Archivum Mathematicum

Iosif Aleksandrovič Vil′ner

Принцип перенесения и номографирование в вещественной проективной плоскости функций одного комплексного дуального переменного Штуди и двойного переменного Клиффорда. I.

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 2, 101--152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104587

ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ И НОМОГРАФИРОВАНИЕ В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ДУАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ШТУДИ И ДВОЙНОГО ПЕРЕМЕННОГО КЛИФФОРДА[1])

И. А. Вильнер, Москва

(Поступило в редакцию 6-ого июля 1964 г.)

ЧАСТЬ I.

В первой части работы, публикация которой задержалась из-за объема и связанных с ним многочисленных переработок, сокращений и разделений, сжато излагается принцип перенесения [14] и его применения для доказательства того, что теория и практика номографирования функций комплексного переменного Клиффорда по существу содержится в данной автором теории номографирования функции Гауссова аргумента, причем в первой части работы рассматриваются лишь неэлементарные функции.

Во второй части работы будет дано обоснование принципа перенесения, его применение к номографированию элементарных функций и будет дана алгебра и геометрия совместных преобразовамий пар вещественных уравнений, равносильных номографируемой функции клиффордова аргумента, к совместно номографируемым каноническим формам.

ГЛАВА I. ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ

§ I. В работах [1], [2] и во второй главе работы [3] автором введены мнимые номограммы в следующих комплексных проективных плоскостях, содержащих в себе и вещественную проективную плоскость, а вместе с ней и обычные вещественные номограммы из выравненных точек.

1. Проективная плоскость над полем гауссовых (гиперболических) комплексных чисел $x + iy$, $i^2 = -1$ для номографиро-

---

[1]) Доложена на IV Всесоюзном математическом съезде [14]. Эта статья является первой частью работы. Вторая часть по техническим соображениям будет опубликована в следующем номере.

вания зависимостей вида $f(z_1; z_2; z_3) = 0$ между тремя гауссовыми комплексными переменными z_1, z_2, z_3.

2. Проективная плоскость над алгеброй дуальных (параболических) чисел Штуди $\tilde{\tilde{x}} + \omega\tilde{\tilde{y}}$, $\omega^2 = 0$ для номографирования зависимостей между тремя дуальными комплексными переменными $\tilde{\tilde{z}}_1, \tilde{\tilde{z}}_2, \tilde{\tilde{z}}_3$.

3. Проективная плоскость над алгеброй двойных комплексных (эллиптических) чисел Клиффорда $\tilde{x} + \varepsilon\tilde{y}$, $\varepsilon^2 = +1$ для номографирования зависимостей между тремя двойными комплексными переменными.

Для всех этих трёх комплексных проективных плоскостей и комплексных (мнимых) номограмм в них имеются вещественные топологически эквивалентные им линейчатые образы в четырехмерном пространстве вещественных и надлежащим образом [2], [3], [7], идентифицированных прямых вещественного трехмерного индентивного прострасntва.

Получаем три комплексные геометрии и соответственно три комплексные номографии в вещественных объектах.

В цитированных работах [1], [2], [3] в принципе изложены свойства этих комплексных номографий. Поэтому не будем повторять содержание этих работ.

Что же касается вещественных номографий функций одного гауссова, одного дуального (штудиева) или одного двойного (клиффордова) комплексного аргумента, то все первые функции тривиально номографируемы (см. вторую главу работы [3]), а теория номографирования функций двойного комплексного аргумента, как показал автор, по существу заключается в теории номографирования функций одного гауссова комплексного аргумента вещественными номограммами из выравненных точек, чему посвящен ряд работ автора.

А именно, теория вещественного номографирования функций одного двойного комплексного аргумента связана с теорией вещественного номографирования функций одного гауссова комплексного аргумента при помощи изложенного ниже в § 2 *принципа перенесения*, полученного автором и доложенного на IV Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в 1961 г.

§ 2. Приведем три теоремы, в совокупности, образующие принцип перенесения. Любая моногенная функция $\tilde{w} = \tilde{u} + \varepsilon\tilde{v}$

$$\tilde{w} = F(\tilde{z}) \tag{2.1}$$

двойного аргумента $\tilde{z} = \tilde{x} + \varepsilon\tilde{y}$, $\varepsilon^2 = +1$, номографируемая с двумя выравниваниями на номограмме с четырьмя параллельными и прямолинейными шкалами.

Доказательство непосредственно вытекает из любого из равносильных тождеств

$$(\varepsilon_1 = (1+\varepsilon)/2, \qquad \varepsilon_2 = (1-\varepsilon)/2)$$

$$F(\tilde{z}) = \frac{F(\tilde{x}+\tilde{y}) + F(\tilde{x}-\tilde{y})}{2} + \varepsilon \frac{F(\tilde{x}+\tilde{y}) - F(\tilde{x}-\tilde{y})}{2}, \tag{2.2}$$

$$F(\tilde{z}) = F(\tilde{x}+\tilde{y})\,\varepsilon_1 + F(\tilde{x}-\tilde{y})\,\varepsilon_2,$$

вытекающих из условий моногенности функции двойного комплексного аргумента [3]. Здесь $1 \pm \varepsilon$ — делители нуля. Выражение (2.2) даёт моногенные функции, не являющиеся делителями нуля.

2. Если аналитическая функция $w = x + iy$, $i^2 = -1$

$$w = f(z) \tag{2.3}$$

гауссова комплексного аргумента $z = x + iy$ номографируема одним выравниавнием, то функция $\tilde{w} = \tilde{u} + \varepsilon\tilde{v}$, $\varepsilon^2 = +1$

$$\tilde{w} = f(\tilde{z}) \tag{2.4}$$

двойного комплексного аргумента $\tilde{z} = \tilde{x} + \varepsilon\tilde{y}$, есть также номографируемая одним выравниванием на той же конической номограмме, с точностью до спектра шкал и, наоборот.

При этом вещественные канонические представления второй зависимости (2.4) из вещественных канонических представлений зависимости (2.3) получаются формальным преобразованием перенесения (прямого)

$$x \to \tilde{x}, \; y \to -\varepsilon i\tilde{y}, \; u \to \tilde{u}, \; v \to -\varepsilon i\tilde{v}, \tag{2.5}$$

а канонические представления первой зависимости, т. е. (2.3), из канонических представлений зависимости (2.5) получаются с помощью формального преобразования перенесения (обратного)

$$\tilde{x} \to x, \; \tilde{y} \to \varepsilon iy, \; \tilde{u} \to u, \; \tilde{v} \to v. \tag{2.6}$$

Эта важная теорема должна рассматриваться как принцип перенесения. Так мы её и будем называть.

Эта теорема обобщается на немоногенные номографируемые функции,

$$u(x;\, y) + iv(x;\, y), \qquad u(\tilde{x};\, \tilde{y}) + \varepsilon v(\tilde{x};\, \tilde{y}),$$

если $u(x;\, y)$ четная, а $v(x,\, y)$ нечетная функции второго аргумента.

В работах автора вместо u и v везде пишется p и g.

Таким образом, поскольку из работ автора известны все номографируемые функции одного гауссова комплексного аргумента и их канонические представления, то в силу принципа перенесения, вместе с тем известны и соответствующие номографируемые функции двойного переменного и их канонические представления а, следовательно, и их номограммы.

3. Все моногенные функции двойного аргумента, являющиеся делителями нуля, тривиально номографируемы на номограммах нулевого жанра.

Это следует из (1.5) стр. 55, главы II работы [3], поскольку в случае моногенных делителей нуля должны иметь

$$(2.7)\qquad F(\tilde{x}+\varepsilon\tilde{y})=u(x;y)(1\pm\varepsilon),\ u_{\tilde{x}}(\tilde{x};\tilde{y})=\pm u_{\tilde{y}}(\tilde{x};\tilde{y}),$$
$$u(\tilde{x};\tilde{y})=u(\tilde{x}\pm\tilde{y}),$$

где надо взять одновременно верхние либо нижние знаки.

Среди трёх теорем этого параграфа важнейшей является теорема 2 (о перенесении).

Она показывает, что теория и, что особенно важно, практика номографирования одной вещественной моногенной функции двойного комплексного аргумента на вещественных номограммах, содержится, по существу, (мы исключаем делителей нуля) в построенной автором теории и практике номографирования моногенных функций одного гауссова аргумента, как это уже было указано.

Если рассматривается функция гауссовых комплексных аргументов $w=f(z;k)$, где k комплексный параметр, то принцип перенесения может применяться либо только по отноешнию к z и w и мы придем к зависимости $\tilde{w}=f(\tilde{z},k)$, где $\tilde{w}$ будет функцией клиффордова комплексного аргумента $\tilde{z}$ и гауссова комплексного аргумента k, либо можно усложнить преобразование, одновременно переходя и от k $\tilde{k}$. В этом последнем случае, полагая $k=k_2+ik_3$, получим принцип прямого перенесения, согласно (2.5), в форме

$$(2.8)\qquad x\to\tilde{x},\ y\to-\varepsilon i\tilde{y},\ k_2\to\tilde{k}_2,\ k_3\to-\varepsilon i\tilde{k}_3,$$
$$u\to\tilde{u},\ v\to-\varepsilon i\tilde{v}$$

и обратного в форме

$$(2.9)\qquad \tilde{x}\to x,\ \tilde{y}\to\varepsilon iy,\ \tilde{k}_2\to\tilde{k}_2,\ \tilde{k}_3\to\varepsilon ik_3,$$
$$\tilde{u}\to u,\ \tilde{v}\to\varepsilon iv.$$

В тексте работы дальше вместо u и v пишется соответственно p и q. Мы будем называть применение прямого принципа перенесения клиффордизацией гауссовского соотношения, а обратное — гауссовизацией клиффордовского соотношения.

Нетрудно установить достаточные условия применимости принципа перенесения. Его заведомо можно применять к вещественным аналитическим функциям переменных, подвергаемых клиффордизации или гауссовизации, т. е. к функциям, степенные ряды которых относительно соответствующих аргументов имеют вещественные коэффициенты. Так, заведомо, могут быть подвергнуты клиффордизации по переменной w тождества (7.4). Эти же тождества можно клиффордизировать и одновременно по w и по k, если к комплексная переменная или, скажем, чисто мнимая вида ik.

В последнем случае ik переходит в εk. И во избежание ошибок при клиффордизации зависимостей, использующих тождества (7.4) необходимо помнить, что $\mathrm{sn}\,(w + ik'(k); k)$, $\mathrm{cn}\,(w + ik'(k); k)$ $\mathrm{dn}\,(w + ik(k); k)$ суть соответственно нечетная, нечетная и четная фукнции модуля k и все — нечетные функции аргумента w. Следовательно, при аргументе $w + 2ik'$ всё это четные функции k и лишь $\mathrm{sn}\,(w + 2ik,(k)) = \mathrm{sn}(w; k)$ нечетная функция w.

Полезно еще иметь в виду, что

$$\mathrm{sn}\,(w \pm k(k); k),\ \mathrm{cn}\,(w \pm k(k); k),\ \mathrm{dn}\,(w \pm k(k); k)$$

четные функции k, но последние две нечетные функции k'.

§ 3. Применение принципа перенесения (2.5) или (2.6) предполагает определение функций двойного и гауссова аргумента с оговорками относительно недопустимости операции деления, когда делитель есть делитель нуля. Такое, и при том вполне естественное, определение функции двойного и гауссова комплексных аргументов, легко осуществить, предполагая встречающиеся функции этих аргументов вещественными аналитическими функциями вещественных аргументов, если последними заменить первые. Более общее достаточное условие применимости принципа перенесения, — чтобы функции $v(x; y)$ и $v(\tilde{x}; \tilde{y})$, будучи соответственно гармонической и двойственно гармонической, были бы нечетными относительно y и $\tilde{y}$ соответственно, а сопряженные им $u(x; y)$ и $u(\tilde{x}, \tilde{y})$ были бы четными относительно y и $\tilde{y}$ соответственно, без чего преобразования (2.5) и (2.6) неприменимы (но возможно применимы преобразования (2.8) и (2.9) или для „большего" числа аргументов). При конкретных вычислинеях иногда приходится преобразовать функцию, чтобы выяснить

применим ли к ней принцип перенесения. В качестве примера можно указать на функцию $u + iv = \sqrt{x + iy} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + $
$+ \frac{yi}{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + y^2} + x)}}$.

Все найденные автором номографируемые функции гауссова комплексного аргумента, за исключением второй неэлементарной нормальной формы номографируемых зависимостей [4], [5], этим требованиям удовлетворяют. Поэтому к ним применим принцип перенесения.

Дадим теперь обобщение принципа перенесения.

Такие равенства, в которых имеем функции аналитические относительно аргументов $z_1, z_2, \ldots, z_k$ и неаналитические относительно $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ подвергаются клиффордизации лишь относительно тех аргументов, относительно которых эти функции аналитические и вещественные.

Заметим, еще, что аналитические функции вещественных переменных, скажем одной вещественной переменной, например $K(k)$ допускают клиффордизацию заменой $k \to -\varepsilon i\tilde{k}$ и тогда получим

$$K(k) \to K(-\varepsilon i\tilde{k}),$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad K(-\varepsilon i\tilde{k}) \equiv K(i\tilde{k}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \tilde{k}^2 \sin^2 \xi}} \equiv \tilde{K}(\tilde{k})$$

$$K'(-\varepsilon i\tilde{k}) \equiv K'(i\tilde{k}) = K\left(\sqrt{1 + \tilde{k}^2}\right). \tag{3.1}$$

Из изложенного вытекает другое обобщение преобразования перенесения, заключающееся в том, что не обязательно делать преобразования вида (2.5). Можно, если $f(z)$ и соответственно $f(\tilde{z})$ — вещественные четные или нечетные аналитические функции аргументов, делать преобразование вида

$$x \to \pm\varepsilon i\tilde{x}, \quad y \to \pm\tilde{y}. \tag{3.2}$$

§ 4. В связи с применением принципа перенесения необходимо сказать несколько слов о возможных ошибках при неосторожной клиффордизации гауссовских соотношений. Если эти меры осторожности не выполнять, то тождественные равенства могут переходить в нетождественные.

Например:

$$(4.1)\qquad i^2 = -1.$$

Если заменить i на ε, то получим заведомо неверное соотношение

$$(4.2)\qquad \varepsilon^2 = -1,$$

т. к.

$$(4.3)\qquad \varepsilon^2 = +1.$$

Подобным же образом тождество

$$(4.4)\qquad 1 - k^2 = 1 + (ik)^2$$

превращается в неверное тождество при замене k на $\tilde{k}$ и i на ε:

$$(4.5)\qquad 1 - \tilde{k}^2 = 1 + \tilde{k}^2.$$

Действия сложения и вычитания

$$(4.6)\qquad (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\, i$$

превращаются в верные

$$(4.7)\qquad (a + b\varepsilon) \pm (c + d\varepsilon) = (a \pm c) + (b \pm d)\, \varepsilon.$$

Но умножение не клиффордизационно, если к лиффордизацию неправильно понимать как замену i за ε, т. к. тождество

$$(4.8)\qquad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

при автоматической замене i на ε делается неправильным.

Однако преобразование перенесения

$$(4.9)\qquad a \to \tilde{a},\ c \to \tilde{c},\ b \to -\varepsilon i\tilde{b},\ d \to -\varepsilon id$$

дает правильный результат

$$(4.10)\qquad (\tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon)(\tilde{c} + d\varepsilon) = (\tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}) + \varepsilon(\tilde{a}\tilde{d} + \tilde{b}\tilde{c}).$$

Рациональная операция (если не вводиться делители нуля) гауссовых комплексных аргументов правильно превращается в рациональную операцию от клиффордовых комплексных аргументов при помощи принципа перенесения, но сопоставление функций гауссова и клиффордова аргумента по правилу замены i на ε и

$$a + bi \to a + b\varepsilon. \tag{4.13}$$

притодит, вообще говоря, к неправильным результатам.

Так, что отображающая операция $\psi(u)$ удовлетворяет равенствам

$$\psi(a + b\varepsilon) = a + bi, \quad \psi^{-1}(a + bi) = a + b\varepsilon, \tag{4.14}$$

$$\psi(c + d\varepsilon) = c + di, \quad \psi^{-1}(c + di) = c + d\varepsilon. \tag{4.15}$$

Отметим, что наше преобразование перенесения отнюдь не эквивалентно простой замене i на ε или набарот. Пример умножения ясно показывает это. Равным образом:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\, i \tag{4.11}$$

при замене i на ε делается неправильным. Однако, преобразование перенесения, даёт правильный результат.

$$\frac{\tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon}{\tilde{c} + \tilde{d}\varepsilon} = \frac{\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}\tilde{d}}{\tilde{c}^2 - \tilde{d}^2} + \frac{-\tilde{a}\tilde{d} + \tilde{b}\tilde{c}}{\tilde{c}^2 - \tilde{d}^2}\, \varepsilon, \tag{4.12}$$

если не вводятся делители нулья.

Отсюда следует, что любая рациональная операция над каким угодно числом не преобразуется в такую же операцию над соответственным по принципу перенесения числом, т. к. иначе мы бы имели изоморфизм и алгебра клиффорда была бы полем.

Действительно, пусть

$$\psi(a + b\varepsilon)\, \psi(c + d\varepsilon) = \psi[(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon)]. \tag{4.16}$$

Имеем

$$\psi(a + b\varepsilon)\, \psi(c + d\varepsilon) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{4.17}$$

Но

$$(ac - bd) + (ad + bc)\, i = \psi[(ac - bd) + (ad + bc)\varepsilon]. \tag{4.18}$$

Следовательно,

$$\psi(a + b\varepsilon)\, \psi(c + d\varepsilon) = \psi[(ac - bd) + (ad + bc)\, \varepsilon]. \tag{4.19}$$

Но

$$(ac - bd) + (ad + bc)\, \varepsilon \neq (a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon). \tag{4.20}$$

Итак,

$$\psi(a + b\varepsilon)\, \psi(c + d\varepsilon) \neq \psi[(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon)], \tag{4.21}$$

что противоречит условию (4.16), вопреки тому, что утверждают некоторые авторы (см. напр. статью Д. Д. Ивлева ,,О двойных числах и их функциях'' (Мат. просвещение № 6 (1961), стр. 197 до 203, см. стр. 200).

Приведем примеры, имеющие своей целью выяснить необходимость преобразований (2.5) и (2.6) и ошибочность травиальной трактовки переноса с помощью отображения (4.13).

Имеем

$$\operatorname{cth} w = \operatorname{th}\left(w + \frac{\pi i}{2}\right). \tag{4.22}$$

Если сделать преобразование, согласно (4.13) заменив просто i на ε, получим равенство

$$\operatorname{cth} \tilde{w} = \operatorname{th}\left(\tilde{w} + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right). \tag{4.23}$$

Но

$$\operatorname{th}\left(\tilde{w} + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) = \frac{\operatorname{sh} 2\tilde{w} + \varepsilon \operatorname{sh} \pi}{\operatorname{ch} 2\tilde{w} + \operatorname{ch} \pi}. \tag{4.24}$$

Следовательно,

$$\operatorname{cth} \tilde{w} = \frac{\operatorname{sh} 2\tilde{w} + \varepsilon \operatorname{sh} \pi}{\operatorname{ch} 2\tilde{w} + \operatorname{ch} \pi}, \tag{4.25}$$

явно неправильное равенство, в чём легко убедиться, положив $\tilde{w} = 0$. Тогда получим

$$\operatorname{cth} \tilde{w} = \varepsilon \operatorname{th} \frac{\pi}{2}. \tag{4.26}$$

Неправильность равенства (4.23) видна также из того, что

$$\operatorname{th}\left(\tilde{w} + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) = \frac{\operatorname{th} \tilde{w} + \operatorname{th}\left(\varepsilon \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \operatorname{th} \tilde{w} \operatorname{th}\left(\varepsilon \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{4.27}$$

Но

$$\operatorname{th}\left(\varepsilon \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \tag{4.28}$$

и получаем, что

$$\text{cth}\,\tilde{w} = \frac{\text{th}\,\tilde{w} + \varepsilon\,\text{th}\frac{\pi}{2}}{1 + \varepsilon\,\text{th}\,\tilde{w}\,\text{th}\frac{\pi}{2}}. \tag{4.29}$$

При $\tilde{w} = 0$ получим неправильное равенство

$$\infty = \varepsilon\,\text{th}\frac{\pi}{2}. \tag{4.30}$$

Но, если выполнить клиффордизацию равенства (4.22) строго согласно преобразованию (2.5), то получим правильное соотношение

$$\text{cth}\,\tilde{w} = \text{th}\left(\tilde{w} + \frac{\pi}{2}i\right). \tag{4.31}$$

Возьмем, например, еще равенство

$$\text{ns}\,(w;\,k) = k\text{sn}\,(w + iK'(k);\,k). \tag{4.32}$$

Это равесntво можно клиффордизировать только по w, только по k либо и по w и по k. Уже отметили в конце § 2, что sn $(w + iK'(k);$ $k)$ нечетная функция модуля k. После полной клиффордизации тождества (4.32), где $k = k_2 = ik_3$, получим

$$p \to \tilde{p},\ q \to -\varepsilon i\tilde{q},\ k_3 = -\varepsilon ik_3, \tag{4.33}$$

$$\text{ns}\,(\tilde{w};\,\tilde{k}) = \tilde{k}\,\text{sn}\,(\tilde{w} + iK'(\tilde{k});\,\tilde{k}). \tag{4.34}$$

Если же k принимало число — мнимые значения $k = ik_3$, то клиффордизация (4.32) согласно (4.33) дала бы

$$\text{ns}\,(\tilde{w};\,\varepsilon\tilde{k}_3) = \varepsilon\tilde{k}_3\,\text{sn}\,(\tilde{w} + ik'(\varepsilon\tilde{k}_3);\,\varepsilon\tilde{k}_3). \tag{4.35}$$

Но

$$\text{ns}\,(\tilde{w};\,\varepsilon k_3) \equiv \text{ns}\,(\tilde{w};\,k_3).$$

Правая же часть равенства (4.35) также не зависит от ε, поскольку, как отмечено, sn $(\tilde{w} + iK'(\varepsilon\tilde{k}_3);\,\varepsilon k_3)$ есть нечетная функция εk_3. Мы получаем правильное равенство

$$\text{ns}\,(\tilde{w};\,\tilde{k}_3) = \varepsilon\tilde{k}_3\,\text{s}\tilde{\text{n}}\,(w + iK'(\varepsilon\tilde{k}_3);\,\varepsilon\tilde{k}_3). \tag{4.36}$$

В соответствии со сказанным в конце § 3 (см. (3.2)) мы можем, рассматривая в (4.32) к как вещественную переменную, клиффордизировать это равенство и так

$$w \to \tilde{w},\ k \to -\varepsilon i\tilde{k}. \tag{4.37}$$

Тогда (4.32) примет вид

$$\operatorname{ns}(\tilde{w}; -\varepsilon i\tilde{k}) = -\varepsilon i\tilde{k} \operatorname{sn}(\tilde{w} + iK'(-\varepsilon i\tilde{k}); -\varepsilon i\tilde{k}) \tag{4.38}$$

или в силу (3.1) получаем следующее правильное равенство:

$$\operatorname{ns}(\tilde{w}; i\tilde{k}) = -\varepsilon i\tilde{k} \operatorname{sn}\left(\tilde{w} + i\tilde{K}\left(\sqrt{1+\tilde{k}^2}\right); -\varepsilon i\tilde{k}\right). \tag{4.39}$$

Проверим это равенство. Имеем слева

$$\operatorname{ns}(\tilde{w}; -\varepsilon i\tilde{k}) = \operatorname{ns}(\tilde{w}; i\tilde{k}) =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\tilde{k}^2}\operatorname{dn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2}; \dfrac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)}{\operatorname{sn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2}; \dfrac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)} \tag{4.40}$$

Имеем справа (4.38) или (4.39) функцию, зависящую нечетным образом от $\varepsilon\tilde{k}$. Поэтому нельзя здесь исходить из четности sn относительно модуля и на этом основании в правых частях (4.38) или (4.39) опустить $-\varepsilon$ (поскольку $(-\varepsilon)^2 = +1$), а дальше воспользоваться формулами перехода от чисто мнимого модуля $i\tilde{k}$ к вещественному модулю $\dfrac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}$. Но, поскольку мы знаем, что эллиптическая функция, стоящая в правой части (4.29), нечетна относительно $-\varepsilon ik$, мы можем вынести $-\varepsilon$ (вынести $i\tilde{k}$ нельзя, ибо нечетная степень ни i ни $\tilde{k}$ не определена однозначно ($i^2 = i$, $i\text{-} = -i$ и, тем более, нечетные степени $\tilde{k}$)).

Итак, доказываемое равенство (4.38) может быть переписано так:

$$\operatorname{ns}(\tilde{w}; i\tilde{k}) = ik \operatorname{sn}(\tilde{w} + i\tilde{k}'(i\tilde{k}); i\tilde{k}). \tag{4.41}$$

Левая часть имеет значение (4.40).

Введя λ и вычисляя, найдем

$$\frac{\tilde{k}}{\sqrt{1\pm\tilde{k}^2}} = \lambda,\ \tilde{k} = \frac{\lambda}{\lambda'},\ \sqrt{1+\tilde{k}^2} = \frac{1}{\lambda'},\ \frac{1}{\lambda\lambda'} = \frac{1+\tilde{k}^2}{\tilde{k}}. \tag{4.42}$$

Имеет место тождество

$$\frac{1}{\lambda'}k\left(\frac{1}{\lambda'}\right)=k'(\lambda)+ik(\lambda). \tag{4.43}$$

Упростим теперь правую часть (4.42), показав, что она тождественно равна правой части равенств (4.40). Имеем, используя (4.42) и (4.43),

$$i\tilde{k}\,\mathrm{sn}\,(\tilde{w}+ik'(i\tilde{k});i\tilde{k})=$$

$$=\frac{i\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\,\frac{\mathrm{sn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2}+i\sqrt{1+\tilde{k}^2}K\left(\sqrt{1+\tilde{k}^2}\right);\frac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)}{\mathrm{dn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2}+i\sqrt{1+\tilde{k}^2}K\left(\sqrt{1+\tilde{k}^2}\right);\frac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)}\equiv$$

$$\equiv\frac{i\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\,\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{w}{\lambda'}+\frac{i}{\lambda'}K\left(\frac{1}{\lambda'}\right);\lambda\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{w}{\lambda'}+\frac{i}{\lambda'}K\left(\frac{1}{\lambda'}\right);\lambda\right)}\equiv$$

$$\equiv\frac{i\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\,\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{w}{\lambda'}+iK'(\lambda)+K(\lambda);\lambda\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{w}{\lambda'}+iK'(\lambda)+K(\lambda);\lambda\right)}\equiv$$

$$\equiv\frac{i\tilde{k}}{\sqrt{1+k^2}}\left(\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{w}{\lambda'};\lambda\right)}{\lambda\lambda' i\,\mathrm{sn}\,\frac{w}{\lambda'};\lambda}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\tilde{k}^2}\,\mathrm{dn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2};\frac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)}{\mathrm{sn}\left(\tilde{w}\sqrt{1+\tilde{k}^2};\frac{\tilde{k}}{\sqrt{1+\tilde{k}^2}}\right)}, \tag{4.44}$$

что в точности совпадает с правой частью (4.40).

§ 5. Естественно формально определяются показательные, тригонометрические, гиперболические логарифмические и эллиптические функции Якоби—Глешера, Танкфи Таннери—Молька и Вейерштрасса и интегралы от двойного аргумента. И все теоремы сложения с помощью принципа перенесения из известных выраженый для гауссова аргумента переносятся на область двойного аргумента.

Для решения поставленной задачи мы в соответствии с принципом перенесения, прежде всего найдём в следующей главе канонические представления соответствующих, вообще говоря, неэлементарных[1]) функций гауссова комплексного аргумента

1. $z = amp(w;\, k)$;
2. $amp(w;\, k) = amp(w_1;\, 1)$;
3. $z = \ln \operatorname{sn}(w;\, \mathrm{k})$;
4. $z = \ln \operatorname{cn}(w;\, k)$;
5. $z = \ln \operatorname{dn}(w;\, k)$;
6. $z = \ln [\wp(w;\, g_2;\, g_3) - e_\alpha],\ g_2^3 - 27g_3^2 \geqq 0$;
7. $z = \ln [\wp(w;\, g_2;\, g_3) - e_\alpha],\ g_2^3 - 27g_3^2 < 0,\ \operatorname{Im} e_\alpha = 0$[2]) (5.1)

(с выделением гармонического и эквигармонического случаев);

8. $z = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}\, d\xi$.

и функций, связанных с этими функциями.

Однако, строгое обоснование такого применения принципа перенесения к функциям гауссова аргумента, определенным при помощи рядов, нуждается в обосновании, которое дается в следующем параграфе.

§ 6. Справедливы следующие теоремы, которые мы докажем во второй части настоящей работы.

Теорема о том, что:

1. множества точек сходимости правильной части и главной части ряда Лорана—Клиффорда*)

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_n + \varepsilon\tilde{\tau}_n)(\tilde{z} - \tilde{z}_0)^n \equiv$$

$$\equiv \tilde{u}(\tilde{x};\, \tilde{y}) + \varepsilon\tilde{v}(\tilde{x};\, \tilde{y}), \quad \tilde{z} = \tilde{x} + \varepsilon\tilde{y},\ \tilde{z}_0 = \tilde{x}_0 + \varepsilon\tilde{y}_0 \tag{6.1}$$

---

[1]) Элементарные будут включены автоматически постольку, поскольку являются случаями вырождений неэлементарных зависимостей при $k = 0{,}1$ или при $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$.

[2]) Знак $\operatorname{Im} e_\alpha$ означает коэффициент при i. В данном случае $\operatorname{Im} e_\alpha = 0$ означает, что берется вещественный корень e_α, если $g_2^3 - 27g_3^2 < 0$.

*) В связи с наличием в каждой точке плоскости клифордого аргумента двух вещественных характеристических направлений, ряд Лорана в этой плоскости не играет такой важной роли, как в гауссовой плоскости.

служат соответственно (характеристический) прямоугольник со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов и с центром в точке $\tilde{z}_0$ плоскости $\tilde{z}$ и четыре бесконечных квадранта, вертикальных углам характеристического прямоугольника сходимости ряда Тейлора—Клиффорда

$$\sum_{0}^{\infty}(\tilde{\sigma}_{-n}+\varepsilon\tilde{\tau}_{-n})(\tilde{z}-\tilde{z}_0)_n. \tag{6.2}$$

2. Множеством точек сходимости сходящегося ряда Лорана—Клиффорда (6.1), определяющего аналитическую функцию (6.1), служат четыре прямоугольные (при $\tilde{\tau}_n\equiv 0$ — квадратные) области перенесения двух указанных множеств точек.

Для степенного ряда (6.1) справедлив аналог теоремы Абеля с заменой окружности на прямоугольник с характеристическим направлением сторон и с центром в точке $\tilde{z}_0$ и с вершиной в точке $\tilde{z}_1\neq\tilde{z}_0$, для которой ряд сходится по условию.

3. Во всяком случае, для вещественных аналитических функций $\bar{f}(\tilde{z})\equiv f(\tilde{z})$, представимых на некотором множестве точек рядом Лорана—Клиффорда (6.1) (в частности — рядом Тейлора—Клиффорда) с вещественными коэффициентами

$$\tilde{\sigma}_n+\varepsilon\tilde{\tau}_n \tag{6.3}$$

заведомо справедливы прямое и обратное преобразования принципа перенесения [14], т. е. если

$$w=f(z)=p+iq,\ p=u(x;y),\ q=v(x,y), \tag{6.4}$$

то получаемая после прямого преобразования перенесения зависимость

$$\tilde{w}=f(\tilde{z})=\tilde{p}+\varepsilon\tilde{q},\ p=u(\tilde{x};-\varepsilon i\tilde{y}),\ -\varepsilon iq=v(\tilde{x};-\varepsilon i\tilde{y}) \tag{6.5}$$

номографируема или нет одновременно с (6.4) и, наоборот, т. е. если

$$\tilde{w}=f(\tilde{z})=\tilde{p}+\varepsilon\tilde{q},\ \tilde{p}=\tilde{u}(x;y),\ \tilde{q}=\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y}), \tag{6.6}$$

то получаемая после обратного преобразования перенесения зависимость

$$w=f(z)=p+iq,\ p=\tilde{u}(x;\varepsilon iy),\ \varepsilon iq=\tilde{v}(x,\varepsilon iy) \tag{6.7}$$

номографируема или нет одновременно с (6.6), причем номограммы, т. е. матрицы из трех строк и четырех столбцов, пар соответствующих по принципу перенесения, зависимостей Гаусса и Клиффорда, с точностью до спектров шкал проективно конгруентны.

Аппарат аналитических функций двойного аргумента дает частные аналитические решения гиперболического уравнения колебаний струны, ибо вещественная и мнимая части являются решениями этого уравнения.

Вторая теорема Гарнака, дающая решение эллиптического уравнения Лапласа, удовлетворяющего заданным граничным условиям на контуре, ограничивающем область, в виде равномерно сходящегося ряда гармонических в области функций, допускает, в силу принципа перенесения, некоторую модификацию для аналогичного построения аналитического решения гиперболического уравнения струны, — решения, удовлетворяющего соответствующим, в силу принципа перенесениям, ,,граничным" условиям, хотя вообще, как мы знаем, постановка задачи Коши для уравнения гиперболического типа требует задания, помимо значений искомой функции на кривой, еще и значений ее нормальной производной на этой кривой.

Рассмотрим вкратце лишь формальную сторону отображения одних решений на другие.

Пусть

$$u \equiv u(x, y),\ u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

$$u[\varphi(t);\ \psi(t)] = \Phi(t). \tag{6.8}$$

Сделаем замену

$$x = \tilde{x},\ y = -\varepsilon i\tilde{y},\ \tilde{x} = x,\ \tilde{y} = \varepsilon i y. \tag{6.9}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv u(\tilde{x}; -\varepsilon i\tilde{y}),\ \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0,\ \tilde{x} = \varphi(t),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{y} = \varepsilon i\psi(t),\\ &\tilde{u}(\varphi(t);\ \varepsilon i\psi(t)) \equiv u(\varphi(t);\ \psi(t)) \equiv \Phi(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Предположим, что $\varphi(t)$ — четная, $\psi(t)$ — нечетная функции t, а $u(x, y)$ (сначала) четная функция y. Тогда, заменяя

$$t = -\varepsilon i\tilde{t},\ \tilde{t} = \varepsilon i t, \tag{6.11}$$

получим для ,,граничных" условий соответствующей задачи колебания струны вещественные граничные условия

$$u[\varphi(-\varepsilon i\tilde{t});\ \psi(-\varepsilon i\tilde{t})] \equiv \Phi(-\varepsilon i\tilde{t}),\ \tilde{x} = \varphi(-\varepsilon i\tilde{t}),$$

$$\tilde{y} = \varepsilon i\psi(-\varepsilon i\tilde{t}). \tag{6.12}$$

для вещественного решения $\tilde{u} = u(\tilde{x};\ -\varepsilon i\tilde{y})$.

Если же $u(x; y)$ — нечетная функция y, то $\varepsilon i u(\tilde{x}; -\varepsilon i\tilde{y}) = \tilde{u}(\tilde{x}; \tilde{y})$ будет вещественной функцией, удовлетворяющей уравнению струны и принимающей на вещественной кривой Γ

$$\tilde{x} = \varphi(-\varepsilon i\tilde{t}),\ \tilde{y} = \varepsilon i\psi(-\varepsilon i\tilde{t}) \tag{6.13}$$

вещественные значения.

$$\begin{gathered}\tilde{u}[\varphi(-\varepsilon i\tilde{t});\ \varepsilon i\psi(-\varepsilon i\tilde{t})] \equiv \varepsilon i u[\varphi(-\varepsilon i\tilde{t}); \\ \psi(-\varepsilon i\tilde{t})] \equiv \varepsilon i\Phi(-\varepsilon i t).\end{gathered} \tag{6.14}$$

Остается исследовать на равномерную сходимость к заданному „граничными" условиями решению в соответствующей области ряда $\Sigma\tilde{u}_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ гармонических функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям на контуре Γ, ограничивающем область G, в которой строится решение уравнения Лапласса.

Однако, строгая модификация второй теоремы Гарнака в применении к внутренней задаче Дирихле для того, чтобы получить ее аналог для гиперболического уравнения струны, требует рассмотрения вопросоы сходимости соответствующих рядов гармонических функций Гаусса и Клиффорда, выходящего за рамки номографического содержания данной работы. И потому мы ограничиваемся изложенным указанием этого направления работы, возникающего в номографии.

Пример 1. Для $u = x^2 - y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $\Phi(t) = \cos 2t$. соответствующей будет $\tilde{u} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, $\tilde{x} = \operatorname{ch}\tilde{t}$, $\tilde{y} = \operatorname{sh}\tilde{t}$, $\Phi(-\varepsilon i\tilde{t}) = \operatorname{ch} 2\tilde{t}$.

Пример 2. Для $u = \tau xy$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $\Phi(t) = \sin 2t$ соответствующей будет $\tilde{u} = 2\tilde{x}\tilde{y}$, $\tilde{x} = \operatorname{ch} t$, $\tilde{y} = \operatorname{sh} t$, $\varepsilon i\Phi(-\varepsilon i\Phi) \equiv \operatorname{sh} 2\tilde{t}$.

Заменой

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\varepsilon}{2},\ \varepsilon_2 = \frac{1-\varepsilon}{2} \tag{6.15}$$

зависимость (6.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\tilde{P}\varepsilon_1 + \tilde{Q}\varepsilon_2 = \varphi_1(\tilde{x}+\tilde{y})\,\varepsilon_1 + \varphi_2(\tilde{x}-\tilde{y})\,\varepsilon_2, \\ \tilde{P} = \tilde{p} + \tilde{q},\ \tilde{Q} = \tilde{p} - \tilde{q},\end{gathered} \tag{6.16}$$

$$\varphi_1(\tilde{x}+\tilde{y}) = \tilde{u}(\tilde{x}; \tilde{y}) + \tilde{v}(\tilde{x}; \tilde{y}),$$
$$\varphi_2(\tilde{x}-\tilde{y}) = \tilde{u}(\tilde{x}; \tilde{y}) - \tilde{v}(\tilde{x}; \tilde{y}),$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — вещественные аналитические функции t и, следовательно, зависимость (6.1), преобразованная, однако, к виду (6.9), всегда тривиально номографируема, и нулевого жанра, на номограмме со сходящимися шкалами $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$. Это верно и для более общих функций, чем представимые степенными рядами аналитических функций (6.1), когда $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ оказываются, вообще говоря, комплексными функциями $\varphi_1(\tilde{x}+\tilde{y})$ и $\varphi_2(\tilde{x}-\tilde{y})$, что, однако, усложняет номографическую интерпретацию. Иначе говоря, см. (8.1) работы [14] сумма и разность вещественной и мнимой частей функции Клиффордова аргумента соответственно вида $\varphi_1(\tilde{x}+\tilde{y})$ и $\varphi_2(\tilde{x}-\tilde{y})$ что порождает при помощи выражений (6.1) ряд зависимостей нулевого жанра в эллиптических функциях.

Определяются элементарные и эллиптические функции и интегралы аргумента Клиффорда и при помощи принципа перенесения получены их теоремы сложения и канонические представления, используя при этом результаты автора по теории номографирования аналитических функций гауссова аргумента.

Теоремы сложения (но не канонические представления) можно непосредственно получить также при помощи формулы (8.1) работы [14].

Именно этот достаточно общий метод образования интересных и вещественных аналитических зависимостей в эллиптических и других функциях, заведомо нулевого жанра $\tilde{u}(\tilde{x}; \tilde{y}) \pm v(\tilde{x}; \tilde{y}) = \varphi_{1,2}(\tilde{x} \pm \tilde{y})$ предложен и на ряде примеров применен первым из соавторов печатающейся в Чехословакии работы, посвященной номографированию теоремы сложения эллиптических функций. Число этих примеров можно неограниченно увеличивать указанным методом.

Для обоснования принципа перенесения, поскольку в (6.5), (6.6) приходится вычислять функции аргумента $\pm\varepsilon i\tilde{y}$, достаточно развить теорию сходимости рядов Лорана и Тейлора для гиперкомплексного аргумента $\tilde{z} = \lambda + i\mu + \varepsilon\nu + \varepsilon_1\delta$, где $i^2 = \varepsilon_1^2 = -1$, $\varepsilon^2 = +1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon i \equiv i\varepsilon$, $\varepsilon\varepsilon_1 = i$, $i\varepsilon_1 = -\varepsilon$. Выведены аналоги условий Коши—Римана для этих функций и изучены множества точек сходимости рядов Тейлора и Лорана—Клиффорда. Мы считаем ряд Лорана (Тейлора) сходящимся, если множество точек сходимости в плоскости z или соответственно $\tilde{z}$ содержит внутреннюю точку плоскости. Мы скажем, что два ряда Лорана обладают общей областью сходимости, если множества точек сходимости этих рядов в совмещенной плоскости z и $\tilde{z}$ имеют общую внутреннюю точку.

Называя соответствующими аналитические функции $f(z)$ и $\tilde{f}(\tilde{z})$, представимые соответствующими по принципу перенесения рядами Лорана или Тейлора по степеням $z - z_0$ и $\tilde{z} - \tilde{z}_0$, где

$x_0 = \tilde{x}_0$, $y_0 = \tilde{x}_0$, доказывается, что, во всяком случае, вещественные соответствующие функции $f(z)$ и $f(\tilde{z})$ ($f(t)$ — вещественная аналитическая функция), представимые вещественными рядами Лорана или Тейлора, одновременно сходятся (обладая общей областью сходимости) или расходятся, хотя множества точек сходимости их, конечно, не совпадают. В частности, дробно-линейные вещественные невырождающиеся функции $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $w = \dfrac{a\tilde{z}+b}{c\tilde{z}+d}$, определяющие группу Мёбиуса и круговую геометрию в плоскости z и $\tilde{w} = \dfrac{a\tilde{z}+b}{c\tilde{z}+d}$, $\tilde{w} = \dfrac{a\tilde{z}+b}{c\tilde{z}+d}$, определяющие группу Лагерра, в силу принципа перенесения, взаимно однозначно соответствуют одна другой. В работе [3], стр. 73, автором указано их значение для „аналлагматических" номографий.

Отметим, что сходимость рядов Лорана и Тейлора относительного аргумента Штуди $\tilde{\tilde{z}} = \tilde{\tilde{x}} + \omega y$, $\omega^2 = 0$ не зависит от $\tilde{\tilde{y}}$, так что имеем бесконечные вертикальные полосы сходимости в плоскости $\tilde{\tilde{z}}$.

§ 7. В этом § мы дадим, теоремы разложения коллинеаций и геометрию преобразования номограмм. Доказательство.

Пусть A_2 данная номограмма матрица в проективной плоскости $\pi_2 = E_{2\infty}$, взятой в виде евклидовой с присоединенными несобственными элементами, а A_2 проективно преобразованная с помощью невырождающейся неаффинной матрицы Π_2, квадратной, порядка 3×3. Тогда

$$A_2' = \Pi_2 A_2 \tag{7.1}$$

Пусть введены в $E_{2\infty}$ матрицы трансляций T_2, вращения R_2, евклидова движения E_2, гомологии G_2, гомотетии H_2, параболической гомологии $G_{2\flat}$:

$$T_2(u, v; XOY) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad H_2(k;\, 0) = \begin{Vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$G_{2\flat}\left(0;\, -\frac{\cos\varkappa}{p},\, -\frac{\sin\varkappa}{p},\, 1\right) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\cos\varkappa}{p} & -\dfrac{\sin\varkappa}{p} & 1 \end{Vmatrix};$$

$$R_2(\xi; 0) = \begin{Vmatrix} \cos\xi & -\sin\xi & 0 \\ \sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad G_2\left(0;\, k,\, -\frac{\cos\varkappa}{p},\, -\frac{\sin\varkappa}{p},\, 1\right) \equiv$$

$$\equiv H_2(k; 0)\, G_{2,}\left(0; -\frac{\cos\varkappa}{p},\, -\frac{\sin\varkappa}{p},\, 1\right) \equiv$$

$$\equiv \begin{Vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -\dfrac{\cos\varkappa}{p} & -\dfrac{\sin\varkappa}{p} & 1 \end{Vmatrix}, \quad k, p \neq 0,\ \infty;$$

$$E_2(\xi, 0 \mid u, v; XOY) = T_2(u, v; XOY)\, R_2(\xi, 0), \tag{7.2}$$

где $\varkappa$ — угол между нормалью к оси параболической гомологии и осью $\tilde{O}'\tilde{X}' \| OX$, а p — расстояние от предельной линии плоскости номограммы до $\tilde{O}'$.

Лемма 1. Гомология есть справа налево произведение параболической гомологии и гомотетии с общим центром и с параллельными осями обеих гомологий и с предельными линиями параболической гомологии

$$x\cos\varkappa + y\sin\varkappa \pm p = 0. \tag{7.3}$$

Лемма 2. Если A и B преобразования и $B \bigcirc A$ означает действие B в репере преобразованом A, то

$$AB = B \bigcirc A,\quad (B \bigcirc A)' = A' \bigcirc B',$$
$$(B \bigcirc A)^{-1} = A^{-1} \bigcirc B^{-1}. \tag{7.4}$$

Пусть система старых осей ХОУ в плоскости E_2 преобразуется в $\tilde{X}', \tilde{O}', \tilde{Y}'$ под действием трансляции $T_2(\lambda, \mu, XOY)$. Справедлива теорема разложения 1 (геометрическая)

$$\Pi_2 = H_2(k; \tilde{O}')\, G_{2p}\left(\tilde{O}'; -\frac{\cos\varkappa}{p};\, -\frac{\sin\varkappa}{p},\, 1\right) T_2(\lambda, \mu,$$
$$XOY)\, R_2(-\varphi; O)\, T_2(-a - b, XOY). \tag{7.5}$$

Справедлива теорема разложения 2 (геометрическая)

$$\Pi_2 = T_2(\lambda, \mu; XOY)\, H_2(k; O)\, G_{2p}\left(0;\, -\frac{\cos\varkappa}{p},\, -\right.$$
$$\left. -\frac{\sin\varkappa}{p},\, 1\right) R_2(-\varphi; 0)\, T_2(-a, -b; XOY), \tag{7.6}$$

т. е. общая коллинеация есть произведение шести гомологий или произведение гомотетии слева направо на восемь инволюционных и, следовательно, непараболических гомологий.

Поскольку преобразования эквиформенной и даже аффинной группы, предшествующие слева направо гомологии, с номографической точки зрения несущественны, — получается теорема разложения 3 (номографическая). Общая коллинеация Π_N с точностью до несущественных преобразований эквиформенной группы допускает разложение

$$\Pi_{2N} = G_{2p}\left(0; -\frac{\cos \varkappa}{p}, -\right.$$

$$\left. -\frac{\sin \varkappa}{p}, 1\right) R_2(-\varphi, 0)\, T_2(-a, -b; XOY). \tag{7.7}$$

Из геометрических теорем разложения, важных тем, что выяснен геометрический смысл каждого из восьми параметров λ, μ, k, $\varkappa$, p, φ, a, b группы, видна геометрическая структура общей коллинеации.

Из номографической теоремы видно, что множество существенных для номографии проективных преобразований зависят от пяти параметров $\varkappa$, p, φ, a, b.

Практическая важность номографической теоремы разложения заключается в том, что благодаря устранению несущественных проективных преобразований и выясненности геометрического смысла всех пяти параметров преобразования, мы при помощи одной лишь однопараметрической сетки для параболической гомологии $G_{2p}\left(\tilde{O}; -\frac{\cos \varkappa}{p}, -\frac{\sin \varkappa}{p}, 1\right)$ находим ,,на глаз`` нужное преобразование.

Для этого на неподвижную систему осей ХОУ произвольно накладывается система ХОУ, в которой построена номограмма. Сетка для $G_{2p}\left(\tilde{O}'; -\frac{\cos \varkappa}{p}, -\frac{\sin \varkappa}{p}, 1\right)$, состоящая из пучка лучей с центром в $\tilde{O}'$, совмещаенном с O, из оси гомологии, проходящей через $\tilde{O}'$, $\equiv O$ и играющей роль оси иксов вспомогательной системы $\tilde{\tilde{X}}'\tilde{\tilde{O}}'\tilde{\tilde{Y}}$, где $\tilde{\tilde{O}}'\tilde{\tilde{X}}'$ совпадает с осью гомологии, а $\tilde{\tilde{O}}'\tilde{\tilde{Y}}'$ — с нормалью к ней, и из пар параллельных оси гомологии прямых (7.3), налагается на ХОУ, и строится преобразованная номограмма исходя из основных ее точек. При этом счертежа считывается выбранное p, угол наклона $\varkappa$ нормали к оси гомологии с осью ОХ, что позволяет немедленно написать матрицу G_{2p} $\left(\tilde{O}' -\frac{\cos \varkappa}{p}, -\frac{\sin \varkappa}{p}, 1\right)$. В силу (7.7) из чертежа считываются с обратными знаками координаты a и b начала $\tilde{O}$ системы с данной номограммой и угол φ наклона оси $\tilde{O}\tilde{X}$ к оси OX, взяв его с обратным знаком. Построив затем с помощью (7.7) и (7.2) матрицы $R_2(-\varphi, 0)$ и $T_2(-a, -b; XOY)$, по формуле (7.7) находим искомую коллинеацию.

Следствием работы для практической номограмии является доказательство того, что вместо множества сеток, перенесенных в номографию из проективной и неевклидовой геометрии (где их ввели Мебиус и Клейн) и теорически разработанные впервые Пентковским [15], как показывает выполненный теоретический анализ, достаточна одна простейшая сетка из пучка прямых и параллелей, что чисто практически уже использовал в номографии E. Joke в работе [11].

В заключение дается обобщение на Π_{n-1} — $(n-1)$ — мерную проективную плоскость, изучая ее геометрию как аффинную геометрию в связке прямых в n-мерном аффинном пространстве. Обобщение не тривиально, т. к. вращения не аналогичны вращениям в Π_2 (собственное ортогональное преобразование зависит от $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров, трансляция от $(n-1)$ параметров, а гомология должна удовлетворять $(n-1)^2 + (n-2)$ условиям равенства $(n-1)^{20}$ члена по главной диагонали и обращения в нули всех, кроме этих диагональных, элементов первых $(n-1)$ строк, что дает всего $(n-1)^2 + (n-2)$ условий).

Автор называет номограммой системы совместно номографируемых уравнений

$$f_1(x, y, z_1) = 0, \quad f_2(x, y, z_2) = 0$$

матрицу A из трех столбцов (строк) и четырех строк (столбцов), элементы каждой (каждого) из которых зависят от одной из переменных x, y, z_1, z_2, указывая, с точностью до неопределенных множителей ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 однородные координаты точек каждой из четырех шкал x, y, z_1, z_2. Умножение этой матрицы справа (слева) на невырожденную квадратную матрицу Π_3 3×3 порядка с произвольными, хотя бы переменными (но в обычном случае, постоянными) элементами, означает коллинеацию всей номограммы А. Обозначая преобразованную номограмму — матрицу через A_I, получим соответственно $A_I = A\Pi_3^*$, $A_I = \Pi_3 A$.

Введение матриц — номограмм в проективных пространствах любого числа измерений удобно при изучении коллинеарных преобразований номограмм общих систем уравнений, обобщающих приведенную выше систему. К этому мы еще вернемся.

ГЛАВА II. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГАУССОВА КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. В этом параграфе мы введем следующие обозначения для эллиптических функций

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(p;k)=s_1,\ \operatorname{cn}(p;k)=c_1,\ \operatorname{dn}(p;k)=d_1,\\
&\operatorname{sn}(q;k')=s_2,\ \operatorname{cn}(q;k')=c_2,\ \operatorname{dn}(q;k')=d_2,\\
&\operatorname{sn}(2p;k)=S_1,\ \operatorname{cn}(2p;k)=C_1,\ \operatorname{dn}(2p;k)=D_1,\\
&\operatorname{sn}(2q;k')=S_2,\ \operatorname{cn}(2q;k')=C_2,\ \operatorname{dn}(2q;k')=D_2.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Во всех других случаях мы будем обозначать эллиптические функции, как обычно, или вводить другие условные обозначения.

Мы здесь же оговариваем, что встречающиеся ниже *вещественные* выражения

$$
k \operatorname{ch}(2x+\ln k),\ kk' \operatorname{sh}\left(2x+\ln\frac{k}{k'}\right),\ k' \operatorname{ch}(2x-\ln k'). \tag{1.2}
$$

и им подобные, в которых берутся экспоненциальные функции от логарифмов должны пониматься в более общем смысле, а именно:

$$
\begin{gathered}
k \operatorname{ch}(2x+\ln k)=\frac{k^2e^{2x}+e^{-2x}}{2},\ kk' \operatorname{sh}\left(2x+\ln\frac{k}{k'}\right)=\\
=\frac{k^2e^{2x}-k'^2e^{-2x}}{2},\ k' \operatorname{ch}(2x-\ln k')=\frac{e^{2x}+k'^2e^{-2x}}{2},
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

т. е. можно считать, что $-\infty<k^2<+\infty$, $-\infty<k'^2=1-k^2<+\infty$, и аналогично в подобных случаях, так что запись их в форме (1.2) применяется лишь для краткости.

Это замечание важно иметь в виду еще при выделении элементарных случаев, когда $k=0$, $k=1$, которые в форме (1.2) делаются неопределенными, но неопределенность немедленно устраняется при замене выражения (2.2) правыми частями равенств (1.3).

§ 2. Канонические представления для равносильных между собой зависимостей (см. (2.9) главы I)

$$
\begin{gathered}
\sin z=\operatorname{sn}(w;k),\ z=amp(w;k),\ w=\\
=\int_0^z\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}},\ z=\int_0^w \operatorname{dn}(\xi;k)\,d\xi^{1)}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

[1]) Весьма удобно вместо w и z писать соответственно w_k и w_0.

запишутся так (см. (6.3) стр. 208 работы [4])

$$
(2.2)\qquad \begin{cases} (+1)(\cos 2x) + \left(\dfrac{k^2 s_1^2 c_1^2}{d_1^2}\right)(\operatorname{ch} 2y) + \left(\dfrac{s_1^2 d_1^2 - c_1^2}{d_1^2}\right) = 0, \\ (+1)(\cos 2x) + \left(-\dfrac{c_2^2 d_2^2}{k^2 s_2^2}\right)(\operatorname{ch} 2y) + \left(\dfrac{1 - k'^2 s_2^4}{k^2 s_2^2}\right) = 0, \end{cases}
$$

причем

$$
(2.3)\qquad \begin{aligned} 1 - k'^2 s_2^4 &= s_2^2 d_2^2 + c_2^2 = d_2^2 + k'^2 + k'^2 s_2^2 c_2^2, \\ 1 - k^2 s_1^4 &= s_1^2 d_1^2 + c_1^2 = d_1^2 + k^2 s_1^2 c_1^2. \end{aligned}
$$

С помошью (2.2) получаем следуюшие уравнения шкал номограммы изображенной на вклейке между стр. 14 и 15 работы [3]:

$$
\left.\begin{aligned} X'_{1x} &= \frac{270}{2 - \cos 2x} - 90, \quad Y'_{1x} = \frac{510}{2 - \cos 2q} - 170, \\ X'_{2y} &= -\frac{90}{\operatorname{ch} 2y} - 90, \quad Y'_{2y} = \frac{510}{\operatorname{ch} 2y} - 170, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)
$$

если к $= 0$;

$$
\left.\begin{aligned} X'_{1p} &= 90 + \frac{90}{\operatorname{ch} 2p}, \quad Y'_{1p} = \frac{510}{\operatorname{ch} 2p} - 170, \\ X'_{2q} &= \frac{-90}{2 - \cos 2q}, \quad Y'_{2} = \frac{510}{2 - \cos 2q} - 170, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)
$$

если $k = 1$;

$$
\left.\begin{aligned} X'_{1p} &= 180\frac{c_1^2}{1 + 2k'^2 s_1^2 - k^2 s_1^4}, \quad Y'_{1p} = 340\frac{(1 - 2k^2 s_1^2)\, c_1^2}{1 + 2k'^2 s_1^2 - k^2 s_1^4}, \\ X'_{2q} &= 180\frac{c_2^2}{1 + 2k^2 s_2^2 - k'^2 s_2^4}, \quad Y'_{2q} = 340\frac{(1 - 2k'^2 s_2^2)\, c_2^2}{1 + 2k^2 s_2^2 - k'^2 s_2^4}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)
$$

$$
\frac{Y'_{1p}}{X'_{1p}} = \frac{17}{9}(1 - 2k^2 s_1^2), \qquad \frac{Y'_{2q}}{X'_{2q}} = \frac{17}{9}(1 - 2k'^2 s_2^2), \qquad (2.7)
$$

еспи k — любое (см. сбр. 33, 34 ребобы [3]).

§ 3. При помощи результатов § 2 можно получить следующую теорему.

Зависимости

$$
3.1) \qquad amp(w_k;\, k) = amp(w_1;\, 1),
$$

где

$$amp(w_k;\, k) \equiv \int\limits_0^{w_k} \mathrm{dn}\,(\xi;\, k)\,\mathrm{d}\xi,$$

(3.2) $$amp(w_1;\, 1) \equiv \mathrm{Arctg}\, shw_1 \equiv \mathrm{Arcsin}\,\mathrm{th}\, w_1$$

или, что равносильно (2.1), зависимости

$$\mathrm{sn}\,(w_k;\, k) = \mathrm{th}\, w_1,\ \ \mathrm{cn}\,(w_k;\, k) = \frac{1}{\mathrm{ch}\, w_1},\ \ \mathrm{th}\,(w_k;\, k) = \mathrm{sh}\, w_1,$$

(3.3) $$w_k = \int\limits_0^{\mathrm{Arcsin\,th}\, w_1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^3 \sin^2 \xi}},\quad iw_k = \int\limits_0^{iw_1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \xi}}$$

имеют канонические представления

(3.4) $$\begin{cases} (+1)(\cos 2q_1) + \left(\dfrac{k'^2 s_2^2 c_2^2}{d_2^2}\right)(\mathrm{ch}\, 2p_1) + \left(\dfrac{s_2^2 d_2^2 - c_2^2}{d_2^2}\right) = 0, \\ (+1)(\cos 2q_1) + \left(-\dfrac{c_1^2 d_1^2}{k'^2 s_1^2}\right)(\mathrm{ch}\, 2p_1) + \left(\dfrac{1 - k^2 s_1^4}{k'^2 s_1^2}\right) = 0, \end{cases}$$

причем

(3.5) $$1 - k^2 s_1^4 = s_1^2 d_1^2 + c_1^2.$$

§ 4. Канонические представления зависимости

(4.1) $$z = \ln \mathrm{sn}\,(w;\, k)$$

имеют вид

(4.2) $$\begin{cases} (+1)(\cos 2y) + (-S_1^2)(k\, \mathrm{ch}\,(2x + \ln k) + (C_1 D_1) = 0, \\ (C_2^2)(\cos 2y) + (S_2^2)(k\, \mathrm{ch}\,(2x + \ln k)) + (-D_2) = 0. \end{cases}$$

Этот результат получается при помощи формул § 14 работы [5] и канонических представлений (2.2). При этом двойственный знак ($\pm$) в формулах § 14 работы [5] устраняется на основании того, что при $k = 0$ и $k = 1$ канонические представления элементарных зависимостей (4.1) известны из главы IV работы [4].

§ 5. Канонические представления зависимости

(5.1) $$z = \ln \mathrm{cn}\,(w;\, k)$$

имеют вид

(5.2) $$\begin{cases} (D_1^2)(\cos 2y) + (S_1^2)\left[kk'\, \mathrm{sh}\left(2x + \ln \dfrac{k}{k'}\right)\right] + (-C_1) = 0, \\ (D_2^2)(\cos 2y) + (-S_2^2)\left[kk'\, \mathrm{sh}\left(2x + \ln \dfrac{k}{k'}\right)\right] + (-C_2) = 0. \end{cases}$$

Этот результат получается при помощи формулы § 12 работы [5] и результатов предыдущего параграфа. А именно, из § 12 работы [5] вытекает, что

$$\text{(5.3)} \qquad \operatorname{cn}[w;\, k] = \frac{ik'}{k}\operatorname{sn}\left[\varepsilon ikw - ikK(k);\ \frac{ik'}{k}\right],$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

После этого зависимость (5.1) приводится к зависимости вида (4.1) и из (4.2) очевидной заменой получается (5.2).

§ 6. Канонические представления зависимости

$$\text{(6.1)} \qquad z = \ln \operatorname{dn}(w;\, k)$$

имеют вид

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{cases} (C_1^2)(\cos 2y) + (S_1^2)(k' \operatorname{ch}(2x - \ln k')) + (-D_1) = 0, \\ (+1)(\cos 2y) + (-S_2^2)(k' \operatorname{ch}(2x - \ln k')) + (-C_2D_2) = 0. \end{cases}$$

Этот результат получается при помощи формул § 13 работы [5] и канонических представлений (2.2).

Еще проще этот же результат получается при помощи формул (15.6), (15.7) работы [5] и тех же канонических представлений (2.2).

Двойственность знака в формулах § 13 или в формуле (15.7) работы [5] устраняется при помощи использования канонических представлений для элементарных случаев зависимости (7.1) при $k = 0$ и $k = 1$, содержащихся в гл. IV работы [4].

§ 7. Все элементарные случаи вырождений функций, рассмотренных в §§ 2—6 этой главы при $k = 0$ и $k = 1$ заключается в полученных в этих §§ результатах.

Канонические представления для логарифмов трех функций Якоби—Глешера, т. е. для

$$\text{(7.1)} \qquad z = \ln \operatorname{nc}(w;\, k),\ z = \ln nc(w;\, k);\ z = \ln nd(w;\, k)$$

получаются из канонических представлений соответственно зависимостей (4.1) (5.1) (6.1) простой заменой x и y на $(-x)$ и $(-y)$

Канонические представления для логарифмов шести функций Якоби—Глешера

$$\text{(7.2)} \qquad z = \ln sc(w;\, k),\ z = \ln cd(w;\, k),\ z = \ln sd(w;\, k)$$

приводятся к случаю, рассмотренному в § 6. при помощи тождеств § 12 работы [5].

Канонические же представления для зависимостей Якоби—Глешера

$$z = \ln cs(w;\, k),\ z = \ln \mathrm{d}c(w;\, k),\ z = \ln \mathrm{d}s(w;\, k) \tag{7.3}$$

получаются из канонических представлений соответствующих зависимостей (7.2), простой заменой x и y на $(-x)$ и $(-y)$.

Можно пользоваться также следующим тождествами, позволяющими легко сводить номографирование 12 функций Якоби—Глешера в полярных координатах плоскости к случаям, рассмотренным в §§ 4, 5, 6.

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{ns}\,(w;\,k) = k\,\mathrm{sn}\,(w + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{nc}\,(w;\,k) = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,(w + K(k) + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{nd}\,(w;\,k) = \mathrm{sn}\,(iw + K'(k);\,k'),\\
&\mathrm{sc}\,(w;\,k) = -\frac{i}{k}\,\mathrm{dn}\,(w + K(k) + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{cs}\,(w;\,k) = i\,\mathrm{dn}\,(w + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{cd}\,(w;\,k) = \frac{1}{k}\,\mathrm{dn}\,(iw + K'(k);\,k'),\\
&\mathrm{dc}\,(w;\,k) = k\,\mathrm{sn}\,(w + K(k) + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{ds}\,(w;\,k) = ik\,\mathrm{cn}\,(w + iK'(k);\,k),\\
&\mathrm{sd}\,(w;\,k) = \frac{i}{k}\,\mathrm{cn}\,(iw + K'(k);\,k').
\end{aligned}\right. \tag{7.4}$$

Второстепенное значение имеют формулы

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{sn}\,(w;\,k) = \mathrm{sn}\,(w + 2iK'(k);\,k),\\
&-\mathrm{cn}\,(w;\,k) = \mathrm{cn}\,(w + 2iK'(k);\,k),\\
&-\mathrm{dn}\,(w;\,k) = \mathrm{dn}\,(w + 2iK'(k);\,k),\\
&-\mathrm{sn}\,(w;\,k) = \mathrm{sn}\,(w + 2K(k);\,k),\\
&\mathrm{cn}\,(w;\,k) = \mathrm{cn}\,(w \pm 2K(k) + 2\varepsilon iK'(k);\,k),\\
&-\mathrm{dn}\,(w;\,k) = \mathrm{dn}\,(w \pm 2K(k) + 2\varepsilon iK'(k),\,k),
\end{aligned}\right. \tag{7.5}$$

являющиеся прямыми следствиями того, что $4K(k)$ и $2iK'(k)$ образуют периоды для $\mathrm{sn}\,(w;\,k)$, $4K(k)$ и $2K(k) + 2iK'(k)$ — периоды для $\mathrm{cn}\,(w;\,k)$ $2K(k)$ и $4iK'(k)$ — периоды для $\mathrm{dn}\,(w;\,k)$.

Вследствие этого мы не будем, за недостатком места, приводить канонические представления функций (7.1) (7.2) (7.3).

§ 8. Канонические представления зависимости

$$z = \ln\left[\wp(w; g_2; g_3) - e_\alpha\right], \tag{8.1}$$

где e_α, $e_\beta > e_\gamma (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3)$ корни уравнения

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0,\ g_2^3 - 27g_3^2 \geqq 0, \tag{8.2}$$

получены при помощи формул § 18 работы [5] и канонических представлений (2.2). Их можно также получить при помощи формулы Веерштрасса

$$\wp(w; g_2; g_3) = e_\alpha + \frac{e_\beta - e_\alpha}{\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, w;\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)} \tag{8.3}$$

и канонических представлений (4.2). Получаем в обоих случаях

$$\left\{\begin{aligned}
&(+1)(\cos y) + \left[-\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, p;\ \sqrt{\frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] \times \\
&\times\left(\frac{\dfrac{e^x}{e_\beta - e_\alpha} + e^{-x}(e_\gamma - e_\alpha)}{2}\right) + \left[\mathrm{cn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, p;\ \sqrt{\frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\times\right. \\
&\left.\times\ \mathrm{dn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, p;\ \sqrt{\frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0, \\
&\left[\mathrm{cn}^2\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, q;\ \sqrt{\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right](\cos y) + \\
&+\left[\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, q;\ \sqrt{\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\left(\frac{\dfrac{e^x}{e_\beta - e_\gamma} + e^{-x}(e_\gamma - e_\alpha)}{2}\right) + \\
&+\left[-\mathrm{dn}\left(2\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\, q;\ \sqrt{\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0,
\end{aligned}\right. \tag{8.4}$$

если

$$e_\beta > e_\alpha; \tag{8.5}$$

$$
(8.6)\quad
\begin{cases}
(-1)(\cos y) + \left[-\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, q;\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] \times \\
= \left[\dfrac{\dfrac{e^x}{e_\alpha - e_\beta} + e^{-x}(e_\alpha - e_\gamma)}{2}\right] \mathrm{cn}\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, q;\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\beta}{e_\gamma - e_\alpha}}\right) \times \\
\times\ \mathrm{dn}\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, q;\ \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\Bigg] = 0, \\
\left[-\mathrm{cn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, p;\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right](\mathrm{ci\,s}\, y) + \\
+ \left[\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, p;\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right]\left[\dfrac{\dfrac{e^x}{e_\alpha - e_\beta} + e^{-x}(e_\alpha - e_\gamma)}{2}\right] + \\
+ \left[-\mathrm{dn}\left(2\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\, p;\ \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}}\right)\right] = 0,
\end{cases}
$$

если

$$(8.7)\qquad e_\alpha > e_\beta.$$

Не выделяя полностью случаи вырождения, мы укажем лишь главные моменты, после чего использование представлений (8.4) и (8.6) не представляет никаких даже технических затруднений и в случаях вырождения, когда

$$(8.8)\qquad g_2^3 - 27g_3^2 = 0,$$

но

$$(8.9)\qquad g_2 g_3 \neq 0.$$

Имеем два следующих случаях:

1. В первом случае вырождения имеем

$$
(8.10)\quad
\begin{cases}
g_3 < 0, \quad e_\beta = e_\gamma = -\dfrac{3g_3}{2g_3} > e_\alpha = \dfrac{3g_3}{g_2}\, e_\beta - e_\gamma = 0, \\
e_\beta - e_\alpha = e_\gamma - e_\alpha = -\dfrac{9g_3}{2g_2},\ e_\beta - e_\alpha = 3\sqrt{-\dfrac{g_3}{2g_2}}, \\
k = \sqrt{\dfrac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha}} = 1, \quad k' = \sqrt{\dfrac{e_\beta - e_\gamma}{e_\beta - e_\alpha}} = 0.
\end{cases}
$$

Соответственно этому предположению получаем в согласии с § 19 работы [5], что

$$(8.11)\qquad \wp(w;g_2;g_3)=\frac{3g_3}{g_2}-\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{cth}^2\left(w\sqrt{-\frac{9g_3}{2g_2}}\right).$$

Зависимость (8.11) примет вид)

$$(8.12)\qquad z=\ln\left[-\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{cth}^2\left(w\sqrt{-\frac{9g_3}{2g_2}}\right)\right].$$

Канонические представления вид (8.11) в силу (8.10) получаются из (8.4).

2. Во втором случае вырождения имеем

$$(8.13)\qquad \begin{cases} g_3>0, \quad e_\beta=\dfrac{3g_3}{g_2}>e_\gamma=e_\alpha=-\dfrac{3g_3}{2g_2}=-\dfrac{3g_3}{2g_2}, \\ e_\beta-e_\gamma=e_\beta-e_\alpha=\dfrac{9g_3}{2g_2}, \quad e_\gamma-e_\alpha=0, \\ k=\sqrt{\dfrac{e_\gamma-e_\alpha}{e_\beta-e_\alpha}}=0, \quad k'=\sqrt{\dfrac{e_\beta-e_\gamma}{e_\beta-e_\alpha}}=1. \end{cases}$$

Соответственно этому предположению получаем в согласии с § 19 работы [5], что

$$(8.14)\qquad \wp(w;g_2;g_3)=-\frac{3g_3}{g_2}+\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{ctg}^2\left(w\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right).$$

Зависимость (8.1) примет вид

$$(8.15)\qquad z=\ln\left[\frac{9g_3}{2g_2}\operatorname{ctg}^2\left(w\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right)\right].$$

Канонические представления для (8.15) в силу (8.13) получаются из (8.4).

Наш порядок обозначения корней e_α, e_β, e_γ почти совершенно произволен. Если бы поменяли местами e_α и e_β (8.10) и (8.13), то надо было бы, согласно неравенству (8.7), воспользоваться каноническими представлениями (8.6). Не слеудет только через e_α и e_β обозначать равные корни.

§ 9. Рассмотрим отдельно интересный частный гармонический случай функции Веерштрасса, когда

$$(9.1)\qquad g_3=0.$$

В этом случае либо

$$(9.2_1)\qquad e_\alpha = 0,\qquad e_\beta = \frac{\sqrt{g_2}}{2},\qquad e_\gamma = -\frac{\sqrt{g_2}}{2},$$

$$(9.2_2)\qquad e_\alpha = 0,\qquad e_\beta = -\frac{\sqrt{g_2}}{2},\qquad e_\gamma = \frac{\sqrt{g_2}}{2},$$

если

$$(9.3)\qquad g_2^3 - 27g_3^2 \geqq 0,\ g_2 \geqq 0,$$

либо

$$(9.4_1)\qquad e_\alpha = 0,\qquad e_\beta = i\frac{\sqrt{-g_2}}{2},\qquad e_\gamma = -i\frac{\sqrt{-g_2}}{2},$$

$$(9.4_2)\qquad e_\alpha = 0,\qquad e_\beta = -i\frac{\sqrt{-g_2}}{2},\qquad e_\gamma = i\frac{\sqrt{-g_2}}{2},$$

если

$$(9.5)\qquad g_2^3 - 27g_3^2 < 0,\ g_2 < 0.$$

В этом случае, и только в этом случае, номографируема в полярных координатах непосредственно сама функция Вейерштрасса, т. к. (8.1) примет вид

$$(9.6)\qquad z = \ln \wp(w; g_2; 0).$$

Случай (9.4) и (9.5) за пределы применимости канонических представлений (8.4) и (8.6), т. к. нарушено условие (8.2).

Применяя канонические представления (8.4) к случаю (9.2_1) (когда $e_\beta > e_\alpha$) или канонические представления (8.6) к случаю (9.2_2) (когда $e_\alpha > e_\beta$), получим в обоих случаях одинаковые канонические представления для зависимости (9.6) (гармонический случай функции Веерштрасса) в согласии с теоремой единственности анаморфозы функции комплексного переменного [4], [5]

$$(9.7)\left\{\begin{aligned}
&(+1)(\cos y) + \left[-\mathrm{sn}^2\left(\sqrt[4]{4g_2}\,p; i\right)\right]\left(\frac{\dfrac{2e^x}{\sqrt{g_2}} - \dfrac{\sqrt{g_2}}{2}e^{-x}}{2}\right) + \\
&+ \left[\mathrm{cn}\left(\sqrt[4]{4g_2}\,p; i\right)\mathrm{dn}\left(\sqrt[4]{4g_2}\,p; i\right)\right] = 0,\\
&\left[\mathrm{cn}^2\sqrt[4]{4g_2}\,q; \sqrt{2}\right](\cos\gamma) + \left[\mathrm{sn}^2\left(\sqrt[4]{4g_2}\,q; \sqrt{2}\right]\left(\frac{\dfrac{2e^x}{\sqrt{g_2}} - \dfrac{\sqrt{g_2}}{2}e^{-x}}{2}\right) + \\
&+ \left[-\mathrm{dn}\left(\sqrt[4]{4g_2}\,q; \sqrt{2}\right)\right] = 0,
\end{aligned}\right.$$

предполагая, что $g_2 > 0$, т. к. $g_2 = 0$ есть тривиальный случай.

Все входящие в (9.7) эллиптические функции легко выражаются известными формулами через лемнискатные еллиптические функции модуля $k = 1/\sqrt{2}$[1])

$$
(9.8)\quad \begin{cases}
\operatorname{sn}(u, i) = \dfrac{\operatorname{sn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\operatorname{dn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}, & \operatorname{cn}(u, i) = \dfrac{\operatorname{cn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{dn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \\
\operatorname{dn}(u; i) = \dfrac{1}{\operatorname{dn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}, & \operatorname{sn}(u, \sqrt{2}) = \dfrac{\operatorname{sn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}, \\
\operatorname{cn}(u; \sqrt{2}) = \operatorname{dn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & \operatorname{dn}(u; \sqrt{2}) = \operatorname{cn}\left(u\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{cases}
$$

Получаем окончательно

$$
(9.9)\quad \begin{cases}
\left[2\operatorname{dn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\cos y) \\
+\left[-\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{2e^x}{\sqrt{g_2}} - \dfrac{\sqrt{g_2}\,e^x}{2}}{2}\right) + \\
+\left[2\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0, \\
\left[2\operatorname{dn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\cos y) + \\
+\left[\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\dfrac{\dfrac{2e^x}{\sqrt{g_2}} - \dfrac{\sqrt{g_2}\,e^{-x}}{2}}{2}\right) + \\
+\left[-2\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0,
\end{cases}
$$

[1]) Мы не совсем точно называем эллиптические функции ламнискатными, если они могут быть выражены рациональной функцией якабиевых функций с модулем $k = 1\sqrt{2}$.

предполагая, что

$$g_2 > 0. \tag{9.10}$$

§ 10. Найдем канонические представления для (8.1) в гармоническом случае (9.1), когда

$$e_\alpha = -\frac{\sqrt{g_2}}{2}. \tag{10.1}$$

Можно исходить из (8.4), если считать $e_\beta =, 0 \quad e_\gamma = \frac{\sqrt{g_2}}{2}$ или, наоборот, $e_\beta = \frac{\sqrt{g_2}}{2}, e_\gamma = 0$.

В обоих случаях для зависимости

$$z = \ln\left[\wp(w; g_2; 0) + \frac{\sqrt{g_2}}{2}\right] \tag{10.2}$$

найдем

$$\left\{\begin{aligned} &(+1)(\cos y) + \left[-\mathrm{sn}^2\left(2p\sqrt[4]{g_2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^x}{\sqrt{g^2}} + \sqrt{g_2}\,e^{-x}}{4}\right) + \\ &+ \left[\mathrm{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0, \\ &\left[\mathrm{cn}^2\left(2q\sqrt[4]{g_2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right](\cos y) + \\ &+ \left[\mathrm{sn}^2\left(2q\sqrt[4]{g_2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^x}{\sqrt{g_2}} + \sqrt{g_2}\,e^{-x}}{4}\right) + \\ &+ \left[-\mathrm{dn}\left(2q\sqrt[4]{g_2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{10.3}$$

§ 11. Найдем канонические представления для (8.1) в гармоническом случае (9.1), когда

$$e_\alpha = \frac{\sqrt{g_2}}{2}. \tag{11.1}$$

Можно исходить из (8.6), если считать $e_\beta = 0, e_\gamma = -\frac{\sqrt{g_2}}{2}$ или, наоборот, $e_\beta = \frac{-\sqrt{g_2}}{2}$, $e_\gamma = 0$.

В обоих случаях для зависимости

$$z = \ln\left[\wp(w; g_2; 0) - \frac{\sqrt{g_2}}{2}\right]. \tag{11.2}$$

Найдем

$$\left\{\begin{aligned}&(-1)(\cos y) + \left[-\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^x}{\sqrt{g_2}} + e^{-x}\sqrt{g_2}}{4}\right) + \\ &+\left[\mathrm{cn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,q; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0 \\ &-\mathrm{cn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg](\cos y) + \\ &+\left[\mathrm{sn}^2\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\frac{2e^x}{\sqrt{g_2}} + e^{-x}\sqrt{g_2}}{4}\right) + \\ &+\left[-\mathrm{dn}\left(2\sqrt[4]{g_2}\,p\; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 0.\end{aligned}\right. \tag{11.3}$$

§ 12. Найдем канонические представления для

$$z = \ln\left[\wp(w; g_2; g_3) - e_\alpha\right], \tag{12.1}$$

когда

$$g_2 - 27g_3 < 0, \tag{12.2}$$

т. е. в случае двух комплексных корней, которыми мы будем считать e_β и e_γ, а e_α — действительный корень. Пусть

$$\left\{\begin{aligned}&e_\beta = m + ni, \quad e_\alpha = -2m, \quad e_\gamma = m - ni, \\ &H = \sqrt{9m^2 + n^2} \equiv \sqrt{2e_\alpha^2 + \frac{g_3}{4e_\alpha}} \equiv \sqrt{2e_\alpha^2 + e_\beta e_\gamma}, \\ &k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_\alpha}{4H}}, \qquad k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3e_\alpha}{4H}}.\end{aligned}\right. \tag{12.3}$$

Мы не будем исключать и случай вырождения, когда

$$n = 0. \tag{12.4}$$

При этом $e_\beta = e_\gamma$ и мы имеем

$$e_\beta = m,\ e_\alpha = -2m,\ e_\gamma = m,\ H = 3\,|\,m\,| = 3\,|\,e_\beta\,| = 3\,|\,e_\gamma\,|,$$

$$(12.5)\qquad k=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{m}{2\,|\,m\,|}}=\begin{cases}1, \text{ если } m>0\\ 0, \text{ если } m<0.\end{cases}$$

Используя равенства

$$(12.6)\qquad e_\alpha e_\beta+e_\beta e_\gamma+e_\gamma e_\eta=-\frac{g_2}{4},\qquad e_\alpha e_\beta e_\gamma=\frac{g_3}{4},$$

для двух случаев вырождения (12.5) найдем соответственно соотноешния:

$$(12{,}7)\qquad \begin{cases} 1)\, e_\beta=e_\gamma=-\dfrac{e_\alpha}{2}=m<0, \qquad g_2=3e_\alpha^2, \qquad g_3=e_\alpha^3>0,\\[2mm] H=\dfrac{3}{2}e=-3m, \qquad k=0, \qquad g_2^3-27g_3^2=0;\\[2mm] 2)\, e_\beta=e_\gamma=-\dfrac{e_\alpha}{2}=-m>0, \qquad g_2=3e_\alpha^3,\\[2mm] g_3=e_\alpha^3<0, \qquad H=-\dfrac{3}{2}e_\alpha=3m, \qquad k=1,\\[2mm] g_2^3-27g_3^2=0.\end{cases}$$

Таким образом, мы дадим канонические представления для (12.1) при условии более общем, чем (12.2).

$$(12.8)\qquad g_2^3-27g_3^2\leqq 0,$$

исключая лишь случай, когда при условии (12.4)

$$(12.9)\qquad m=0,\ e_\beta=e_\gamma=e_\alpha=0.$$

В канонические представления зависимости (12.1) (в которой естественно считать $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=3$, либо $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$) войдут эллиптические функции Якоби с аргументами не p и q непосредственно, а с множителем $2\sqrt{H}$ и при модулях k и k', определенных равенствами (12.3), включая и случаи вырождения (12.4), (12.7) при $m\neq 0$ ($m=0$ есть случай равенства нулю всех трех корней e_α, e_β, e_γ, который мы исключаем). Мы условимся такие эллиптические функции, если они содержат в аргументе p записывать обозначая, как в § 1 sn, cn, dn через s_1, c_1, d_1, а если в аргумент входит q, то условимся записывать их через s_2, c_2, d_2, как и раньше, но только рядом в скобках будем писать, во избежание недоразумений, и аргумент и модуль k или k', определенные равенствами (12.3). Если же имеем какую-нибудь функцию от таких функций s_2, c_2, d_2, либо s_1, c_1, d_1, то аргументы и модули, для краткости будем писать один раз рядом с функцией.

Так, например, в силу этого условия выражение

$$\frac{\operatorname{sn}^2\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H}}\right)\operatorname{cn}^2\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H}}\right)}{\operatorname{dn}\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H}}\right)}= \tag{12.10}$$

$$=\frac{s_2^2c_2^2}{d_2}\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H}}\right).$$

Канонические представления найдем, с помощью формул § 18 работы [5], устраняя двузначность при помощи уже известных из гл. IУ работы [4] канонических представлений для случаев вырождения (12.7), которые мы, однако, отдеьлно, за недостатком места, выписывать не будем. Получаем, припоминая условия этого § относительно обозначений эллиптических функций, следующие канонические представления для зависимости (12.1), включая и случаи вырождения, т. е. при условии (12.8), но с ограничением (12.9)

$$\tag{12.11}\left\{\begin{aligned}
&(+1)(\cos y)+\left[-\frac{s_1^2d_1^2}{c_1^2}\left(2\sqrt{H}p;\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]\times\\
&\times\left[\frac{\frac{e^x}{H}+He^{-x}}{2}\right]+\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3e_\alpha}{4H}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3e_\alpha}{4H}\right)c_2^4}{c_1^2}\right.\\
&\left.\left(2\sqrt{H}p;\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]=0,\\
&(+1)(\cos y)+\left[\frac{s_2^2d_2^2}{c_2^2}\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]\times\\
&\times\left[\frac{\frac{e^x}{H}+He^{-x}}{2}\right]+\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3e_\alpha}{4H}\right)s_2^2c_2^2-d_2^2}{c_2^2}\right.\\
&\left.\left(2\sqrt{H}q;\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_\alpha}{4H}}\right)\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

Отметим, что канонические представления (12.11) сохраняют смысл и при

$$(12.12)\qquad g_2^3 - 27g_3^2 > 0,$$

постольку, поскольку, согласно (12.3), для Н имеется второе более общее выражение

$$(12.13)\qquad H = \sqrt{2e_\alpha^2 + \frac{g_3}{4e_\alpha}},$$

не зависящее от m и n. Необходимо только требовать, чтобы, наряду с (12.12), имело место неравенство

$$(12,14)\qquad 2e_\alpha^2 + \frac{g_3}{4e_\alpha} > 0,$$

что предполагает

$$(12.15)\qquad e_\alpha \neq 0.$$

Если же

$$(12.16)\qquad e_\alpha = 0,$$

то имеем, рассмотренный в § 9 в предположении (12.12) гармонический случай, когда имеет место (9.1) и дробь $\frac{g_3}{4e_2}$ треяет смысл.

Но в силу (12.3) имеем еще более общее выражение для H, пригодное и при условии (12.16)

$$(12.17)\qquad H = \sqrt{2e_\alpha^2 + e_\beta e_\gamma}.$$

При условии (12.16) в силу (9.2) или (9.4) получаем

$$(12.18)\qquad H = \frac{\sqrt{-g_2}}{2}.$$

Таким образом, канонические представления (12.11) в условиях (12.16) годны только при

$$(12.19)\qquad g_2 < 0,$$

т. е. в условиях (9.5). Этот случай нами был пропущен.

§ 13. Канонические представления зависимости (9.6) в условиях (9.4) и (9.5), когда H выражается равенством (12.18), т. е. канонические представления функции

$$(9.6)\qquad z = \ln \wp(w; g_2; 0),$$

когда

$$g_2^3 - 27g_3^2 < 0, \ g_2 < 0 \tag{9.5}$$

имеют вид согласно (12.11) (сравнить с каноническими представлениями (9.9) для гармонического случая в условиях (9.2), (9.3)):

$$\begin{cases} (+1)(\cos y) + \left[-\dfrac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2}\, p; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \times \\ \times \left[\dfrac{\dfrac{2e^x}{\sqrt{-g_2}} + \dfrac{\sqrt{-g_2}}{2} e^{-x}}{2} \right] + \left[\dfrac{1 + c_1^4}{2c_1^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2}\, p; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = 0; \\ (+1)(\cos y) \left[\dfrac{s_2^2 d_2^2}{c_2^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2}\, q; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \times \\ \times \left[\dfrac{\dfrac{2e_x}{\sqrt{-g_2}} + \dfrac{\sqrt{-g_2}}{2} e^{-x}}{2} \right] + \\ + \left[\dfrac{s_2^2 c_2^2 - 2d_2^2}{2c_2^2} \left(\sqrt[4]{-4g_2}\, q; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = 0. \end{cases} \tag{13.1}$$

§ 14. Перейдем к номографированию эквигармонического случая функции (12.1), когда

$$g_2 = 0. \tag{14.1}$$

В этом случае

$$g_2^3 - 27g_3^2 \equiv -27g_3^2 < 0. \tag{14.2}$$

В силу ограничения (12.9) случай

$$g_3 = 0 \tag{14.3}$$

мы исключаем, т. е.

$$g_3 \neq 0. \tag{14.4}$$

Зависимость (12.1) примет вид

$$z = \ln\left[\wp(w; 0; g_3) - e_\alpha\right], \tag{14.5}$$

причём, как легко найти,

$$e_\alpha = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}, \qquad e_\beta = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\,\omega,$$

$$(14.6)\qquad e_\gamma = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\,\omega^2, \qquad \omega = \sqrt{1} \neq 1, \quad \operatorname{Im}\omega > 0.$$

С помощью (12.17) найдем

$$H = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{g_3^2}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{108 g_3^2}\,\sqrt[6]{\frac{27}{16}g_2^3},$$

$$(14.7)\qquad 2\sqrt{H} = \sqrt[6]{48\,|\,g_3\,|\,\sqrt{3}} = \sqrt[12]{6912 g_3^2}.$$

С помощью (12.3) найдем

$$k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin\frac{\pi}{12},$$

$$(14.8)\qquad k' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{12}.$$

С помощью (12.11) получим следующие канонические представления зависимости (14.5)

$$(14.9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(+1)(\cos y) + \left[-\frac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2}\left(\sqrt[6]{48\,|\,g_3\,|\,\sqrt{3}}\,p;\ \sin\frac{\pi}{12}\right)\right] \times \\
&\times\left(\frac{\dfrac{2e^x}{\sqrt[6]{108 g_3^2}} + \dfrac{\sqrt[6]{108 g_3^2}}{2}e^{-x}}{2}\right) + \\
&+\left[\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{12} + \sin^2\dfrac{\pi}{12}\,c_1^4}{2}\left(\sqrt[6]{48\,|\,g_3\,|\,\sqrt{3}}\,p;\ \sin\frac{\pi}{12}\right)\right] = 0,\\
&(+1)(\cos y) + \left[\frac{s_2^2 d_2^2}{c_2^2}\left(\sqrt[6]{48\,|\,g_3\,|\,\sqrt{3}}\,q;\ \cos\frac{\pi}{12}\right)\right] \times \\
&\times\left(\frac{\dfrac{2e^x}{\sqrt[6]{108 g_3^2}} + \dfrac{\sqrt[6]{108 g_3^2}}{2}e^{-x}}{2}\right) + \left[\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{12}\,s_2^2 c_2^2 - d_2^2}{c_2^2}\right.\\
&\left.\left(\sqrt[6]{48\,|\,g_3\,|\,\sqrt{3}}\,q;\ \cos\frac{\pi}{12}\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

§ 15. Эллиптический интеграл второго ряда

$$E(u;\,k)=\int_0^u\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}\,\mathrm{d}\xi, \tag{15.1}$$

где $u=x+\mu i$ — комплексная переменная — преобразуем подстановкой

$$z=\int_0^u\frac{dh}{\sqrt{1-k^2\sin^2 h}}\equiv F(u;\,k),\qquad u=amp(z;\,k). \tag{15.2}$$

Полагая

$$E(u;\,k)\equiv E(amp(z;\,k);\,k)=E[z;\,k], \tag{15.3}$$

найдем

$$E[z;\,k]=\int_0^z\mathrm{dn}^2\,(\sigma;\,k)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{15.4}$$

Введем функцию Якоби

$$Zn(z;\,k)=E[z;\,k]-\frac{E(k)}{K(k)}z=\int_0^z\mathrm{dn}^2\,(\sigma;\,k)-\frac{E(k)}{K(k)}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{15.5}$$

Полагая $z=K(k)$ в (15.2), найдем $u=\frac{\pi}{2}$,

$$E[K(k);\,k]=E\left(\frac{\pi}{2};\,k\right)=E(k), \tag{15.6}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго ряда. Полагая $z=0$, найдем с помощью (15.5), что $Zn(0;\,k)=0$.

В отличие от $E(u;\,k)$, функция $E[z;\,k]$ обладает теоремой сложения (хотя и не алгебраической, что для номографии никакого значения не имеет). Получим для (15.4) и для (15.5) соответственно

$$\begin{aligned}E[z;\,k]&=E[x;\,k]+\frac{k^2s_1c_1d_1s_2^2}{1-d_1^2s_2^2}+\\&+i\left\{y-E[y;\,k']+\frac{d_1^2s_2c_2d_2}{1-d_1^2s_2^2}\right\},\end{aligned} \tag{15.7}$$

где в s_1, c_1, d_1 аргументы равны x и модули равны k, а в s_2, c_2, d_2 аргументы равны y, а модули равны k'.

Таким образом, функции

$$w = E[z; k],\ w = Zn(z; k),\ w = p + qi \tag{15.8}$$

номографируемы (и табулируемы) в комплексной области.

Из (15.3) и (15.8) имеем

$$w = E(u; k),\ w = Zn(z; k). \tag{15.9}$$

Для зависимостей (15.8), используя (15.7), можно построить для каждого значения k либо просто абак, в частности, изотермический, полагая вещественную и мнимую части, равными p и q — либо номограммы с транспарантами. Но первая наша задача — номографировать или табулировать эллиптический интеграл второго рода (15.1) в комплексной области $u = \lambda + \mu i$. Из изложенного видно, что эллиптический интеграл (15.1) номографируется или табулируется при любом варианте номограммы первой зависимости (15.8) следующим образом. По $u = \lambda + \mu i$ с помощью номограммы автора для зависимости (15.2) находим $z = x + yi$ (вспомогательная комплексная переменная). По $z = x + yi$ с помощью номограммы для первой зависимости (15.8) находим w, что в силу первого из уравнений (15.9) и даёт значение w эллиптического интеграла второго рода. Если, наоборот, задано w и ищется u, то по номограмме для первого из уравнений (15.8) находим z, а по номограмме автора из выравненных точек для (15.2) находим $u = \lambda + \mu i$.

§ 16. В работе автора [5] была доказана номографируемость интегралов от двенадцати функций Якоби—Глешера.

Найдем некоторые из канонических представлений.

Рассмотрим, например, интеграл

$$z = \int_0^w \mathrm{cn}\,(\xi, k)\,d\xi. \tag{16.1}$$

Поскольку, предполагая $k \neq 0$,

$$\int_0^w \mathrm{cn}\,(\xi; k)\,d\xi = \frac{\arcsin\,(k\,\mathrm{sn}\,(w; k))}{k},$$

$$k\,\mathrm{sn}\,(w; k) = \mathrm{sn}\left(kw; \frac{1}{k}\right), \tag{16.2}$$

— представим зависимость (16.1) в любом из равносильных между собой видов

$$
(16.3)\quad \begin{cases} \sin(kz) = \operatorname{sn}\left(kw; \dfrac{1}{k}\right), & kz = amp\left(kw; \dfrac{1}{k}\right), \\ kw = \displaystyle\int\limits_0^{kz} \dfrac{d\xi}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{k^2}\sin^2\xi}}, & kz = \displaystyle\int\limits_0^{kw} \operatorname{dn}\left(\xi; \dfrac{1}{k}\right) d\xi. \end{cases}
$$

Сравнивая с (2.1) второй главы, вилим, что для получения канонических редставиений для (16.3), а, значит, и (16.1), достаточно в канонических представлениях (2.2) зависимости (2.1) сделать замену x, y, p, q, k, k' на соответственно kx, ky, kp, kq, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$.

Выполнив это, получим:

$$
(16.4)\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2kx) + \left[\dfrac{1 - C_1}{1 + C_1}\right](\operatorname{ch} 2ky) + \left[-\dfrac{2D_1}{1 + C_1}\right] = 0, \\ (+1)(\cos 2kx) + \left[-\dfrac{1 + C_2}{1 - C_2}\right](\operatorname{ch} 2ky) + \left[\dfrac{2D_2}{1 - C_2}\right] = 0. \end{cases}
$$

Не переходя к удвоенным аргументам, имели бы вместо (16.4)

$$
(16.5)\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2kx) + \left(\dfrac{s_1^2 d_1^2}{c_1^2}\right)(\operatorname{ch} 2ky) + \left[-\dfrac{d_1^2 - k^2 s_1^2 c_1^2}{c_1^2}\right] = 0, \\ (+1)(\cos 2kx) + \left(-\dfrac{c_2^2}{s_2^2 d_2^2}\right)(\operatorname{ch} 2ky) + \left[\dfrac{d_2^2 - k'^2 s_2^2 c_2^2}{s_2^2 d_2^2}\right] = 0. \end{cases}
$$

§ 17. Канонические представления для интеграла

$$
(17.1)\qquad z = \int\limits_0^w \operatorname{dn}(\xi; k)\, d\xi
$$

найдены в силу (4.1) в виде системы (2.2). Мы перепишем её в более удобном виде, с точки зрения численных расчётов, перейдя к двойным аргументам. Получим

$$
(17.2)\quad \begin{cases} (+1)(\cos 2x) + \left[\dfrac{k^2S_1^2}{(1+D_1)^2}\right](\operatorname{ch} 2y) + \\ + \left[-\dfrac{2C_1(k'^2+D_1+k_2C_1)}{(1+D_1)^2(D_1+C_1)}(1+C_1)\right] = 0, \\ (+1)(\cos 2x) + \left[-\dfrac{(D_2+C_2)^2}{k^2S_2^2}\right](\operatorname{ch} 2y) + \\ + \left[\dfrac{2(k^2+D_2+k'^2C_2)}{k^2(1-C_2)(1+D_2)}\right] = 0. \end{cases}
$$

Отметим, что в силу (17.1)

$$
(17.3)\qquad z = \operatorname{arcsinsn}(w;\,k)
$$

или

$$
(17.4)\qquad \sin z = \operatorname{sn}(w;\,k).
$$

При $k = 0$ и $k = 1$ получаем соотношения нулевого жанра

$$
(17.5)\qquad w = (-1)^n z + n\pi,\quad \sin z = \operatorname{th} w.
$$

Из второго из них вытекают такие равносильные зависимости нулевого жанра

$$
\cos z = \pm\frac{1}{\operatorname{ch} w},\qquad \operatorname{tg} z = \pm \operatorname{sh} w,
$$

$$
(17.6)\qquad \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \operatorname{th}\frac{w}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \operatorname{cth}\frac{w}{2}.
$$

§ 18. Канонические представления для интеграла

$$
(18.1)\qquad z = \int_0^w \operatorname{sn}(\xi;\,k)\,d\xi
$$

можно получить многими способами из полученных выше.

Поскольку,

$$
\int_0^w \operatorname{sn}(\xi;\,k)\,d\xi = \frac{1}{k}\ln\frac{\operatorname{dn}(w;\,k) - k\operatorname{cn}(w;\,k)}{1-k} =
$$

$$
= \frac{1}{k}\operatorname{arch}\frac{\operatorname{dn}(w;\,k) - k^2\operatorname{cn}(w;\,k)}{1-k^2} =
$$

$$= \frac{1}{k}\operatorname{arsh}\left[k\,\frac{\operatorname{dn}(w;k)-\operatorname{cn}(w;k)}{1-k^2}\right] = \frac{1}{k}\operatorname{arch}\frac{1}{k'} -$$

$$-\frac{1}{k}\operatorname{arch}\frac{\operatorname{dn}(w;k)}{k'} = \frac{1}{k}\operatorname{arsh}\frac{k}{k'} -$$

$$-\frac{1}{k}\operatorname{arsh}\frac{k\operatorname{cn}(w;k)}{k'}, \tag{18.2}$$

— можно воспользоваться пятью видами соотношения (18.1). Например, последний вид даёт

$$\operatorname{sh}\left(kz-\operatorname{arsh}\frac{k}{k'}\right) = \frac{k}{k'}\operatorname{cn}(w;k) \tag{18.3}$$

или

$$\sin\left(ikz - i\operatorname{arsh}\frac{k}{k'}\right) = \frac{ik}{k'}\operatorname{cn}(w;k). \tag{18.4}$$

Но имеют место тождества (см. § 12 работы [5]):

$$\begin{cases} \operatorname{cn}(w;k) = \operatorname{sn}\left(k'K(k)+k'w;\dfrac{ik}{k'}\right), \\ \operatorname{dn}(w;k) = k'\operatorname{sn}(K'(k)-iK(k)+iw;k'), \end{cases} \tag{18.5}$$

позволяющие все 12 функций Якоби—Глешера при $k \neq 0$, $k \neq 1$, когда вопрос разрешается элементарно, выражать через любую из них. С помощью (18.5) зависимость (18.4) примет вид

$$\sin\left(ikz - i\operatorname{arsh}\frac{k}{k'}\right) = \frac{ik}{k'}\operatorname{sn}\left(k'w+k'K(k);\frac{ik}{k'}\right). \tag{18.6}$$

Но имеет место тождество

$$\lambda\operatorname{sn}(\alpha;\lambda) = \operatorname{sn}\left(\lambda\alpha;\frac{1}{\lambda}\right), \tag{18.7}$$

позволяющее вносить множитель, равный модулю, под знак эллиптического синуса, изменяя модуль на обратный. Таким образом, зависимость (18.6) в силу (18.7) примет вид

$$\sin\left(ikz - i\operatorname{arsh}\frac{k}{k'}\right) = \operatorname{sn}\left(ikw+ikK(k);\frac{iK'}{k}\right). \tag{18.8}$$

Для получения канонических представлений для (18.1) этой (второй) главы перепишем (18.8) так:

$$ikw + ikK(k) = \int_0^{ikz - i\,\mathrm{arsh}\,\frac{k'}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ik'}{k}\right)^2 \sin^2 \xi}}. \tag{18.9}$$

Мы получили зависимость (2.1), прономографированную в § 2. Для получения канонического представления зависимости (18.8), а, значит, и данной зависимости (18.1), достаточно в канонических представлениях (2.2) (или в (17.2)) заменить x, y, p, q k, k' на соответственно

$$\mathrm{Re}\left(ikz - i\,\mathrm{arsh}\,\frac{k}{k'}\right), \qquad \mathrm{Im}\left(ikz - i\,\mathrm{arsh}\,\frac{k}{k'}\right),$$

$$\mathrm{Re}\,(ikw + ikK(k)), \qquad \mathrm{Im}\,(ikw + ikK(k)), \qquad \frac{ik'}{k}, \qquad \frac{1}{k}.$$

При этом $\cos(2x)$ заменится на $\cos(2ky)$; $\mathrm{ch}\,(2y)$ заменится на $\dfrac{e^{2kx}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon} + e^{-2kx}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}$; $\left(\dfrac{k^2 s_1^2 c_1^2}{d_1^2}\right)$ заменится на $\dfrac{k'^2 s_2^2}{c_2^2 d_2^2}(iq;\ k)$[1] $= -k'^2\dfrac{s_2^2 c_2^2}{d_2^2}$, где в правой части последнего равенства, в соответствии с принятыми обозначениями, аргументом и модулем служат q и k'; $\left(-\dfrac{c_2^2 d_2^2}{k^2 s_2^2}\right)$ заменится на $\dfrac{k'^2 s_1^2}{c_1^2 d_1^2}$, где аргументом и модулем эллиптических функций служат p и k в соответствии с принятыми обозначениями; $\dfrac{s_1^2 d_1^2 - c_1^2}{d_1^2}$ заменится на $-\dfrac{k^2 s_2^2 c_2^2 + d_2^2}{c_2^2 d_2^2}(iq;\ k) = \dfrac{k^2 s_2^2 - c_2^2 d_2^2}{d_2^2}$, где в правой части последнего равенства аргументом и модулем служат соответственно $\dfrac{1 - k'^2 s_2^4}{k^2 s_2^2} \equiv \dfrac{s_2^2 d_2^2 + c_2^2}{k^2 s_2^2}$ заменится на $-\dfrac{k^2 s_1^2 c_1^2 + d_1^2}{c_1^2 d_1^2}$.

[1]) В тех случаях, когда аргументом и модулем эллиптических функций служит не p и k, а $f(p)$ и $\varphi(k)$ и соответственно не q и k', а $f(q)$ и $\varphi(k')$, мы, воизбежание недоразумений, рядом в скобках указываем аргумент и модуль.

Канонические представления зависимости (18.1) при помощи (2.2) запиутся теперь так:

$$(+1)(\cos(2ky)) + \left(-\frac{k'^2 s_2^2 c_2^2}{d_2^2}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{e^{2kx}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon} + e^{-2kx}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}\right] + \left(\frac{k^2 s_2^2 - c_2^2 d_2^2}{d_2^2}\right) = 0,$$

$$(18.10_1)$$

$$(+1)(\cos(2ky)) + \left(\frac{k'^2 s_1^2}{c^2 d_1^2}\right)\left[\frac{e^{2kx}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\varepsilon} + e^{-2kx}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\varepsilon}}{2}\right] +$$

$$(18.10_2) \qquad + \left(-\frac{k^2 s_1^2 c_1^2 + d_1^2}{c_1^2 d_1^2}\right) = 0.$$

Мы здесь же отметим, что эти канонические представления верны не только при

$$(18.11) \qquad -\infty < k < +\infty,$$

поскольку при условии (18.11) не нарушается вещественность канонических представлений (18.10). Но и при

$$(18.12) \qquad -\infty < k^2 < +\infty.$$

Эти представления сохраняют силу и при k чисто-мнимом, ибо e^{2kx} и e^{-2kx} комплексносопряженные при k — чисто-мнимом, кроме того $\frac{1-k}{1+k}$ и $\frac{1+k}{1-k}$ при чисто мнимом k, как легко выяснить, комплексно сопряжены и, значит, в квадратных скобках стоит вещественное сопряжение.

Итак мы получили канонические представления для (18.1). Если бы преобпазовали данную зависимость к любому из соотношений (3.1), (3.2), (3.3) этой главы, то воспользовались бы каноническими представлениями (3.4), которые, впрочем, получены из представлений (2.2).

Так как интегралы от двенадцати функций Якоби-Глешера выражаются логарифмами или обратными тригонометрическими или гиперболическими функциями от одной из трёх функций Якоби (после преобразований аналогичных, указанным), то аналогичным способом получаем их канонические представления из (2.2).

§ 19. Можно применять и несколько изменённый метод, который мы проиллюстрируем на примере того же интеграла (18.1).

Пользуясь равенством (12.1) работы [5], получим вместо (18.1)

$$z = -\varepsilon_1 \int\limits_0^w \mathrm{dn}\left[ik\xi + \varepsilon_1 ikK(k); \frac{ik}{k'}\right] d\xi, \tag{19.1}$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$.

Полагая

$$ik\xi + \varepsilon_1 ikK(k) = \sigma,$$

$$d\xi = \frac{d\sigma}{ik}, \tag{19.2}$$

получим

$$z = \frac{i\varepsilon_1}{k} \int\limits_{\varepsilon_1 ikK(k)}^{ikw + \varepsilon_1 ikK(k)} \mathrm{dn}\left[\sigma; \frac{ik'}{k}\right] d\sigma. \tag{19.3}$$

или

$$-\varepsilon_1 ikz + \int\limits_0^{\varepsilon_1 ikK(k)} \mathrm{dn}\left[\sigma; \frac{ik'}{k}\right] d\sigma = \int\limits_0^{ikw+\varepsilon_1 ikK(k)} \mathrm{dn}\left[\sigma; \frac{ik}{k'}\right] d\sigma. \tag{19.4}$$

Остаётся в (2.2) заменить x и y реальности коэффициентом при мнимой части левой части равенства (19.4), а p и q соответственно вещественной и коэффициентом при мнимой части верхнего предела интеграла, стоящего справа в (19.4), а k и k' заменить соответственно на $\frac{ik}{k'}$ и $\frac{1}{k'}$. Стоящий слева в (19.4) интеграл может быть вычислен. Мы не будем это заканчивать (см. аналогичное вычисление в следующем параграфе).

§ 20. Еще проще можно найти канонические представления (18.1) с помощью второй формулы (12.1) работы [5]. Наметим этот путь.

Имеем, полагая $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$,

$$\mathrm{sn}\,(\xi; k) = -\frac{\varepsilon}{k}\,\mathrm{dn}\,[i\xi + \varepsilon_2 K'(k) + \varepsilon i K(k); k']. \tag{20.1}$$

Значит,

$$(20.2)\qquad \int\limits_0^w \operatorname{sn}(\xi; k)\,d\xi = \frac{i\varepsilon}{k}\int\limits_{\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)}^{iw+\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)} \operatorname{dn}[\sigma; k']\,d\sigma.$$

Зависимость (18.1) примет вид

$$-\varepsilon ikz - \int\limits_0^{\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)} \operatorname{dn}[\sigma; k']\,d\sigma =$$

$$(20.3)\qquad = \int\limits_0^{iw+\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)} \operatorname{dn}[\sigma; k']\,d\sigma.$$

Упростим, интеграл, стоящий слева в (20.3). Обозначив его через u, в силу равносильных форм зависимостей (2.1), получим

$$(20.4)\qquad \varepsilon_2 K'(k) + \varepsilon i K(k) = \int\limits_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}}.$$

Но, как легко проверить,

$$\int\limits_0^{\varepsilon_2\frac{\pi}{2}+\varepsilon i \operatorname{arch}\frac{1}{k'}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}} = \int\limits_0^{\varepsilon_2\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}} +$$

$$(20.5)\qquad + \int\limits_{\varepsilon_2\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon_2\frac{\pi}{2}+\varepsilon i \operatorname{arch}\frac{1}{k'}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\xi}} = \varepsilon_2 K'(k) + \varepsilon i K(k).$$

Следовательно,

$$(20.6)\qquad u = \int\limits_0^{\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)} \operatorname{dn}[\sigma; k']\,d\sigma = \varepsilon_2\frac{\pi}{2} + \varepsilon i \operatorname{arch}\frac{1}{k'}.$$

Зависимость (18.1) примет вид

$$-\varepsilon ikz - \varepsilon_2\frac{\pi}{2} - \varepsilon i \operatorname{arch}\frac{1}{k'} =$$

$$(20.7)\qquad = \int\limits_0^{iw+\varepsilon_2 K'(k)+\varepsilon i K(k)} \operatorname{dn}[\sigma; k']\,d\sigma.$$

Для получения канонического представления для (18.1) остается в (2.2) (или в (17.2)) заменить x, y, p, q, k, k' на соответственно

$$(20.8)\qquad \begin{cases} \operatorname{Re}\left(-\varepsilon ikz - \varepsilon_2\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon i \operatorname{arch}\dfrac{1}{k'}\right), \\ \operatorname{Im}\left(-\varepsilon ikz - \varepsilon_2\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon i \operatorname{arch}\dfrac{1}{k'}\right), \\ \operatorname{Re}\,(iw + \varepsilon_2 K'(k) + \varepsilon i K(k)), \\ \operatorname{Im}\,(iw + \varepsilon_2 K'(k) + \varepsilon i K(k)), \quad k', \quad k. \end{cases}$$

Особенно просто всё, когда

$$(20.9)\qquad 0 \leqq k^2 \leqq 1,$$

но наш результат общий, т. е.

$$(20.10)\qquad -\infty < k^2 < +\infty.$$

§ 21. Мы прономографировали три интеграла (16.1), (17.1), (18.1).

Справедлива теорема. Если прономографированы эти три интеграла, то канонические представления остальных десяти сводятся к этим трем.

Для доказательства достаточно сослаться на тождества (7.4) этой главы.

К этим формулам заведомо придется прибегнуть в трех более сложных случаях

$$z = \int_0^w \frac{d\xi}{\operatorname{sn}(\xi; k)}, \qquad z = \int_0^w \frac{d\xi}{\operatorname{cn}(\xi; k)},$$

$$(21.1)\qquad z = \int_0^w \frac{d\xi}{\operatorname{dn}(\xi; k)}.$$

Что же касается интегралов от парных отношений, то их можно быстро номографировать не прибегая к формулам (7.4), так например,

$$(21.2)\qquad z = \int_0^w \frac{\operatorname{cn}[\xi; k]}{\operatorname{dn}[\xi; k]}\, d\xi.$$

Так как

$$(21.3) \qquad \int_0^w \frac{\operatorname{cn}[\xi; k]}{\operatorname{dn}[\xi; k]} d\xi = \frac{1}{2k} \ln \frac{1 + k \operatorname{sn}(w; k)}{1 - k \operatorname{sn}(w; k)},$$

то зависимость (21.2) равносильна зависимости (см. (18.7))

$$(21.4) \qquad \operatorname{th} kz = \operatorname{sn}\left(kw; \frac{1}{k}\right),$$

которая отждествляется с первой зависимостью (3.3), и каноническое представление для (21.4), а, значит, и для данного интеграла (21.2), получим из канонических представлений (3.4) зависимости (3.3), заменив в них p_1, q_1, p_k, q_k, k, k' на kx, ky, kp, kq, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$.

С последующим переходом в них от эллиптических функций мнимого модуля $\frac{ik'}{k}$ к вещественному модулю k, либо через мнимое преобразование Якоби к модулю k' при помощи равенств типа $\operatorname{sn}\left(u; \frac{ik'}{k}\right) = k \operatorname{sd}\left(\frac{u}{k}, k'\right)$ и т. д.

При указанной замене $\cos(2q_1)$ заменится на $\cos(2ky)$; $\operatorname{ch}(2p_1)$ заменится на $\operatorname{ch}(2kx)$; $\frac{k'^2 s_2^2 c_2^2}{d_2^2}$ заменится на $-k'^2 \frac{s_2^2 c_2^2}{d_2^2}$, где аргументом и модулем в согласии с принятыми обозначениями служат q и k'; $-\frac{c_1^2 d_1^2}{k'^2 s_2^1}$ заменится на $\frac{1}{k'^2} \frac{c_1^2 d_1^2}{s_1^2}$, где аргументом и модулем в согласии с принятыми обозначениями, служат p и k; $\frac{s_2^2 d_2^2 - c_2^2}{d_2^2}$ заменится на $\frac{k^2 s_2^2 - c_2^2 d_2^2}{d_2^2} = \frac{k^2 s_2^4 - c_2^4}{d_2^2}$, где аргументом и модулем, в согласии с принятыми обозначениями, служат q и k'; $\frac{1 - k^2 s_1^4}{k'^2 s_1^2} \equiv \frac{s_1^2 d_1^2 + c_1^2}{k'^2 s_1^2}$ заменится на $-\frac{k^2 s_1^2 c_1^2 + d_1^2}{k'^2 s_1^2} \equiv \frac{k^2 s_1^4 - 1}{k'^2 s_1^2}$, где в согласии с принятыми обозначениями, аргументом и модулем служат p и k.

Канонические представления зависимости (21.2), согласно (3.4), запишутся так:

$$(+1)(\cos(2ky)) + \left(-k'^2\frac{s_2^2c_2^2}{d_2^2}\right)(\operatorname{ch}(2kx)) +$$

$$(21.4_1)\qquad + \left[\left(\frac{k^2s_2^4 - c_2^4}{d_2^2}\right) \equiv \left(\frac{k^2s_2^2 - c_2^2d_2^2}{d_2^2}\right)\right] = 0,$$

где в эллиптических функциях аргументом служит q и модулем k'

$$(+1)(\cos(2ky)) + \left(\frac{1}{k'^2}\frac{c_1^2d_1^2}{s_1^2}\right)(\operatorname{ch}(2kx)) +$$

$$(21.4_2)\qquad + \left[\left(\frac{k^2s_1^4 - 1}{k'^2s_1^2}\right) \equiv \left(-\frac{k^2s_1^2c_1^2 + d_1^2}{k'^2s_1^2}\right)\right]^{1)} = 0,$$

где в элиптических функциях аргументом служит p и модулем k.

---

[1]) В квадратных скобках условно записаны два тождественных выражения последнего члена уравнений (21.4_1) и (21.4_2).

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Вильнер, *Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов.* Успехи мат. наук, т. IX, в. 2 (60), (1954), стр. 113—124.

[2] И. А. Вильнер, *Топология и геометрия пространства мнимой анаморфозы.* Успехи мат. наук, т. XIII, в. 4 (82), (1958).[1])

[3] И. А. Вильнер, *Номографическая аппроксимация эллиптических функций и номография в комплексных проективных плоскостях.* Сборник „Вычислительная математика", № 7 (1961), глава II, изд. Вычислит. Центра АН СССР.

[4] И. А. Вильнер *Номографирование систем уравнений и аналитических функций.* Номографический сборник МГУ (1951).

[5] И. А. Вильнер, *Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса.* Математический сборник, 27, вып. 1 (1950).

[6] J. A. Viln'er, *Heelementarní nomogramy rovnic třetího nomografického řádu a jejich automorfní transformace.* Sborník teoretických statí a praktických aplikací sestavil Václav Pleskot, Praha (1962), Nakladatelství československé Akad. věd, стр. 37—85[2]).

[7] И. А. Вильнер, *Проблемы номографической интерпретации функций комплексного переменного и задачи Коши,* § 4, стр. 387—388, Сборник „Исследования по современным проблемам теории функции комплексного переменного". Сборник статей п/р А. И. Маркушевича Физматгиз (1960).

[8] И. А. Вильнер, *Номограммы систем уравнений и аналитических функций ДАН,* т. 58, № 5 (1947).

[9] И. А. Вильнер, *О линейной зависимости функции и методе условных производных и бесквадратурной номографии,* Сборник статей Всесоюзн.

---

[1]) В связи с этой работой сделаем следующее уточнение. В сноске на стр. 173, выпуск 4 (82), т. 13 УМН, имеется некоторая неточность, вызванная напрасной экономией места. „Под пространством K_2 понимается пространство Мебиуса точек, прямых, окружностей плоскости Евклида, замкнутой одной бесконечно удаленной точкой, т. е. расширенная плоскость комплексного переменного. Геометрия этого пространства есть очевидно геометрия обратных радиусов-векторов, расширенная группа преобразований, в которой (сохраняющих множество указанных элементов и углы с изменением, быть может, их ориентации) аналитически дается формулами:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Таким образом, термин конформное „пространство K_2 понимается в узком смысле слова круговой геометрии, т. к. в буквальном смысле слова о конформной геометрии K_n допустимо говорить, согласно известной теореме Лиувилля, лишь при $n \geq 3$".

[2]) Мы пользуемся ссылкой на этот сборник, чтобы указать на опечатку в нашей статье на стр. 49 в четвертой строке текста после формулы (3.3). Напечатано $\Gamma = \sqrt[3]{-29}$, вместо $\Gamma = \sqrt[3]{-2g}$, где g — это обозначение $\frac{\Delta(g)}{16} = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{26}$.

заочн. политехн. ин-та вып. 7 (1954), стр. 105—128 (см. также стр. 126, 127).

[10] И. А. Вильнер, *Стереоскопическая номография и решение проблемы общей анаморфозы в N-мерном пространстве,* УМН, т. XI, в. 4 (70).

[11] Evžen Jokl, *Transformace nomogramu na elační síti*", Сборник „Nomografické metody", под ред. Václav Pleskot, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha (1962), стр. 117—122.

[12] И. А. Вильнер, *Пучок совместных конических номограмм из выравненных точек для изображения эллиптического интеграла первого рода,* УМН, № 6 (1947).

[13] И. А. Вильнер, *Номограмма для вычисления гиперболического и кругового тангенсов и котангенсов от комплексного аргумента,* Прикл. мат. и мех., т. IV, в. 1 (1940).

[14] И. А. Вильнер, *Бесквагратурная номография и номографирование в комплексных проективных плоскостях.* Труды Четвертого Всесоюзного Математического Съезда, т. II, стр. 186—194, изд. „Наука" АН СССР (1964).

[15] М. В. Пентковский, *Номография,* ГТТИ (1949).

[16] И. А. Вильнер, *Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография.* Сборник статей Всесоюзного заочного политехнического института, выпуск 21 (1958), стр. 98—118, см. § 5.