\underline{\bar{s}}_1^4 - \underline{\bar{c}}_1^4}{k'^2\underline{\bar{s}}_1^2{}_{\underline{1}}^{2}} \equiv \frac{k^2\underline{\tilde{s}}_1^2 - \underline{\tilde{c}}_1^2\underline{\tilde{d}}}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2},$$

где аргументом служит $\tilde{p}$, а модулем k', а не k.

Канонические представления (3.4′) главы III примут вид

$$(21.4_1)\qquad (+1)[\cos(2k\tilde{y})]+\left(-k^2\frac{\underline{\tilde{s}}_2^2\underline{\tilde{c}}_2^2}{\underline{d}_2^2}\right)[\cos(2k\tilde{x})]+ + \left(\frac{k^2\underline{\tilde{s}}_2^2-\underline{\tilde{c}}_2^2\underline{\tilde{d}}_2^2}{\underline{\tilde{d}}_2^2}\right)=0,$$

где в эллиптических функциях аргументом и модулем служат $\tilde{q}$ и k', а не k;

$$(21.4_2)\qquad (+1)[\cos(2k\tilde{y})]+\left(-\frac{1}{k'^2}\frac{\tilde{d}_1^2}{\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2}\right)\cos(2k\tilde{x})]+ + \left(\frac{k^2\underline{\tilde{s}}_1^2-\underline{\tilde{c}}_1^2\underline{\tilde{d}}_1^2}{k'^2\underline{\tilde{s}}_1^2\underline{\tilde{c}}_1^2}\right)=0,$$

$$k^2\underline{\tilde{s}}_1^2-\underline{\tilde{c}}_1^2\tilde{d}_1^2=k^2\tilde{s}_1^4-\underline{\tilde{c}}_1^4,\quad k^2\underline{\tilde{s}}_2^2-\underline{\tilde{c}}_2^2=k^2\underline{\tilde{s}}_2^4-\underline{\tilde{c}}_2^4$$

где в эллиптических функциях аргументом и модулем служат $\tilde{p}$ и k', а не k.

Таким образом, каноническими представлениями для зависимости (21.2) при этом являются вещественные уравнения (22.4).

На первый взгляд мы нашли канонические представления зависимости (21.2), связывающей двойные комплексные аргументы клиффорда, не опираясь при этом на канонические представления зависимости соответствующей по принципу перенесения (2.5) первой главы зависимости (21.2) второй главы, связывающей гауссовы комплексные аргументы. Но, если уже известны эти последние канонические представления, то гораздо проще было бы применить к ним принцип перенесения (2.5) и сразу получить из них канонические представления для (21.2) настоящей главы. Сделаем это, обнаружив тем самым ошибку, заключащуюся в использовании (3.3′) и (3.4′) вместо использования (3.3) и (3.4). Во второй главе мы нашли для зависимости (21.2) второй главы канонические представления (21.4) второй главы. Применяя прямой принцип перенесения (2.5) первой главы к равенствам (21.2) и (21.4) второй главы, получим соответственно равенства (21.2) настоящей главы и заведомо правильные канонические представления зависимости (21.2) настоящей главы. Но верны ли полученные выше канонические представления (21.4). Последнее проверить не тривиально, поскольку в канонических представлениях (21.4) второй главы модулем эллиптических функций служит k' в (21.4_1) и k в (21.4_2), а в канонических представлениях (21.4) настоящей главы модулем эллиптических функций служит k' в обоих представлениях (21.4_1) и (21.4_2) настоящей третьей главы.

В результате применения принципа перенесения (2.5) первой главы к (21.4) второй главы получаем:

$$\cos(2ky) \to \operatorname{ch}(2k\tilde{y}); \quad \operatorname{ch}(2kx) \to \operatorname{ch}(2k\tilde{x})^{1)};$$

$$\left(-k'^2 \frac{s_2^2 c_2^2}{d_2^2}\right) \to \left(\frac{k'^2 \tilde{s}_2^2}{\tilde{c}_2^2 \tilde{d}_2^2}\right),$$

где аргументом и модулем служит $\tilde{q}$ и модулем k;

$$\left(\frac{1}{k'^2} \frac{c_1^2 d_1^2}{s_1^2}\right) \to \frac{1}{k'^2} \frac{\tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2}{\tilde{s}_1^2},$$

где аргументом и модулем служит $\tilde{p}$ и k,

$$\frac{k^2 s_2^2 - c_2^2 d_2^2}{d_2^2} \equiv \frac{k^2 s_2^4 - c_2^4}{d_2^2} \to -\frac{k^2 \tilde{s}_2^2 \tilde{c}_2^2 + \tilde{d}_2^2}{\tilde{c}_2^2 \tilde{d}_2^2} \equiv \frac{k^2 \tilde{s}_2^4 - 1}{\tilde{c}_2^2 \tilde{d}_2^2}$$

с аргументом $\tilde{q}$ и модулем k;

$$-\frac{k^2 s_1^2 c_1^2 + d_1^2}{k'^2 s_1^2} \equiv \frac{k^2 s_1^4 - 1}{k'^2 s_1^2} \to -\frac{k^2 \tilde{s}_1^2 \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2}{k'^2 \tilde{s}_1^2} \equiv \frac{k^2 \tilde{s}_1^4 - 1}{k'^2 \tilde{s}_1^2}$$

с аргументом $\tilde{p}$ и модулем k.

С помощью (21.4) главы II получаем теперь следующие канонические представления зависимости (21.2) настоящей III главы.

$$(21.5)_1 \quad (+1)(\operatorname{ch}(2k\tilde{y})) + \left(\frac{k'^2 \tilde{s}_2^2}{\tilde{c}_2^2 \tilde{d}_2^2}\right)(\operatorname{ch}(2kx)) + \left(\frac{k^2 \tilde{s}_2^4 - 1}{\tilde{c}_2^2 \tilde{d}_2^2}\right) = 0,$$

$$(21.5_2) \quad (+1)(\operatorname{ch}(2k\tilde{y})) + \left(\frac{1}{k'^2} \frac{\tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2}{\tilde{s}_1^2}\right)(\operatorname{ch}(2k\tilde{x})) + \left(\frac{k^2 \tilde{s}_1^4 - 1}{k'^2 \tilde{s}_1^2}\right) = 0.$$

Мы видим, что (21.4) резко отличается от (21.5). Следовательно, (21.4) неверно. Будем теперь исходить из (3.3) и (3.4), применив преобразование

$$(21.6) \qquad \tilde{w}_1 \to k\tilde{z}, \quad \tilde{w}_k \to k\tilde{w}, \quad k \to \frac{1}{k}, \quad k' \to \frac{ik'}{k},$$

$$\tilde{p}_1 \to k\tilde{x}, \quad \tilde{q}_1 \to k\tilde{y}, \quad \tilde{p}_k \to k\tilde{p}_k, \quad \tilde{q}_k \to k\tilde{q}_k; \quad k \to \frac{1}{k}, \quad k' \to \frac{ik'}{k}.$$

---

1) Уже здесь обнаруживается неверность канонических представлений (21.4).

При этом первая (а, значит, и остальные) зависимости (3.3) настоящей главы очевидно превращается в (21.3) настоящей главы. А тем самым, в результате преобразования (21.6), последняя зависимость (3.3) превращается в зависимость (21.2), т. е.

$$(21.7)\qquad ik\tilde{w} = \int_0^{ik\tilde{z}} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\frac{k'^2}{k^2}\sin^2\xi}}$$

имеет своим следствием (21.2).

Проверим это. Из (21.7) получаем

$$(21.8)\qquad \sin(ik\tilde{z}) = \operatorname{sn}\left(ik\tilde{w};\ \frac{ik'}{k}\right).$$

Отсюда

$$(21.8')\qquad \cos(ik\tilde{z}) = \operatorname{cn}\left(ik\tilde{w};\ \frac{ik}{k}\right).$$

Значит

$$(21.8'')\qquad \operatorname{tg}(ik\tilde{z}) = \operatorname{th}\left(ik\tilde{w};\ \frac{ik'}{k}\right).$$

Но

$$(21.8''')\quad \operatorname{tg}(ik\tilde{z}) \equiv i\operatorname{th}(k\tilde{z}),\ \operatorname{tn}\left(ik\tilde{w};\ \frac{ik'}{k}\right) \equiv +ik\operatorname{sn}(\tilde{w};\ k) \equiv i\operatorname{sn}\left(k\tilde{w};\ \frac{1}{k}\right)$$

Таким образом,

$$(21.3)\qquad \operatorname{th}(k\tilde{z}) = \operatorname{sn}\left(k\tilde{w};\ \frac{1}{k}\right),$$

что и требовалось доказать.

Приступим к преобразованию канонических представлений (3.4) с помощью преобразования (21.6). Это, конечно, не преобразование перенесения, поскольку мы здесь не совершаем перехода от гауссовых аргументов к клиффордовым (или наоборот).

Имеем:

$$\operatorname{ch}(2\tilde{p}_1) \text{ заменится на } \operatorname{ch}(2k\tilde{x});$$

$$\operatorname{ch}(2\tilde{q}_1) \text{ заменится на } \operatorname{ch}(2\,k\tilde{y});$$

$$\left(-\frac{k'^2\tilde{s}_1^2}{c_1^2\tilde{d}_1^2}\right) \text{ заменится на } \left(k'^2\frac{\tilde{s}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right),$$

где аргументом служит $\tilde{p}$, а модулем k;

$$\left(-\frac{\tilde{s}_1^2\tilde{d}_1^2+\tilde{c}_1^2}{c_1^2\tilde{d}_1^2}\right)\equiv\left(\frac{k^2\tilde{s}_1^4-1}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right) \text{ заменится на } \left(-\frac{k^2\tilde{s}_1^2\tilde{c}_1^2+\tilde{d}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right)\equiv$$
$$\equiv\frac{k^2\tilde{s}_1^4-1}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2},$$

где аргументом служат $\tilde{p}$, а модулем k;

$$\left(-\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right) \text{ заменится на } \frac{1}{k'^2}\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{\tilde{s}_2^2},$$

где аргументом служит $\tilde{q}$, а модулем k;

$$\frac{\tilde{s}_2^2\tilde{d}_2^2+\tilde{c}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\equiv\frac{1-k^2\tilde{s}_2^4}{k'^2\tilde{s}_2^2} \text{ заменится на } -\frac{k^2\tilde{s}_2^2\tilde{c}_2^2+\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\equiv\frac{k^2\tilde{s}_2^4-1}{k'^2\tilde{s}_2^2},$$

где аргументом служит $\tilde{q}$, а модулем k.

Таким образом, в результате преобразования (21.6) канонические представления для зависимости (21.2) согласно (3.4) настоящей главы, примут вид

$$(21.8_1)\quad (+1)(\operatorname{ch}(2k\tilde{x}))+\left(\frac{k'^2\tilde{s}_1^2}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right)(\operatorname{ch}(2k\tilde{y}))+\left(\frac{k^2\tilde{s}_1^4-1}{\tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2}\right)=0,$$

где аргументом и модулем в эллиптических функциях служат $\tilde{p}$ и k;

$$(21.8_2)\quad (+1)(\operatorname{ch}(2k\tilde{x}))+\left(\frac{\tilde{c}_2^2\tilde{d}_2^2}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right)(\operatorname{ch}(2k\tilde{y}))+\left(\frac{k^2s_2^4-1}{k'^2\tilde{s}_2^2}\right)=0,$$

где аргументом и модулем в эллиптических функциях служат $\tilde{q}$ и k. Легко проверить, что (21.5_1) с точностью до множителя отличного от тождественного нуля, совпадает с (21.8_2), а (21.5_2) совпадает с (21.8_1) с точностью до множителя также отличного от тождественного нуля.

Итак, каноническими представлениями для (21.2) служат (21.5) или что то же самое (21.8).

Причина ошибки заключается в том, что (3.3′) не эквивадентно форме (21.3) в отличие от (3.3_2), которое, будучи эквивалентно (3.3_1), может быть использовано на законном основании для получения канонических представлений для (21.3) и, следовательно, для (21.2). Поэтому (21.3) нельзя было отождествлять с (3.3′), а следовательно, соответственно и канонические представления для (21.3) и, следовательно, для (21.2) не могут быть отождествлены с каноническими представлениями (3.4′) для зависимости (3.3′).

Нетрудно указать ту аналитическую зависимость между $\tilde{w}_k$ и $\tilde{w}_1$, каноническими представлениями которой служат представления (21.4). Поскольку последние получены из (3.4′), соответствующих зависимости (3.3′) в результате замены в (3.4′) p_1, $\tilde{q}_1$, $\tilde{p}_k$, $\tilde{q}_k$, k, k' на $k\tilde{x}$, $k\tilde{y}$, $k\tilde{p}_k$, $k\tilde{q}_k$, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$, то достаточно выполнить эту замену в (3.3′), чтобы получить искомую зависимость, правильными каноническими представлениями, которой служат представления (21.4). Найдем

$$\varepsilon k\tilde{w}_k = \int\limits_0^{\varepsilon k\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\frac{k'^2}{k^2}\sin^2\xi}}, \quad \operatorname{sn}\left(\varepsilon k\tilde{w}_k; \frac{ik'}{k}\right) = \sin(\varepsilon k\tilde{w}_1)$$

или после простой замены переменных в интеграле:

$$k\tilde{w}_k = \int\limits_0^{k\tilde{w}_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\frac{k'^2}{k^2}\sin^2\xi}}, \quad \operatorname{sn}\left(k\tilde{w}_k; \frac{ik'}{k}\right) = \sin(k\tilde{w}_1) \quad (21.9)$$

(сравнить с (21.7)).

Мы видим, что эта зависимость вовсе не имеет формы (21.3) или (21.7).

§ 22. Сделаем еще ссылку на работу [16] в интересах читателя, который пожелает применить найденные канонические представления для построения циркульных номограмм Герсеванова или номограмм с угольным крестообразным транспорантом (или, наконец, для численного табулирования всех рассмотренных функций в комплексной области).

Практически важно отметить, что в полученных канонических представлениях модуль „k„ ограничен лишь требованием вещественности (после сокращений обоих частей уравнений) канонических представлений. Тем более охвачен случай $-\infty < k^2 < +\infty$. Но при пользовании таблицами случаи „k„ чисто мнимого и „k„ $\geqq 1$ придется приводить к табулированкомы случаю $0 \leqq k \leqq 1$ при помощи известных формул модулярому преобразований первой степени для эллиптических функций и целесообразно строить универсальные глобусные ноноцеаммы [1], [4]. Поставим задачу выяснить какие анаморфозирующие числовые множители должны быть введены в гауссовой области (глава ее), если модуль ,,k,, описывает лемнискату Берулли, найденную автором в работе [5] и каков эквивалент этих анаморфозирующих множителей и лемнискаты в случае калиффордовой области.