Karel Svoboda

Déformation symplectique des congruences de droites

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 1, 59--74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104581

DÉFORMATION SYMPLECTIQUE DES CONGRUENCES DE DROITES

PAR KAREL SVOBODA, BRNO

Présenté le 12 Décembre 1964

Dans un des travaux [2] consacrés à l'étude des congruences de droites plongées dans un espace symplectique à trois dimensions, R. M. Gejdeľman s'est occupé des questions relatives à la déformation du second ordre. Les résultats principaux de ce travail consistent, avant tout, en ce qu'il a décrit, dans tous les cas possibles, les types des congruences de droites qui admettent la déformation symplectique du second ordre. Il a démontré, par example, que les congruences non-paraboliques, qui ne sont pas contenues dans le complexe absolu de l'espace et qui admettent la déformation symplectique du second ordre, appartiennent à la classe des congruences W de C. Segre dont les surfaces focales réglées sont plongées dans le complexe absolu.

Ce mémoire est déstiné à la généralisation des résultats de R. M. Gejdeľman aux congruences de droites dans des espaces symplectiques à une dimension impaire quelconque et à la recherche des types des congruences qui admettent la déformation symplectique du second ordre. Pour plus de simplicité, toutes les considérations suivantes sont bornées au cas des congruences non-paraboliques en position tout-à-fait générale par rapport au complexe absolu de l'espace ambiant.

Nous résumerons, dans les préliminaires suivants, quelques résultats de la théorie des espaces symplectiques d'après le mémoire [3] de R. M. Gejdeľman.

1. Dans un espace projectif S_{2n-1} à $2n - 1$ dimensions ($n \geqq 3$) choisissons un repère formé de $2n$ points linéairement indépendants A_i ($i = 1, \ldots, 2n$) dont les coordonnées homogènes sont normalisées de manière que

$$[A_1A_2 \ldots A_{2n}] = 1. \tag{1.1}$$

Considérons un complexe linéaire non-singulier K de droites qui est défini, par rapport au repère en question, par l'équation

$$g_{ij}p^{ij} = 0\ (i, j = 1, \ldots, 2n;\ g_{ij} + g_{ji} = 0), \tag{1.2}$$

où $p^{ij} = x^iy^j - x^jy^i$ sont des coordonnées plückeriennes d'une droite passant par deux points différents $X = (x^i)$ et $Y = (y^i)$. En introduisant, pour un couple de points X, Y, le symbole $\langle XY\rangle$ en vertu de la relation $\langle XY\rangle = g_{ij}x^iy^j$, on a pour les coefficients de (1.2)

$$g_{ij} = \langle A_iA_j\rangle. \tag{1.3}$$

Les points X, Y, pour lesquels $\langle XY\rangle = 0$, sont conjugués par rapport au complexe linéaire K et la droite XY appartient au complexe K. Les points conjugués, par rapport au complexe K, à un point donné X remplissent un hyperplan $\xi = (x_i)$ de l'espace S_{2n-1}, dont les coordonnées, par rapport au repère considéré, satisfont aux équations $x_i = g_{ij}x^j$. Ces équations déterminent dans l'espace S_{2n-1} une corrélation nulle N qui fait correspondre, à chaque point X de l'espace S_{2n-1}, un hyperplan ξ passant par le point X et conjugué au point X par rapport au complexe linéaire K.

Les homographies regulières de l'espace S_{2n-1}, qui laissent invariant le complexe linéaire K, s'appellent *transformations symplectiques* et elles engendrent un sous-groupe du groupe des homographies de l'espace S_{2n-1}. L'espace projectif dont le groupe fondamental est le sous-groupe des transformations symplectiques s'appelle *espace symplectique* et le complexe linéaire K est dit *complexe absolu* de l'espace en question. Nous désignerons par Sp_{2n-1} un espace symplectique à $2n-1$ dimensions.

Le mouvement infinitésimal du repère formé de points A_i s'exprime par un système d'équations différentielles de la forme

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^jA_j (i, j = 1, \ldots, 2n), \tag{1.4}$$

les ω_i^j étant des formes différentielles linéaires en différentielles des paramètres dont dépend la position du repère dans l'espace. Les formes ω_i^j satisfont aux équations de structure d'un espace projectif

$$[\mathrm{d}\omega_i^j] = [\omega_i^k\omega_k^j] (i, j, k = 1, \ldots, 2n) \tag{1.5}$$

et aux relations symplectiques

$$\omega_i^kg_{kj} + \omega_j^kg_{ik} = \mathrm{d}g_{ij} \quad (i, j, k = 1, \ldots, 2n). \tag{1.6}$$

En vertu de la normalisation choisie des points A_i on a encore, d'après (1.1),

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{2n}^{2n} = 0. \tag{1.7}$$

2. Dans un espace symplectique Sp_{2n-1} considérons une congruence L de droites possédant deux surfaces focales différentes. La congruence L peut être décomposée en deux couches différentes de surfaces développables qui déterminent, sur chaque des deux surfaces focales, un réseau conjugué. Supposons que les espaces osculateurs d'ordre $k = 1,2$ le long d'une droite quelconque de la congruence L soient à $2k+1$ dimensions. Dans toutes les considérations suivantes, nous allons nous borner aux congruences L qui se trouvent en position générale par rapport au complexe absolu K en ce sens qu'elles n'appartiennent pas au complexe absolu K de l'espace Sp_{2n-1} et que leurs espaces osculateurs d'ordre $k = 1,2$ coupent le complexe K en question en complexes linéaires non-singuliers. Cela étant, on peut déterminer, dans chaque espace osculateur d'ordre k, précisément $k+1$ droites qui n'appartiennent pas au complexe K et qui sont conjuguées deux à deux par rapport au complexe considéré.

A une droite p quelconque de la congruence L, nous associerons un repère mobile formé de points A_i linéairement indépendants de manière à prendre les points A_1, A_2 pour foyers de la droite p et à choisir les autres points $A_3, \ldots, A_{2n}$ dans le sous-espace linéaire $\bar{p}$ à $2n-3$ dimensions qui correspond à la droite considérée p dans la corrélation nulle N. L'espace osculateur du premier ordre (l'espace tangent) P de la congruence L le long de la droite p coupe l'espace $\bar{p}$ en une droite p_1 qui n'appartient pas au complexe K et qui passe par les points d'intersection de l'espace $\bar{p}$ avec les plans tangents des surfaces focales (A_1) et (A_2). Sans restreindre la généralité, nous choisirons les points A_3, A_4 aux points d'intersection mentionnés. La corrélation nulle N fait correspondre à la droite p_1 le sous-espace linéaire $\bar{p}_1$ à $2n-3$ dimensions qui passe par la droite p et coupe l'espace $\bar{p}$ en un sous-espace $\bar{P}$ à $2n-5$ dimensions associé, par la corrélation N, à l'espace tangent P de la congruence L. Rien n'empêche de choisir les points $A_5, \ldots, A_{2n}$ dans l'espace $\bar{P}$ en question. L'espace osculateur du second ordre de la congruence L le long de la droite p coupe le sous-espace $\bar{P}$ en une droite p_2 qui n'appartient pas de même au complexe K et qui passe par les points d'intersection de l'espace $\bar{P}$ avec les espaces osculateurs du second ordre des surfaces focales (A_1) et (A_2). Alors, nous pouvons achever le choix particulier du repère associé à la droite p de la congruence L de manière à faire coïncider les points A_5, A_6 avec les points d'intersection mentionnés et à prendre, dans le cas de $n > 3$, les points $A_7, \ldots, A_{2n}$ dans le sous-espace linéaire $\bar{p}_2$ qui correspond à la droite p_2 dans la corrélation N.

Cela étant, nous avons choisi le repère associé à la droite p de la congruence L de telle façon que les points $A_{2\alpha-1}$, $A_{2\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ sont conjugués, par rapport au complexe absolu K, avec tous les autres points fondamentaux du repère en question. On a alors, d'après (1.3),

$$(2.1) \qquad g_{2\alpha-1,\beta} = 0, \; g_{2\alpha,\beta} = 0 \; (\alpha = 1, 2, 3; \; \beta = 2\alpha+1, \ldots, 2n),$$

les équations qui s'obtiennent pour $\alpha = 3$ étant à supprimer si $n = 3$, et on peut s'arranger, par une normalisation convenable des points du repère considéré, que

$$g_{12} = g_{34} = g_{56} = 1. \tag{2.2}$$

Le repère mobile étant choisi de la manière précédente, les relations symplectiques (1.6) ont la forme suivante

$$\begin{gathered}\omega_{2\alpha-1}^{2\beta-1} + \omega_{2\beta}^{2\alpha} = 0, \ \omega_{2\alpha}^{2\beta-1} - \omega_{2\beta}^{2\alpha-1} = 0, \ \omega_{2\alpha-1}^{2\beta} - \omega_{2\beta-1}^{2\alpha} = 0, \\ \omega_{2\alpha-1}^{k} g_{kj} + \omega_{j}^{2\alpha} = 0, \quad \omega_{2\alpha}^{k} g_{kj} - \omega_{j}^{2\alpha-1} = 0, \\ \omega_{i}^{k} g_{kj} + \omega_{j}^{k} g_{ik} = \mathrm{d}g_{ij} \\ (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \ i, j, k = 7, \ldots, 2n),\end{gathered} \tag{2.3}$$

les équations écrites dans les dernières deux lignes n'entrant pas en compte dans un espace à cinq dimensions.

Les suppositions faites au sujet du choix du repère associé à la congruence L en question s'expriment par les relations

$$\begin{gathered}[A_1 \ldots A_{2\alpha} A_{2\alpha+1} \, \mathrm{d}^\alpha A_1] = 0, \ [A_1 \ldots A_{2\alpha} A_{2\alpha+2} \, \mathrm{d}^\alpha A_2] = 0 \\ (\alpha = 1{,}2)\end{gathered} \tag{2.4}$$

qui donnent, en y substituant d'après (1.4), le système suivant

$$\begin{gathered}\omega_1^4 = 0, \omega_2^3 = 0, \omega_3^6 = 0, \omega_4^5 = 0, \\ \omega_{2\alpha-1}^{\beta} = 0, \omega_{2\alpha}^{\beta} = 0 \ (\alpha = 1{,}2; \ \beta = 2\alpha + 3, \ldots, 2n),\end{gathered} \tag{2.5}$$

le groupe d'équations écrites dans la seconde ligne pour $\alpha = 2$ étant à supprimer si $n = 3$. Par la différentiation extérieure des équations (2.5) on obtient les relations extérieures quadratiques

$$\begin{gathered}[\omega_1^2 \omega_2^4] + [\omega_1^3 \omega_3^4] = 0, [\omega_2^1 \omega_1^3] + [\omega_2^4 \omega_4^3] = 0, \\ [\omega_3^4 \omega_4^6] + [\omega_3^5 \omega_5^6] = 0, [\omega_4^3 \omega_3^5] + [\omega_4^6 \omega_6^5] = 0, \\ [\omega_1^3 \omega_3^5] = 0, [\omega_2^4 \omega_4^6] = 0, \\ [\omega_3^5 \omega_5^j] = 0, [\omega_4^6 \omega_6^j] = 0 \ (j = 7, \ldots, 2n),\end{gathered} \tag{2.6}$$

les formules écrites dans la dernière ligne étant à supprimer si $n = 3$.

En prenant pour les formes linéairement indépendantes ω_1^3, ω_2^4 la notation

$$\omega_1^3 = \omega_1, \ \omega_2^4 = \omega_2 \tag{2.7}$$

on a en particulier, d'après (2.6),

$$\omega_3^5 = a\omega_1, \ \omega_4^6 = b\omega_2, \tag{2.8}$$

où $ab \neq 0$ en vertu des suppositions faites plus haut.

D'après (2.6), (2.7) et (2.8), on a ensuite

$$
\begin{aligned}
(2.9)\qquad & \omega_1^2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_0\omega_2,\ \omega_2^1 = \beta_1\omega_2 - \beta_0\omega_1,\\
& \omega_3^4 = a\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2,\ \omega_4^3 = b\beta_2\omega_2 - \beta_1\omega_1,\\
& \omega_5^6 = \alpha_3\omega_1 - b\alpha_2\omega_2,\ \omega_6^5 = \beta_3\omega_2 - a\beta_2\omega_1
\end{aligned}
$$

et, d'autre part,

$$
(2.10)\qquad \omega_5^j = \gamma_5^j\omega_1,\ \omega_6^j = \gamma_6^j\omega_2\ (j = 7, \ldots, 2n)
$$

si $n > 3$. Les relations symplectiques (2.3) fournissent, d'après (2.5), (2.7), (2.8), (2.10), les équations

$$
\begin{aligned}
(2.11)\qquad & \omega_3^1 = -\omega_2,\ \omega_4^2 = -\omega_1,\ \omega_5^3 = -b\omega_2,\ \omega_6^4 = -a\omega_1,\\
& \omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_5^4 = 0,\ \omega_6^3 = 0,\\
& \omega_\beta^{2\alpha-1} = 0,\ \omega_\beta^{2\alpha} = 0,\ (\alpha = 1,2;\ \beta = 2\alpha+3, \ldots, 2n),\\
& \omega_j^5 = \gamma_6^k g_{kj}\omega_2,\ \omega_j^6 = -\gamma_5^k g_{kj}\omega_1\ (j, k = 7, \ldots, 2n)
\end{aligned}
$$

soumises, dans le cas de $n = 3$, à la restriction habituelle. La différentiation extérieure du système d'équations (2.8), (2.9), (2.10) donne les rélations extérieures quadratiques, qui peuvent être ramenées, par un calcul facile, à la forme

$$
\begin{aligned}
(2.12)\qquad & [\omega_1(\mathrm{d}a + a\,.\,\overline{\omega_1^1 - 2\omega_3^3 + \omega_5^5})] = 0,\\
& [\omega_2(\mathrm{d}b + b\,.\,\overline{\omega_2^2 - 2\omega_4^4 + \omega_6^6})] = 0,\\
& [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\,.\,\overline{\omega_2^2 - \omega_3^3})] - [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_0 + \alpha_0\,.\,\overline{2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4})] = 0,\\
& a[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2\,.\,\overline{\omega_4^4 - \omega_5^5})] - [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\,.\,\overline{\omega_2^2 - \omega_3^3})] = 0,\\
& [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_3 + \alpha_3\,.\,\overline{\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_5^5 + \omega_6^6})] - b[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2\,.\,\overline{\omega_4^4 - \omega_5^5})] = 0,\\
& [\omega_1(\mathrm{d}\beta_0 + \beta_0\,.\,\overline{2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3})] - [\omega_2(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\,.\,\overline{\omega_1^1 - \omega_4^4})] = 0,\\
& [\omega_1(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\,.\,\overline{\omega_1^1 - \omega_4^4})] - b[\omega_2(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2\,.\,\overline{\omega_3^3 - \omega_6^6})] = 0,\\
& a[\omega_1(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2\,.\,\overline{\omega_3^3 - \omega_6^6})] - [\omega_2(\mathrm{d}\beta_3 + \beta_3\,.\,\overline{\omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_5^5 - \omega_6^6})] = 0
\end{aligned}
$$

et, en outre, dans le cas de $n > 3$ les relations

$$
\begin{aligned}
(2.13)\qquad & [\omega_1(\mathrm{d}\gamma_5^j + \gamma_5^j\,.\,\overline{\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_5^5} + \gamma_5^k\omega_k^j)] = 0,\\
& [\omega_2(\mathrm{d}\gamma_6^j + \gamma_6^j\,.\,\overline{\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_6^6} + \gamma_6^k\omega_k^j)] = 0\\
& (j, k = 7, \ldots, 2n),
\end{aligned}
$$

les formes ω_i^i $(i = 1, \ldots, 6)$ satisfaisant, d'après (2.3), aux conditions symplectiques suivantes

$$
(2.14)\qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\ \omega_5^5 + \omega_6^6 = 0.
$$

Il découle facilement des équations précédentes (2.12) que toutes les fonctions a, b, α_i, β_i $(i = 0, \ldots, 3)$ sont des invariants relatifs de la congruence L en question. Dans ce qui suit, nous nous bornerons au cas général qui se traduit par la supposition que, non seulement a, b, mais aussi toutes les fonctions α_i, β_i soient différentes de zéro.

La congruence considérée L de l'espace symplectique Sp_{2n-1} se trouve définie, d'après les résultats précédents, par le système d'équations différentielles (1.4) dont les coefficients satisfont aux équations (2.5), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11). Le système correspondant est donc le suivant

(2.15)

$$\begin{aligned}
dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1 A_3,\\
dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4,\\
dA_3 &= -\omega_2 A_1 + \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 + a\omega_1 A_5,\\
dA_4 &= -\omega_1 A_2 + \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + b\omega_2 A_6,\\
dA_5 &= -b\omega_2 A_3 + \omega_5^5 A_5 + \omega_5^6 A_6 + \gamma_5^j \omega_1 A_j,\\
dA_6 &= -a\omega_1 A_4 + \omega_6^5 A_5 + \omega_6^6 A_6 + \gamma_6^j \omega_2 A_j,\\
dA_i &= \gamma_6^j g_{ji} \omega_2 A_5 - \gamma_5^j g_{ji} \omega_1 A_6 + \omega_i^j A_j\\
&\qquad (i, j = 7, \ldots, 2n).
\end{aligned}$$

Il faut substituer dans le système précédent d'après les équations (2.9) et supprimer, dans le cas de $n = 3$, les membres qui comprennent les points $A_7, \ldots, A_{2n}$.

3. Outre la congruence L de l'espace Sp_{2n-1} nous allons considérer une autre congruence L' plongée dans un espace symplectique $S'p_{2n-1}$ et déterminée par le système d'équations différentielles que l'on obtient de (2.15) en y désignant toutes les quantités par un accent. Supposons que les droites des congruences L et L' se correspondent dans une correspondance développable C portant chaque surface développable de la congruence L dans une développable contenue dans la congruence L'.

Faisant usage de la notation habituelle

$$(3.1) \qquad \tau_i^j = \omega_i'^j - \omega_i^j \; (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

on peut supposer, sans restreindre la généralité, que la correspondance envisagée C soit donnée, d'après (2.7), par les équations

$$(3.2) \qquad \tau_1^3 = 0, \; \tau_2^4 = 0$$

dont les différentielles extérieures s'expriment par les relations suivantes

$$(3.3) \qquad [\omega_1(\tau_3^3 - \tau_1^1)] = 0, \; [\omega_2(\tau_4^4 - \tau_2^2)] = 0.$$

Or, on a, d'après (2.14),

$$\tau_1^1 + \tau_2^2 = 0, \ \tau_3^3 + \tau_4^4 = 0, \ \tau_5^5 + \tau_6^6 = 0 \tag{3.4}$$

et on vérifie facilement, en vertu du lemme de Cartan, que

$$\tau_3^3 - \tau_1^1 = 0, \ \tau_4^4 - \tau_2^2 = 0. \tag{3.5}$$

On a alors, d'après (3.4) et (3.5), pour deux congruences L et L' en correspondance développable les égalités

$$\tau_1^1 = -\tau_2^2 = \tau_3^3 = -\tau_4^4, \ \tau_5^5 + \tau_6^6 = 0 \tag{3.6}$$

dont la première entraîne, par la différentiation extérieure, l'équation suivante

$$\alpha_0'\beta_0' - 2\alpha_1'\beta_1' + a'b'(\alpha_2'\beta_2' - 1) = \alpha_0\beta_0 - 2\alpha_1\beta_1 + ab(\alpha_2\beta_2 - 1) \tag{3.7}$$

qui exprime la condition nécessaire pour qu'une correspondance C entre les congruences L et L' soit développable.

Une correspondance développable C entre deux congruences L et L' s'appelle *déformation symplectique du second ordre*, s'il existe, pour chaque couple de droites correspondantes des congruences L et L', au moins une transformation symplectique H entre les espaces Sp_{2n-1} et $S'p_{2n-1}$ qui réalise un contact analytique du second ordre des congruences L et L'. Une transformation symplectique H qui jouit des propriétés précitées s'appelle *transformation osculatrice* à la correspondance C.

Nous déduirons les conditions nécessaires et suffisantes pour la déformation symplectique du second ordre des congruences L et L'. Pour cela, considérons une transformation symplectique H donnée par les équations

$$HA_i = a_i^j A_j' \ (i, j = 1, \ldots, 2n) \tag{3.8}$$

dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes

$$a_i^r a_j^s g_{rs} = g_{ij} (i, j, r, s = 1, \ldots, 2n) \tag{3.9}$$

qui résultent facilement du fait que la transformation H doit porter le complexe absolu K de l'espace Sp_{2n-1} dans le complexe absolu K' de l'espace $S'p_{2n-1}$.

Les conditions analytiques pour qu'une transformation symplectique H soit osculatrice à la correspondance C consistent dans l'existence d'une telle forme de Pfaff ϑ que les équations suivantes ont lieu

$$H[A_1A_2] = [A_1'A_2'], \tag{3.10}$$
$$H\,\mathrm{d}[A_1A_2] = \mathrm{d}[A_1'A_2'] + \vartheta[A_1'A_2'],$$
$$H\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = \mathrm{d}^2[A_1'A_2'] + 2\vartheta\,\mathrm{d}[A_1'A_2'] + (.)\,[A_1'A_2'].$$

Cela étant, on a pour la congruence L, d'après (2.15),

$$\mathrm{d}[A_1A_2] = \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3], \tag{3.11}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2[A_1A_2] = {} & -2\omega_1\omega_2[A_1A_2] - (\omega_1\omega_2^1 - \omega_2\omega_4^3)\,[A_1A_3] + \\ & + (\mathrm{d}\omega_2 + \overline{\omega_2 \,.\, \omega_1^1 + \omega_4^4})\,[A_1A_4] + b(\omega_2)^2\,[A_1A_6] - \\ & - (\mathrm{d}\omega_1 + \overline{\omega_1 \,.\, \omega_2^2 + \omega_3^3})\,[A_2A_3] - (\omega_1\omega_3^4 - \omega_2\omega_1^2)\,[A_2A_4] - \\ & - a(\omega_1)^2\,[A_2A_5] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4]\end{aligned}$$

et les relations analogues sont vraies même pour la congruence L'.

Comme les foyers des congruences L et L' doivent se correspondre dans une transformation H, qui réalise le contact analytique au moins du premier ordre des congruences L et L', nous pouvons choisir, ayant égard à la première équation (3.10), la transformation H de façon que

$$a_1^1 = \varrho,\quad a_1^2 = 0,\quad a_1^j = 0,\quad a_2^1 = 0,\quad a_2^2 = \varrho^{-1},\quad a_2^j = 0 \qquad (j = 3, \ldots, 2n). \tag{3.12}$$

En vertu de (2.1), (2.2) on a ensuite, d'après (3.9), (3.12),

$$a_j^1 = 0,\ a_j^2 = 0\ (j = 3, \ldots, 2n) \tag{3.13}$$

de sorte que les équations de la transformation symplectique H en question prennent la forme suivante

$$HA_1 = \varrho A_1',\ HA_2 = \varrho^{-1}A_2',\ HA_i = a_i^jA_j' \qquad (i, j = 3, \ldots, 2n). \tag{3.14}$$

On a maintenant, d'après (3.11),

$$H\,\mathrm{d}[A_1A_2] = \varrho\omega_2a_4^j[A_1'A_j'] - \varrho^{-1}\omega_1a_3^j[A_2'A_j'] \qquad (j = 3, \ldots, 2n) \tag{3.15}$$

et la seconde equation (3.10) est remplie, en vertu de (3.11) et (3.15), dans ce cas seulement si

$$\vartheta = 0 \tag{3.16}$$

et si l'on a pour les coefficients des équations de la transformation H

$$a_3^3 = \varrho,\ a_3^4 = 0,\ a_3^j = 0,\ a_4^3 = 0,\ a_4^4 = \varrho^{-1},\ a_4^j = 0 \qquad (j = 5, \ldots, 2n). \tag{3.17}$$

Les conditions (3.9) entraînent ensuite, d'après (2.1), (2.2), (3.17),

$$(3.18)\qquad a_j^3 = 0,\ a_j^4 = 0\,(j = 5, \ldots, 2n)$$

de sorte que la *transformation tangente* H, qui réalise le contact analytique du premier ordre des congruences L et L', se trouve déterminée par les équations suivantes

$$(3.19)\quad HA_1 = \varrho A_1',\ HA_2 = \varrho^{-1}A_2',\ HA_3 = \varrho A_3',\ HA_4 = \varrho^{-1}A_4',\ HA_i = a_i^j A_j'(i, j = 5, \ldots, 2n).$$

Faisant usage de ces équations nous déduirons de la seconde équation (3.11)

$$(3.20)\ H\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = -2\omega_1\omega_2[A_1'A_2'] - \varrho^2(\omega_1\omega_2^1 - \omega_2\omega_4^3)\,[A_1'A_3'] + \\ + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\,.\,\overline{\omega_1^1 + \omega_4^4})\,[A_1'A_4'] + \varrho b(\omega_2)^2\, a_6^j[A_1'A_j'] - \\ - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\,.\,\overline{\omega_2^2 + \omega_3^3})\,[A_2'A_3'] - \varrho^{-2}(\omega_1\omega_3^4 - \omega_2\omega_1^2)\,[A_2'A_4'] - \\ - \varrho^{-1}a(\omega_1)^2\, a_5^j[A_2'A_j'] + 2\omega_1\omega_2[A_3'A_4'] \quad (j = 5, \ldots, 2n).$$

On en obtient, en substituant les expressions (3.11), (3.16), (3.20) dans la dernière équation (3.10) et en comparant les coefficients, le système d'équations

$$(3.21)\qquad \omega_1'^2 = \varrho^{-2}\omega_1^2,\ \omega_2'^1 = \varrho^2\omega_2^1,\ \omega_3'^4 = \varrho^{-2}\omega_3^4,\ \omega_4'^3 = \varrho^2\omega_4^3$$

qui fournissent, d'après (2.9), les relations

$$(3.22)\qquad \alpha_0' = \varrho^{-2}\alpha_0,\ \alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1,\ a'\alpha_2' = \varrho^{-2}a\alpha_2,\\ \beta_0' = \varrho^2\beta_0,\ \beta_1' = \varrho^2\beta_1,\ b'\beta_2' = \varrho^2 b\beta_2$$

et, en outre, les conditions pour les coefficients des équations de la transformation osculatrice H

$$(3.23)\quad aa_5^5 = \varrho a',\ a_5^6 = 0,\ a_5^j = 0,\ a_6^5 = 0,\ ba_6^6 = \varrho^{-1}b',\ a_6^j = 0\\ (j = 7, \ldots, 2n),$$

les équations qui déterminent a_5^j, a_6^j perdant la validité si $n = 3$.

Or, on a, d'après (3.9), $a_5^5a_6^6 = 1$ et en outre, dans le cas de $n > 3$,

$$(3.24)\qquad a_j^5 = 0,\ a_j^6 = 0\,(j = 7, \ldots, 2n).$$

Cela étant, on déduit de (3.23) la rélation

$$(3.25)\qquad a'b' = ab$$

qui est une conséquence immédiate du système d'équations (3.7) et (3.22) et qui ne donne, pour cette raison, aucune condition nouvelle. Ayant égard à (3.25), il est possible d'éffectuer, en vertu de (2.12) et des équations analogues relatives à la congruence L', un choix convenable des repères attachés aux congruences L et L' de manière que

$$a' = a,\ b' = b. \tag{3.26}$$

Cela étant, nous pouvons résumer les résultats obtenus dans les considérations précédentes:

Une correspondance développable C entre les congruences L et L' est une déformation symplectique du second ordre si et seulement si $a' = a$, $b' = b$ et s'il existe une fonction $\varrho \neq 0$ qui satisfait au système d'équations

$$\begin{aligned} \alpha_0' &= \varrho^{-2}\alpha_0,\ \alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1,\ \alpha_2' = \varrho^{-2}\alpha_2, \\ \beta_0' &= \varrho^{2}\beta_0,\ \beta_1' = \varrho^{2}\beta_1,\ \beta_2' = \varrho^{2}\beta_2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Une transformation symplectique H qui réalise le contact analytique du second ordre des congruences L et L' se trouve déterminée par les équations

$$\begin{aligned} &HA_1 = \varrho A_1',\ HA_2 = \varrho^{-1}A_2',\ HA_3 = \varrho A_3',\ HA_4 = \varrho^{-1}A_4', \\ &HA_5 = \varrho A_5',\ HA_6 = \varrho^{-1}A_6',\ HA_i = a_i^jA_j'\ (i, j = 7, \ldots, 2n), \end{aligned} \tag{3.28}$$

le groupe d'équations écrites en dernier lieu étant à supprimer si $n = 3$.

4. Les conditions analytiques pour la déformation symplectique des congruences L et L' peuvent être interprétées d'une autre manière géométrique. Pour ce but, considérons les deux surfaces focales (A_1) et (A_2) de la congruence L ainsi que le couple de surfaces (A_3) et (A_4) qui se trouvent, en vertu de la construction précédente du repère associé à la congruence, parfaitement déterminées par cette congruence. Une correspondance C entre les congruences L et L' définie, d'une manière univoque, certaines correspondances ponctuelles entre les surfaces (A_1) et (A_1'), (A_2) et (A_2'), (A_3) et (A_3'), (A_4) et (A_4'). Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation tangente H à la correspondance C entre les congruences L et L' réalise un contact analytique du premier ordre de tous les couples de surfaces envisagées. On obtient facilement, d'après (2.15) et (3.19),

$$\begin{aligned} &HA_1 = \varrho A_1',\ H\,\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}(\varrho A_1') + (.)\,A_1' + (\varrho^{-1}\omega_1^2 - \varrho\omega_1'^2)\,A_2', \\ &HA_2 = \varrho^{-1}A_2',\ H\,\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}(\varrho^{-1}A_2') + (.)\,A_2' + (\varrho\omega_2^1 - \varrho^{-1}\omega_2'^1)\,A_1', \\ &HA_3 = \varrho A_3',\ H\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}(\varrho A_3') + (.)\,A_3' + (\varrho^{-1}\omega_3^4 - \varrho\omega_3'^4)\,A_4' + \\ &\qquad\qquad + a\omega_1 a_5^j A_j' - \varrho a'\omega_1 A_5', \\ &HA_4 = \varrho^{-1}A_4',\ H\,\mathrm{d}A_4 = \mathrm{d}(\varrho^{-1}A_4') + (.)\,A_4' + (\varrho\omega_4^3 - \varrho^{-1}\omega_4'^3)\,A_3' + \\ &\qquad\qquad + b\omega_2 a_6^j A_j' - \varrho^{-1}b'\omega_2 A_6' \\ &\qquad\qquad (j = 5, \ldots, 2n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

et il en résulte qu'une transformation tangente H vérifie les conditions indiquées plus haut si et seulement si les équations (3.21), (3.23) ont lieu.

Donc, les considérations qui précèdent permettent d'énoncer le résultat suivant:

Une corréspondance développable C entre les congruences L et L' est une déformation symplectique du second ordre si et seulement s'il existe, pour un couple quelconque de droites correspondantes des congruences L et L', au moins une transformation symplectique H qui est tangente à la correspondance C et simultanément tangente aux correspondances entre les couples suivants de surfaces (A_1) et (A_1'), (A_2) et (A_2'), (A_3) et (A_3'), (A_4) et (A_4').

Nous allons interpréter les conditions pour la déformation symplectique encore d'une autre manière. Pour cela, considérons les systèmes à deux paramètres de droites $[A_1A_3]$ et $[A_2A_4]$ qui appartiennent au complexe absolu K et qui se trouvent parfaitement définis par la congruence L. Une correspondance développable C entre les congruences L et L' détermine certaines correspondances entre les couples de systèmes réglés $([A_1A_3])$ et $([A_1'A_3'])$, $([A_2A_4)]$ et $([A_2'A_4'])$. Nous allons nous proposer de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation tangente H à la correspondance C entre les congruences L et L' réalise un contact analytique du premier ordre des couples de systèmes réglés en question. Tout d'abord, on a, d'après (2.15),

$$
\begin{aligned}
(4.2)\quad \mathrm{d}[A_1A_3] &= (\omega_1^1 + \omega_3^3)\,[A_1A_3] + \omega_3^4[A_1A_4] + a\omega_1[A_1A_5] + \omega_1^2[A_2A_3],\\
\mathrm{d}[A_2A_4] &= (\omega_2^2 + \omega_4^4)\,[A_2A_4] + \omega_4^3[A_2A_3] + b\omega_2[A_2A_6] + \omega_2^1[A_1A_4]
\end{aligned}
$$

et on en obtient, faisant usage de (3.19),

$$
\begin{gathered}
(4.3)\qquad H[A_1A_3] = \varrho^2[A_1'A_3'],\\
H\,\mathrm{d}[A_1A_3] = \mathrm{d}(\varrho^2[A_1'A_3']) + (.)\,[A_1'A_3'] + (\omega_3^4 - \varrho^2\omega_3'^4)\,[A_1'A_4'] +\\
+ \varrho a\omega_1 a_5^j[A_1'A_j'] - \varrho^2 a'\omega_1[A_1'A_5'] + (\omega_1^2 - \varrho^2\omega_1'^2)\,[A_2'A_3'],\\
H[A_2A_4] = \varrho^{-2}[A_2'A_4'],\\
H\,\mathrm{d}[A_2A_4] = \mathrm{d}(\varrho^{-2}[A_2'A_4']) + (.)\,[A_2'A_4'] + (\omega_4^3 - \varrho^{-2}\omega_4'^3)\,[A_2'A_3'] +\\
+ \varrho^{-1}b\omega_2 a_6^j[A_2'A_j'] - \varrho^{-2}b'\omega_2[A_2'A_6'] + (\omega_2^1 - \varrho^{-2}\omega_2'^1)\,[A_1'A_4']\\
(j = 5, \ldots, 2n).
\end{gathered}
$$

Les équations (4.3) montrent qu'une transformation H jouit des propriétés indiquées si et seulement si l'on a (3.21), (3.23)

Le calcul précédent donne ainsi le résultat suivant:

Une correspondance développable C entre les congruences L et L' est une déformation symplectique du second ordre si et seulement s'il existe, pour un couple quelconque de droites correspondantes des congruences

L et L', au moins une transformation symplectique H qui est tangente à la correspondance C et simultanément tangente aux correspondances entre les couples de systèmes réglés $([A_1A_3])$ *et* $([A'_1A'_3])$, $([A_2A_4])$ *et* $([A'_2A'_4])$.

5. Maintenant, nous allons nous occuper de la recherche des types de congruences L qui admettent la déformation symplectique du second ordre. Sans restreindre la généralité, nous pouvons effectuer les études correspondantes en supposant que les repères attachés aux congruences L et L' soient choisis de façon que

$$\varrho = 1. \tag{5.1}$$

Un tel choix des repères est toujours possible, comme on le voit facilement de (2.12) et des équations analogues pour la congruence L'.

Cela étant, les conditions (3.21) pour la déformation symplectique des congruences L et L' prennent, d'après (5.1), la forme suivante

$$\tau_1^2 = 0,\ \tau_2^1 = 0,\ \tau_3^4 = 0,\ \tau_4^3 = 0. \tag{5.2}$$

Les congruences L' qui sont en déformation symplectique avec une congruence donneé L se trouvent determinées par les équations différentielles (3.6), (5.2) et par les équations que l'on peut écrire, d'après (2.5), (2.8), (3.2), (3.26), sous la forme

$$\begin{gathered} \tau_1^3 = 0,\ \tau_2^4 = 0,\ \tau_3^5 = 0,\ \tau_4^6 = 0, \\ \tau_1^4 = 0,\ \tau_2^3 = 0,\ \tau_3^6 = 0,\ \tau_4^5 = 0, \\ \tau_{2\alpha-1}^{\beta} = 0,\ \tau_{2\alpha}^{\beta} = 0\ (\alpha = 1{,}2;\ \beta = 2\alpha + 3, \ldots, 2n). \end{gathered} \tag{5.3}$$

En vertu des relations symplectiques on a encore, d'après (2.11), (3.26),

$$\begin{gathered} \tau_3^1 = 0,\ \tau_4^2 = 0,\ \tau_5^3 = 0,\ \tau_6^4 = 0, \\ \tau_4^1 = 0,\ \tau_3^2 = 0,\ \tau_6^3 = 0,\ \tau_5^4 = 0, \\ \tau_{\beta}^{2\alpha-1} = 0,\ \tau_{\beta}^{2\alpha} = 0\ (\alpha = 1{,}2;\ \beta = 2\alpha + 3, \ldots, 2n), \end{gathered} \tag{5.4}$$

les équations qui s'obtiennent de (5.3) et (5.4) pour $\alpha = 2$ étant à supprimer si $n = 3$.

Les conditions d'intégrabilité du système d'équations différentielles (5.2) sont exprimées par les relations extérieures quadratiques

$$\begin{gathered} [\omega_1^2(\tau_1^1 - \tau_2^2)] = 0,\ [\omega_2^1(\tau_1^1 - \tau_2^2)] = 0, \\ [\omega_3^4(\tau_1^1 - \tau_2^2)] = 0,\ [\omega_4^3(\tau_1^1 - \tau_2^2)] = 0 \end{gathered} \tag{5.5}$$

qui montrent que deux cas et deux seulement sont à considérer suivant que $\tau_1^1 - \tau_2^2 = 0$ ou bien $\tau_1^1 - \tau_2^2 \neq 0$.

Si $\tau_1^1 - \tau_2^2 = 0$, on a, d'après (3.6), (5.2), (5.3), (5.4),

$$\tau_i^j = 0 (i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 2n) \tag{5.6}$$

et on dit que la déformation symplectique du type considéré est *triviale.*

L'exigence qu'une correspondance développable soit une déformation symplectique triviale des congruences L et L' n'a pour conséquence aucune condition qui borne la généralité de la congruence L. Donc, *chaque congruence L de l'espace symplectique Sp_{2n-1} admet la déformation symplectique triviale du second ordre.*

Au contraire, si $\tau_1^1 - \tau_2^2 \neq 0$, le système, qui s'obtient de (5.5) en y substituant à ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 les expressions (2.3), a une solution non-triviale par rapport à $[\omega_1(\tau_1^1 - \tau_2^2)]$, $[\omega_2(\tau_1^1 - \tau_2^2)]$. Pour cela, il faut et il suffit que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_1 & b\beta_2 \\ \alpha_1 & a\alpha_2 & \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

soit égal à l'unité, et ce cas se produit si et seulement si l'on a les relations

$$\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_1,\ \alpha_0\beta_1 = b\alpha_1\beta_2,\ a\alpha_0\alpha_2 = \alpha_1^2 \tag{5.7}$$

qui permettent d'exprimer les formes ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 en question moyennant une forme arbitrairement choisie entre elles. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que les combinaisons linéaires considérées aient, d'après (2.9) et (5.7), la forme

$$\alpha_0\omega_2^1 + \beta_1\omega_1^2 = 0,\ \alpha_0\omega_3^4 - \alpha_1\omega_1^2 = 0,\ \alpha_1\omega_4^3 + \beta_1\omega_1^2 = 0, \tag{5.8}$$

où

$$\omega_1^2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_0\omega_2. \tag{5.9}$$

Dans le cas en question, nous dirons que la déformation symplectique est *non-triviale.* Chaque congruence L qui admet la déformation symplectique non-triviale est définie, d'après les considérations qui précèdent, par le système d'équations différentielles (2.5), (2.8), (2.10), (5.8), (5.9). Les conditions d'intégrabilité du système en question sont exprimées par les équations écrites dans les premières deux et dans les dernières deux lignes du système (2.12) et, en outre, par les relations extérieures quadratiques

$$\begin{gathered}[\omega_1\, D\alpha_1] - [\omega_2\, D\alpha_0] = 0,\ [\omega_1^2(\beta_1\, D\alpha_0 - \alpha_0\, D\beta_1)] = 0, \\ [\omega_1^2(\alpha_0\, D\alpha_1 - \alpha_1\, D\alpha_0)] = 0,\ [\omega_1^2(\beta_1\, D\alpha_1 - \alpha_1\, D\beta_1)] = 0,\end{gathered} \tag{5.10}$$

où l'on a posé

$$\text{(5.11)} \quad \mathrm{D}\alpha_0 = \mathrm{d}\alpha_0 + \alpha_0(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4), \; \mathrm{D}\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_2^2 - \omega_3^3),$$
$$\mathrm{D}\beta_1 = \mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_1^1 - \omega_4^4).$$

Or, on vérifie facilement qu'il existe précisément une relation linéaire parmi les équations (5.10) et cela nous permet de montrer que le système considéré d'équations différentielles de la congruence L est en involution et que sa solution générale dépend de $4n - 7$ fonctions arbitraires d'une variable. *Les congruences L d'un espace symplectique Sp_{2n-1}, qui admettent la déformation symplectique non-triviale du second ordre, existent et dépendent de $4n - 7$ fonctions arbitraires d'une variable.*

On a, en vertu des équations de structure (1.5), $[\mathrm{d}\omega_1^2] = [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)]$ de sorte que l'équation $\omega_1^2 = 0$ est complètement intégrable et elle définie donc une couche de courbes sur la surface focale (A_1) dont les tangentes appartiennent au complexe absolu K. Nous appelerons les courbes en question *courbes complectiques* de la surface focale (A_1). D'une manière analogue, l'équation $\omega_2^1 = 0$ définie les courbes complectiques sur la surface focale (A_2). Cela étant, la première équation (5.8) montre que les courbes complectiques des deux surfaces focales se correspondent mutuellement dans la correspondance ponctuelle qui se trouve déterminée sur les surfaces focales par les droites de la congruence en question.

On a, en vertu de (2.15),

$$\text{(5.12)} \quad \mathrm{d}^2 A_1 = (.)\, A_1 + \mathrm{d}\omega_1^2 A_2 + (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1 \,.\, \overline{\omega_1^1 + \omega_3^3})\, A_3 +$$
$$+ (\omega_1\omega_3^4 + \omega_2\omega_1^2)\, A_4 + a(\omega_1)^2\, A_5,$$
$$\mathrm{d}^2 A_2 = \mathrm{d}\omega_2^1 A_1 + (.)\, A_2 + (\omega_1\omega_2^1 + \omega_2\omega_4^3)\, A_3 +$$
$$+ (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2 \,.\, \overline{\omega_2^2 + \omega_4^4})\, A_4 + b(\omega_2)^2\, A_6$$

et il en résulte, d'après (5.8), que $[A_1A_3A_5]$ est le plan osculateur de la courbe $\omega_1^2 = 0$ au point A_1 et que, simultanément, $[A_2A_4A_6]$ est le plan osculateur au point A_2 de la courbe $\omega_2^1 = 0$. Or, les plans en question appartiennent au complexe absolu K. Nous pouvons résumer les recherches précédentes dans le théorème suivant:

Les congruences L d'un espace symplectique Sp_{2n-1}, qui admettent la déformation symplectique non-triviale du second ordre, se présentent comme les congruences jouissant de la propriété que les courbes complectiques de leurs surfaces focales se correspondent mutuellement et que les plans osculateurs des courbes complectiques appartiennent au complexe absolu K.

Maintenant, nous allons faire attention aux transformations symplectiques H qui réalisent la déformation symplectique des congruences L et L' et nous allons essayer de décrire la différence entre la déformation triviale et non-triviale. Pour cette raison, considérons de nouveau les correspondances ponctuelles entre les surfaces focales des congruences L et L', qui sont induites par une correspondance développable C donnée, et envisageons, en outre, une transformation osculatrice H à la correspondance C. On a, d'après (2.15), (3.5), (3.21), (3.26), (3.28), (5.1), (5.12),

$$(5.13)\qquad HA_1 = A_1', \; H\,\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}A_1' - \tau_1^1 A_1',$$
$$H\,\mathrm{d}^2A_1 = \mathrm{d}^2A_1' - 2\tau_1^1\,\mathrm{d}A_1' + (.)\,A_1' + 2\omega_1^2\tau_1^1 A_2'$$

et, d'une manière analogue,

$$(5.14)\qquad HA_2 = A_2', \; H\,\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}A_2' - \tau_2^2 A_2',$$
$$H\,\mathrm{d}^2A_2 = \mathrm{d}^2A_2' - 2\tau_2^2\,\mathrm{d}A_2' + (.)\,A_2' + 2\omega_2^1\tau_2^2 A_1'.$$

Il en suit que chaque transformation osculatrice H à la correspondance C réalise un contact du premier ordre entre les couples de surfaces focales (A_1) et (A_1'), (A_2) et (A_2') des congruences L et L'. Ce contact est du second ordre si et seulement si l'on a $\omega_1^2\tau_1^1 = 0$ dans le cas des surfaces focales (A_1), (A_1') et $\omega_2^1\tau_2^2 = 0$ dans le cas du couple de surfaces focales (A_2), (A_2').

Comme les formes ω_1^2, ω_2^1 ne sont pas, en vertu des suppositions faites plus haut, identiquement nulles, nous pouvons déduire de la considération précédente le résultat suivant rélatif à la déformation symplectique triviale:

La déformation symplectique C des congruences L et L' est triviale si et seulement si chaque transformation osculatrice H à la correspondance C réalise le contact analytique du second ordre entre les surfaces focales correspondantes des congruences L et L'.

Dans le cas de la déformation symplectique non-triviale, on a $\tau_1^1 \neq 0 \neq \tau_2^2$ et les équations $\omega_1^2\tau_1^1 = 0$ et $\omega_2^1\tau_2^2 = 0$ ne peuvent pas être satisfaites identiquement. Chacune d'entre elles détermine sur la surface focale correspondante les courbes que l'on peut appeler, suivant E. Čech [1], *courbes caractéristiques*. Il est facile à voir, en vertu de (5.5), que *les courbes caractéristiques sur chacune des deux surfaces focales se confondent avec les courbes complectiques correspondantes*. Alors, nous avons obtenu pour la déformation symplectique non-triviale le résultat suivant:

La déformation symplectique C des congruences L et L' est non-triviale si et seulement si chaque transformation osculatrice H à la correspondance C réalise le contact analytique du second ordre relativement aux courbes complectiques tracées sur les surfaces correspondantes des congruences L et L'.

LITÉRATURE

[1] Čech E., *Transformations développables des congruences de droites*. Czech. Math. Journal 6 (81), 1956, 260—286.

[2] Р. М. Гейдельман, *Симплектическое изгибание конгруенций прямых* Известия высш учебн. завед. Математика Но 1(14), 1960, 84-93.

[3] Р. М. Гейдельман, *Основы теории семейств подпространств в симплектических пространствах*. Мат. сборник 55(97), 1961, 7-34.