ADJUNGIERTE UND SELBSTADJUNGIERTE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZDENĚK HUSTÝ, BRNO

Eingegangen am 21. 12. 1964

In dieser Arbeit werden einige notwendige und hinreichende Bedingungen, welche die Koeffizienten adjungierter und selbstadjungierter Differentialgleichungen erfüllen, angeführt. Ferner werden Eigenschaften der Bilder adjungierter und selbstadjungierter Differentialgleichungen und Beziehungen zwischen deren Koordinaten studiert.

VORBEMERKUNGEN UND HILFSSÄTZE

Erläuterungen: Anstatt des Ausdrucks „homogene lineare Differentialgleichung" sagen wir kurz „Gleichung". Die Symbole f', $f^{(n)}$, $[\dot{f}, f^{[n]}]$ bedeuten die Ableitungen der Funktion f nach x $[t]$. Die Funktion $x = T_{-1}(t)$ ist die inverse Funktion zu $t = T(x)$. Insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir kurz „T" anstatt „$T(x)$" schreiben. Das Symbol $T(x) \in C_n(I_1)$ bedeutet, daß die Funktion $T^{(n)}$ im Intervall I_1 stetig ist. Es sei $T(x) \in C_3(I_1)$, $T' \neq 0$ in I_1. Der Ausdruck $\{T, x\} = \frac{1}{2}\frac{T'''}{T'} - \frac{3}{4}\left(\frac{T''}{T'}\right)^2$ ist die Schwarzsche Ableitung der Funktion $T(x)$ im Intervall I_1.

Die algemeinste Gleichung n-ter Ordnung ist von der Gestalt

$$\text{(a)}\quad L[y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0,\ a_0 \not\equiv 0,\ a_i \in C_0(I_1),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Wenn $a_0 \equiv 1$ $(a_1 \equiv 0)$ $[a_i \equiv 0,\ i = 1, 2]$, so wird die Gleichung (a) normale (halbkanonische) [kanonische] Gleichung genannt. Die Gleichung (a) ist im Intervall I_1 regulär, wenn $\frac{a_i}{a_0} \in C_0(I_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Ist die Gleichung (a) in I_1 regulär, so wird die Gleichung $y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{a_i}{a_0} y^{(n-i)} = 0$ die Normalform der Gleichung (a) genannt. Die Normalform der Gleichung (a) bezeichnen wir mit dem Symbol (a_n).

Der Begriff der Dimension wurde in [2; I, 1] erklärt. Die Gleichung (a) wird Gleichung mit Dimension genannt, falls der Koeffizient $a_i(x)$ die Dimension i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ und die Funktion $y(x)$ die Dimension 0 hat. Da jedes Glied in der Gleichung (a) die Dimension n hat, sagen wir, daß jede Gleichung n-ter Ordnung mit Dimension immer die Dimension n hat. Der Koeffizient a_i [einer Gleichung n-ter Ordnung] hat in I_1 stetige Dimension, falls $a_i \in C_{n-i}(I_1)$. Die Gleichung (a) wird Gleichung mit stetiger Dimension in I_1 genannt, wenn jeder ihrer Koeffizienten in I_1 stetige Dimension hat. Die Gleichung (a) nennen wir reguläre Gleichung mit stetiger Dimension in I_1, falls $\frac{a_i}{a_0} \in C_{n-i}(I_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist.

Es sei die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad M[y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0$$

in I_2 definiert und es sei $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Die Gleichungen (a), (b) sind in I identisch, wenn $a_i(x) = b_i(x)$, $x \in I$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Bezeichnungen: (a) $=$ (b), (a) $= M[y]$, $L[y] = M[y]$ usw., $x \in I$. Es sei (a) [(b)] in $I_1[I_2]$ regulär. Die Gleichungen (a), (b) sind in I quasiidentisch, wenn sie in I dasselbe Hauptsystem (von Lösungen) haben. Bezeichnungen: (a) $\doteq$ (b), (a) $\doteq M[y]$, $L[y] \doteq M[y]$ usw., $x \in I$. (a) $\doteq$ (b), $x \in I \Leftrightarrow$ *eine beliebige Lösung der Gleichung* (a) *in I ist auch eine Lösung der Gleichung* (b). (a) $\doteq$ (b), $x \in I \Leftrightarrow (a_n) = (b_n)$, $x \in I$. In der Aussage „die Gleichungen (a), (b) sind quasiidentisch (identisch)" setzen wir voraus, daß beide Gleichungen denselben Definitionsbereich haben und in ihren ganzen Definitionsbereichen quasiidentisch (identisch) sind. Ähnliche Voraussetzung machen wir auch bei anderen Aussagen über zwei Gleichungen, in welchen wir die Definitionsbereiche beider Gleichungen auslassen.

Das Symbol „$y \in$ (a)" resp. „$\{y_i\} \in$ (a)" lesen wir folgendermaßen: „die Funktion $y(x)$ ist eine Lösung der Gleichung (a)" resp. „die Funktionen $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bilden ein Hauptsystem der Gleichung (a)" (in ihrem ganzen Definitionsbereich).

Es sei $\emptyset \neq I_{1x} \subset I_1$. Mit dem Symbol $m(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge, deren Elemente folgendermaßen definiert sind: das geordnete Paar von Funktionen $\{T(x), u(x)\} \in m(I_{1x})$, falls $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $T'(x) \neq 0$ in I_{1x}, $T'(x)$ hat die Dimension 0, $u(x) \in C_n(I_{1x})$, $u(x) \neq 0$ in I_{1x}, $u(x)$ hat die Dimension 0.

Es sei $\{T(x), u(x)\} \in m(I_{1x})$. Wenn wir in der Gleichung (a) die Substitutionen $y(x) = u(x)\, Z(x)$, $t = T(x)$ verwenden, so erhalten wir eien Gleichung $(\bar{a})$, die wir das Bild der Gleichung (a) in I_{1x} der Koordinaten $T(x), u(x)$ nennen; wir schreiben: $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$. Mit dem Symbol $o_a(I_{1x})[p_a(I_{1x})]$ $\{k_a(I_{1x})\}$ bezeichnen wir die Menge aller Bilder [halbkanonischer Bilder] {kanonischer Bilder} der Gleichung (a) in I_{1x}, deren Koordinaten Elemente der Menge $m(I_{1x})$ sind. Wenn wir $\bar{a}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, die Koeffizienten des Bildes $(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$ bezeichnen, so nennen wir das Intervall

$$I_{2t} = T(I_{1x}) \tag{0.1}$$

den Definitionsbereich des Bildes $(\bar{a})$ und es gilt

$$\bar{a}_0(t) = u(x)\,[T'(x)]^n\, a_0(x), \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_{2t}, \tag{0.2}$$

$$\bar{a}_1(t) = u(x)\,[T'(x)]^{n-1}\left\{a_0(x)\left[\frac{n-1}{2}\frac{T''(x)}{T'(x)} + \frac{u'(x)}{u(x)}\right] + a_1(x)\right\} \tag{0.3}$$
$$x = T_{-1}(t), \qquad t \in I_{2t}.$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x}) \Leftrightarrow (a)\left\{T_{-1}(t), \frac{1}{u[T_{-1}(t)]}\right\} \in o_{\bar{a}}(I_{2t}). \tag{0.4}$$

$$(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x}),\ (\bar{\bar{a}})\,\{X(t), u_1(t)\} \in o_{\bar{a}}(I_{2t}) \Rightarrow \tag{0.5}$$
$$\Rightarrow (\bar{\bar{a}})\,\{X[T(x)], u(x)\,u_1[T(x)]\} \in o_a(I_{1x}).$$

Im Folgenden setzen wir voraus, daß die Gleichung (a) eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension in I_1 ist.

Hilfssätze 0.1. a) *Es sei* $\{y_i\} \in (a)$, $x \in I_{1x}$. *Dann gilt:*

$$\{z_i(t)\} \in (\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x}),\ t \in I_{2t} \tag{0.6}$$

mit $z_i = \dfrac{y_i[T_{-1}(t)]}{u[T_{-1}(t)]}$.

Siehe z. B. [2; I, Bem. 3,1.19b), c)].

b) *Das Bild* $(\bar{a})$ $\{T(x), U(x)\} \in o_a(I_{1x})$ *ist halbkanonisch dann und nur dann, wenn*

$$U(x) = c\,.\,|\,T'(x)\,|^{\frac{1-n}{2}} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\,ds\right\},\ c = \text{Konst.} \neq 0. \tag{0.7}$$

Siehe z. B. [2; I, (3,2.11)].

c) $(\bar{a}_1)$ $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x}) \doteq (\bar{a}_2)$ $\{T(x), v(x)\} \in o_a(I_{1x})$
$\Leftrightarrow v(x) = cu(x)$, $c = \text{Konst.} \neq 0$, $x \in I_{1x}$.

Siehe [2; I, Bem. 3,1.15h)].

Bemerkungen 0.2. a) Da das halbkanonische Bild $(\bar{a})\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x})$ gemäß (0.7) durch die erste Koordinate bestimmt wird, führen wir für die halbkanonischen Bilder die Bezeichnung $(\bar{a})\{T(x)\}$ ein.

b) Das Bild $(\bar{A})\{x\} \in p_a(I_{1x})$ nennen wir das halbkanonische Hauptbild der Gleichung (a) oder auch die halbkanonische Hauptform der Gleichung (a) in I_1. Die Koeffizienten des Bildes $(\bar{A})\{x\} \in p_a(I_1)$, die wir mit den Symbolen $\bar{A}_i(x)$, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ bezeichnen, werden durch die Gleichungen

$$(0.8)\quad \bar{A}_i(x) = c \cdot \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\,ds\right\} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \chi_{i-k}\left(-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right),$$

$$c = \text{Konst.} \neq 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad x \in I_1,$$

wo χ_{i-k} das Polynom des Elementes $-\dfrac{a_1}{a_0}$ der Dimension $i-k$ ist, bestimmt. S. [2; I, (3,2.9)].

c) Die Funktionen $A_i = \dfrac{\bar{A}_i}{\bar{A}_0}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ nennen wir die Hauptkoeffizienten der Gleichung (a).

d) Die Funktionen $\Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$ wurden in [2; III, (3.14)] definiert; sie werden die Hauptinvarianten der Gleichung (a) genannt.

Hilfssatz 0.3. *Das halbkanonische Bild* $(\bar{A})\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *ist kanonisch dann und nur dann, wenn* $\{T, x\} = \dfrac{3}{n+1} A_2$, $x \in I_{1x}$, *wo* A_2 *der Hauptkoeffizient der Gleichung* (a) *ist.* S. [2; I, Hilfssatz 3,3.1].

Es seien $\alpha_i(t)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ die Koeffizienten der Normalform des kanonischen Bildes $(\bar{\alpha})\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$. Die Funktionen

$$(0.9)\quad \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{\nu=0}^{i-3} (-1)^\nu \alpha_{i-\nu}^{[\nu]} \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)},$$

$$i = 3, 4, \ldots, n, \qquad t \in I_{2t},$$

wo $\prod_{j=i}^{i-1} = 1$, werden die kanonischen oder linearen Invarianten der Gleichung $(\bar{\alpha})$ genannt. S. [2; III, (2.16)].

1. ADJUNGIERTE GLEICHUNGEN

Es seien

$$\text{(a)} \qquad L[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0, \qquad a_0(x) \neq 0, \qquad x \in I_1,$$

$$\text{(b)} \qquad M[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0, \qquad b_0(x) \neq 0, \qquad x \in I_1$$

zwei Differentialgleichungen mit stetiger Dimension im Intervall I_1.

1.1. Definition. *Eine Gleichung, die im Intervall I_1 mit der Gleichung*

$$(\tilde{\text{a}}) \qquad \tilde{L}[y] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} [a_i(x)\, y(x)]^{(n-i)} = 0, \qquad x \in I_1,$$

quasiidentisch ist, nennen wir zu der Gleichung (a) *im Intervall I_1 adjungiert.*

Wenn (b) zu (a) adjungiert ist, so schreiben wir: (b) $\sim$ (a), oder auch M[y] $\sim L[y]$, (b) $\sim L[y]$ usw.

Bemerkungen. a) Die Gleichung ($\tilde{\text{a}}$) können wir in der Form $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tilde{a}_i y^{(n-i)} = 0$ schreiben, wobei

$$(1.1) \qquad \tilde{a}_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{n-k} \binom{i}{k} a_k^{(i-k)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \text{ ist.}$$

b) ($\tilde{\text{a}}$) $\sim$ (a).

c) Es sei (b) $\sim$ (a); (c) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (c) $\doteq$ (b).

d) Es sei (b) $\sim$ (a); (b) $\sim$ (c) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{\text{a}}$) $\doteq$ ($\tilde{\text{c}}$) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{\text{c}}$) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{\text{a}}$) $\sim$ (c).

e) Ist $\tilde{a}_0(x) = (-1)^n a_0$, so gilt $\tilde{a}_1 = (-1)^n a'_0 + (-1)^{n-1} a_1$.

1.2. Definition. *Es sei $z(x)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$z(x) \in C_n(I_1)$ und hat die Dimension 0.*

b) *$z(x)\, L[y] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \psi[y, z]$ in I_1, wo $\psi[y, z]$ ein Polynom der Elemente $y, z, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ von der Dimension $n - 1$ und vom Grad 3 ist, u. zwar eine bilineare Form in den Elementen y, z und deren Ableitungen von der höchsten Ordnung $n - 1$ ist.*

Dann heißt die Funktion $z(x)$ ein Multiplikator des Operators $L[y]$ im Intervall I_1.

1.3. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ *jede Lösung der Gleichung* (b) *ist ein Multiplikator des Operators* $L[y]$ *in* I_1. Der Beweis wird mittels [3; S. 89—90] leicht erbracht.

1.4. *Es sei* $\{y_i\} \in$ (a); (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow \left\{\tilde{y}_i = \frac{1}{a_0} \frac{W_i[y]}{W[y]}\right\} \in$ (b), *wo* $W[y]$ *die Wronskische Determinante der Funktionen* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *und* $W_i[y]$ *eine solche der Funktionen* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} - y_i$ *ist.* Der Beweis wird mittels [3; S. 93] leicht erbracht.

1.5. Mit dem Symbol $\overline{W}[y]$ resp. $\dot{W}[y]$ bezeichnen wir die Wronskische Determinante der Funktionen $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, wo in der zweiten bis n-ten Zeile deren Ableitungen nach x resp. t stehen. Es sei

$$\{y_i\} \in (\mathrm{a}) \Rightarrow \{z_i\} \in (\bar{\mathrm{a}}), \text{ wo } (\bar{\mathrm{a}})\{T(x), u(x)\} \in o(I_{1r});$$

gemäß (0.6) [2; I, (3,1.14)] gilt die Beziehung

$$\dot{W}[z] = u^{-n}\dot{W}[y] = u^{-n}(T')^{\frac{n(1-n)}{2}} \overline{W}[y] \tag{1.2}$$

für alle $t \in I_2[x \in I_1]$, wo wir $x = T_{-1}(t)$ $[t = T(x)]$ setzen.

1.6. Satz. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $(\bar{\mathrm{b}})\{T(x), T'(x)\} \in o_b(I_1) \sim (\bar{\mathrm{a}})\{T(x), u(x)\} \in$ $\in o_a(I_1)$.

Beweis. I. Es sei (b) $\sim$ (a) und $\{y_i\} \in$ (a) $\Rightarrow \{\tilde{y}_i\} \in (b)$ nach 1.4 $\Rightarrow \{\bar{z}_i\} \in (\bar{\mathrm{b}})$, wo nach 1.4 und (0.6)

$$\bar{z}_i(t) = \frac{1}{a_0 T'} \frac{\overline{W}_i[y]}{\overline{W}[y]}, \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_2, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Mittels (1.2) können wir (1.3) auf die Form

$$\bar{z}_i(t) = \frac{1}{a_0(T')^n} \frac{\dot{W}_i[y]}{\dot{W}[y]}, \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_2, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

bringen. Nach (0.6) ist $\{z_i\} \in (\bar{\mathrm{a}})$; es sei ferner (c) $\sim (\bar{\mathrm{a}}) \Rightarrow \{\tilde{z}_i\} \in$ (c), wo nach 1.4 und (0.2)

$$\tilde{z}_i(t) = \frac{1}{a_0 u (T')^n} \frac{\dot{W}_i[z]}{\dot{W}[z]}, \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_2, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Mittels (1.2) können wir (1.5) auf die Form

$$\tilde{z}_i(t) = \frac{1}{a_0(T')^n} \frac{\dot{W}_i[y]}{\dot{W}[y]}, \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_2, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.6}$$

bringen. Nach (1.4), (1.6) ist $(\bar{\mathrm{b}}) \doteq (\mathrm{c}) \Rightarrow (\bar{\mathrm{b}}) \sim (\bar{\mathrm{a}})$ nach der Bemerkung 1.1c). II. Es sei $(\bar{\mathrm{b}}) \sim (\bar{\mathrm{a}}) \Rightarrow (\mathrm{b})\ \{T_{-1}(t), \dot{T}_{-1}(t)\} \in o_{\bar{b}}(I_2) \sim (\mathrm{a}) \left\{T_{-1}(t), \dfrac{1}{u[T_{-1}(t)]}\right\} \in o_{\bar{a}}(I_2)$ nach I. und (0.4).

Folgerung 1. $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a}) \Leftrightarrow (\mathrm{b}) \sim (\bar{\mathrm{a}})\ \{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$.

Folgerung 2. $(\mathrm{b}_i) \sim (\bar{\mathrm{a}}_i)\ \{T(x), u_i(x)\} \in o_a(I_1), i = 1, 2 \Rightarrow (\mathrm{b}_1) \doteq (\mathrm{b}_2) \Rightarrow (\bar{\bar{\mathrm{a}}}_1) \doteq (\bar{\mathrm{a}}_2)$.

1.7. $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a}) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{b}})\ \{x, u(x)\} \in o_b(I_1) \sim (\mathrm{ua})$, *wo*

$$N[y] = u(x)\, L[y]. \tag{ua}$$

Beweis. I. Es sei $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a})$, $\{y_i\} \in (\mathrm{a}) \Rightarrow \{\tilde{y}_i\} \in (\mathrm{b})$ nach 1.4 $\Rightarrow \{\bar{y}_i\} \in (\bar{\mathrm{b}})\ \{x, u(x)\} \in o_b(I_1)$ nach (0.6), $\bar{y}_i = \dfrac{1}{u} \tilde{y}_i$; ferner ist nach 1.4 $\{\bar{y}_i\} \in (\bar{\mathrm{ua}})$, wo

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} [a_i u y]^{(n-i)} = 0, \tag{$\bar{\mathrm{ua}}$}$$

so daß $(\bar{\mathrm{b}}) \doteq (\bar{\mathrm{ua}}) \Rightarrow (\bar{\mathrm{b}}) \sim (\mathrm{ua})$. II. Es sei $(\bar{\mathrm{b}}) \sim (\mathrm{ua}) \Rightarrow (\mathrm{b}) \left\{x, \dfrac{1}{u(x)}\right\} \in o_{\bar{b}}(I_1) \sim \dfrac{1}{u} N[y] = L[y]$ nach I.

Folgerung. $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a}) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{b}}) \left\{x, \dfrac{1}{a_0}\right\} \in o_b(I_1) \sim (\mathrm{a}_n)$.

1.8. $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a}) \Leftrightarrow (\bar{\bar{\mathrm{b}}})\ \{T(x), v(x)\} \in o_b(I_1) \sim (\mathrm{v}\dot{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{a}})$, *wo*

$$v[T_{-1}(t)]\, \dot{T}_{-1}(t)\, \bar{L}[z] = 0, \qquad t \in I_2, \tag{$\mathrm{v}\dot{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{a}}$}$$

$\bar{L}[z] = 0$ *die Gleichung des Bildes* $(\bar{\mathrm{a}})\ \{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$ *ist.*

Beweis. Nach 1.6 ist $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a}) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{b}})\ \{T(x), T'(x)\} \in o_b(I_1) \sim (\bar{\mathrm{a}})\ \{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$; nach 1.7 ist $(\bar{\mathrm{b}}) \sim (\bar{\mathrm{a}}) \Leftrightarrow (\bar{\bar{\mathrm{b}}})\ \{t, U(t)\} \in o_{\bar{b}}(I_2) \sim U(t)\, \bar{L}[z]$; nach (0.5) ist $(\bar{\bar{\mathrm{b}}})\ \{T(x), T'(x)\, U[T(x)]\} \in o_b(I_1)$; wenn wir $U[T(x)] = v(x) \dfrac{1}{T'(x)}$, $U(t) = v[T_{-1}(t)]\, \dot{T}_{-1}(t)$ setzen, erhalten wir 1.8.

1.9. Definition. *Wenn gleichzeitig* $(\mathrm{b}) \sim (\mathrm{a})$, $(\mathrm{a}) \sim (\mathrm{b})$ *gilt, dann sagen wir, daß die Gleichungen* (a), (b) *adjungiert sind und schreiben:* $(\mathrm{a}) \simeq (\mathrm{b})$.

1.10. (a) $\sim$ ($\tilde{\bar{\text{a}}}$).

Beweis. Wir zeigen, daß (a) = ($\tilde{\bar{\text{a}}}$), wo

$$(\tilde{\bar{\text{a}}}) \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (\tilde{\bar{a}}_i y)^{(n-i)} = 0, \qquad x \in I_1.$$

Wenn wir mit dem Symbol $\tilde{\bar{a}}_i$ den i-ten Koeffizienten der Gleichung ($\tilde{\bar{\text{a}}}$) bezeichnen, so ist gemäß (1.1)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \tilde{\bar{a}}_i &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{n-k} \binom{i}{k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{n-s} \binom{k}{s} a_s^{(i-s)} = \\ &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{s} \binom{i}{s} a_s^{(i-s)} \sum_{k=s}^{i} (-1)^{k} \binom{i-s}{k-s}. \end{aligned}$$

Wenn wir $k = r + s$, $s = i - q$ setzen, so ist

(1.8)

$$\sum_{k=s}^{i} (-1)^k \binom{i-s}{k-s} = (-1)^s \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \binom{q}{r} = (-1)^s (= 0) \text{ für } q = 0 \ (> 0).$$

Wenn wir in (1.7) $k = s = i$ einsetzen, erhalten wir gemäß (1.8) $\tilde{\bar{a}}_i = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Bemerkung. Nach 1.10 und der Bemerkung 1.1b) ist (a) $\simeq$ ($\tilde{\text{a}}$).

1.11. *Es sei* (b) $\sim$ (a), *so daß* $M[y] = u(x)\, \overline{L}[y]$, *wo* $u(x) \in C_n(I_1)$, $u(x) \neq 0$ *in* I_1; (c) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\doteq$ ($\bar{\text{a}}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$.

Beweis. I. Es sei (c) $\sim u(x)\, \overline{L}[y]$; nach 1.10 ist (a) $\sim$ ($\tilde{\text{a}}$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ($\bar{\text{a}}$)$\{x, u(x)\} \in o_a(I_1) \sim u(x)\, \overline{L}[y]$ gemäß 1.7 $\Rightarrow$ (c) $\doteq$ ($\bar{\text{a}}$)$\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$ nach der Bemerkung 1.1c). II. Es sei (c) $\doteq$ ($\bar{\text{a}}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$; nach 1.10 und 1.7 ist ($\bar{\text{a}}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1) \sim u(x)\, \overline{L}[y] \Rightarrow$ (c) $\sim u(x)\, \overline{L}[y]$ nach der Bemerkung 1.1c), d. h. (c) $\sim$ (b).

Folgerung. Es sei (b) $\sim$ (a); (a) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow M[y] = c\overline{L}[y]$, $c =$ Konst. $\neq 0$.

Bemerkungen. a) Es sei (b) $\sim$ (a). Dann existiert eine derartige Gleichung (b_1) $\doteq$ (b), daß (a) $\simeq$ (b_1).

b) (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow$ (b_n) $\simeq$ (a_n) $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ (b_n).

1.12. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $(\bar{\bar{\text{b}}}) \left\{ T(x), \dfrac{1}{a_0(x)\, u(x)\, [T'(x)]^{n-1}} \right\} \in o_b(I_1) \sim (\bar{\text{a}}_n)$, wo ($\bar{\text{a}}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$.

Beweis. Gemäß 1.6 ist $(b) \sim (a) \Leftrightarrow (\overline{b})\,\{T(x), T'(x)\} \in o_b(I_1) \sim$ $\sim (\overline{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. Nach 1.7 (Folgerung) ist $(\overline{b}) \sim (\overline{a}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\overline{\overline{b}}) \left\{t, \dfrac{1}{\overline{a}_0(t)}\right\} \in o_{\overline{b}}(I_2) \sim (\overline{a}_n)$. Gemäß (0.2), (0.5) ist $(\overline{\overline{b}}) \left\{T(x), \dfrac{1}{a_0(x)\, u(x)[T'(x)]^{n-1}}\right\} \in o_b(I_1)$, so daß 1.12 gilt.

Folgerung. $(b) \sim (a_n) \Leftrightarrow (\overline{\overline{b}}) \left\{T(x), \dfrac{1}{u(x) \mid T'(x) \mid^{n-1}}\right\} \in o_b(I_1) \sim (\overline{a}_n)$.

1.13. Satz. $(b) \sim (a_n) \Leftrightarrow (\overline{B}) \sim (\overline{A}_n)$, *wo* $(\overline{B}) \left\{T(x), \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{a_1}{a_0}\, ds\right) \cdot \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in p_b(I_1)(\overline{A})$, $\left\{T(x), \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{a_1}{a_0}\, ds\right) \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in p_a(I_1)$.

Beweis. Wenn wir in 1.12 (Folgerung) $u(x) = \exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{a_1(s)}{a_0(s)}\, ds\right\} \cdot \mid T'(x) \mid^{\frac{1-n}{2}}$ wählen, so erhalten wir 1.13, denn nach (0.7) und der Bemerkung 1.1e) ist $(\overline{a}) \left\{T(x), \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{a_1}{a_0}\, ds\right) \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in p_a(I_1)$, $(\overline{\overline{b}}) \left\{T(x), \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{a_1}{a_0}\, ds\right) \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in p_b(I_1)$.

Folgerung 1. $(b) \sim (a_n) \Leftrightarrow (\overline{B}_n) \simeq (\overline{A}_n)$.
Folgerung 2. $(b_n) \simeq (a_n) \Leftrightarrow (\overline{B}_n) \simeq (\overline{A}_n)$.
Es seien

$$(\alpha) \qquad z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0, \qquad t \in I_2,$$

$$(\beta) \qquad z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \beta_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0, \qquad t \in I_2$$

kanonische Gleichungen mit stetiger Dimension und es seien $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$ resp. $\vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ lineare Invarianten der Gleichung (α) resp. (β).

1.14. *Es gelten folgende Formeln:*

$$(1.9)\qquad (-1)^i c_i i\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{r=3}^{i} (-1)^r \binom{i}{r}\binom{i+r-2}{r-1} \alpha_r^{[i-r]}$$

$$i = 3, 4, \ldots, n, \qquad t \in I_2,$$

wo

$$(1.10)\qquad c_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{(i-j)(i+j-1)}{j(j+1)}.$$

Beweis. Wenn wir in (0.9) die Substitution $\nu = i - r$ verwenden und dann die Gleichung (0.9) mit dem Ausdruck (1.10) multiplizieren, so können wir (0.9) in der Form

$$c_i\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{r=3}^{i} (-1)^{i-r} \alpha_r^{[i-r]} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{(i-j)(i+j-1)}{j(j+1)} =$$

$$= \sum_{r=3}^{i} (-1)^{i-r} \alpha_r^{[i-r]} \frac{1}{i} \binom{i}{r}\binom{i+r-2}{r-1}$$

schreiben, woraus (1.9) leicht folgt.

1.15. *Es seien p, q natürliche Zahlen, $p \geqq q \geqq 1$. Ferner sei k eine ganze nichtnegative Zahl, die die Ungleichung $k \leqq p - q$ erfüllt. Dann ist*

$$(1.11)\qquad \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{q}{s}\binom{p+s}{k+s} = (-1)^q \binom{p}{q+k}.$$

Die Formel (1.11) wird mittels Induktion in bezug auf p bewiesen.

1.16 $(\alpha) = (\beta) \Leftrightarrow \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $t \in I_2$.

Der Beweis wird vermöge (0.9) leicht erbracht.

1.17. Satz. $(\alpha) \simeq (\beta)$ *dann und nur dann, wenn*

$$(1.12)\qquad \vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i) = (-1)^i \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i),\ i = 3, 4, \ldots, n,\ t \in I_2.$$

Beweis. I. $(\alpha) \simeq (\beta) \Rightarrow \beta_r = \sum_{s=3}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \alpha_s^{[r-s]}$ in I_2, nach (1.1);

nach (1.9) ist $(-1)^i c_i i \vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i) = \sum_{r=3}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \binom{i+r-2}{r-1} \cdot$

$$\cdot \sum_{s=3}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \alpha_s^{[i-s]} = \sum_{s=3}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \alpha_s^{[i-s]} \sum_{r=s}^{i} (-1)^r \binom{i-s}{r-s} \binom{i+r-2}{r-1},$$

$t \in I_2$. Wenn wir in der zweiten Summe $r = s + \nu$ setzen, so erhalten wir mit Hilfe von (1.11), für $q = i - s$, $p = i + s - 2$, $k = s - 1$, die Beziehung

$$(-1)^i c_i i \vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i) = (-1)^i \sum_{s=3}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{i+s-2}{i-1} \alpha_s^{[i-s]}.$$

Daraus folgt (1.12) nach (1.9). II. Es gelte (1.12), $(\gamma) \sim (\alpha)$, wo

$$(\gamma)\ z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i(t) z^{[n-i]}(t) = 0,\ \gamma_i \in C_{n-i}(I_2),\ i = 3, 4, \ldots, n.$$

Laut Bemerkung 1.11b) ist $(\gamma) \simeq (\alpha)$ und nach I. gilt

(1.13) $\qquad \vartheta_i(\gamma_3, \ldots, \gamma_i) = (-1)^i \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i),\ i = 3, 4, \ldots, n,\ t \in I_2.$

Nach (1.12), (1.13), 1.16 ist $(\beta) = (\gamma)$, so daß $(\beta) \simeq (\alpha)$.

Es seien $A_k[B_k]$, $k = 2, 3, \ldots, n$ resp. $\Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$ $[\Theta_i(B_2, \ldots, B_i)]$, $i = 3, 4, \ldots, n$ Hauptkoeffizienten resp. Hauptinvarianten der Gleichung (a) [(b)].

1.18. Satz. (b) $\sim$ (a_n) *dann und nur dann, wenn*

(1.14) $$\Theta_i(B_2, \ldots, B_i) = (-1)^i \Theta_i(A_2, \ldots, A_i),\quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_1.$$

Beweis. Es sei (α) $[(\beta)]$ die Normalform des kanonischen Bildes $(\overline{\alpha}) \left\{T(x), \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0} ds\right) \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in k_a(I_1)$ $\left[(\overline{\beta}) \left\{T(x), \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0} ds\right) \cdot \right.\right.$ $\left.\left. \cdot \mid T' \mid^{\frac{1-n}{2}}\right\} \in k_b(I_1)\right]$. Laut [2; III, Satz 3.3] gelten die Beziehungen

(1.15) $$\vartheta_i\{\alpha_3[T(x)], \ldots, \alpha_i[T(x)]\} [T'(x)]^i = \Theta_i(A_2, \ldots, A_i),\quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_1.$$

(1.16) $$\vartheta_i\{[\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\} [T'(x)]^i = \Theta_i(B_2, \ldots, B_i),\quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_1.$$

Nach 1.13 und 1.17 schließen wir, daß (b) $\sim$ (a_n) dann und nur dann, wenn (1.12) gilt. Wenn wir ferner $t = T(x)$ in (1.12) setzen, so können wir (1.12) mittels (1.15) und (1.16) auf die Form (1.14) bringen.

2. SELBSTADJUNGIERTE GLEICHUNGEN

2.1. Definition. *Wenn jede zu* (a) *adjungierte Gleichung im Intervall* I_1 *quasiidentisch mit* (a) *ist, so heißt die Gleichung* (a) *selbstadjungiert.*

Bemerkungen. a) Die Gleichung (a) ist selbstadjungiert dann und nur dann, wenn wenigstens eine zu (a) adjungierte Gleichung im Intervall I_1 quasiidentisch mit (a) ist.

b) Die Gleichung (a) ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ (a) $\doteq$ ($\tilde{a}$) $\Leftrightarrow$ $L[y] = (-1)^n \tilde{L}[y]$.

2.2. *Die Gleichung* (a) *ist selbstadjungiert* $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ (a).

Beweis. I. Nehmen wir an, daß die Gleichung (a) selbstadjungiert ist $\Rightarrow$ (a) $\doteq$ ($\tilde{a}$) nach der Bemerkung 2.1b) $\Rightarrow$ (a) $\sim$ (a). II. (a) $\sim$ (a) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (a) $\doteq$ ($\tilde{a}$) $\Rightarrow$ die Gleichung (a) ist nach der Bemerkung 2.1b) selbstadjungiert.

Bemerkungen. a) Wenn (a) selbstadjungiert ist, dann schreiben wir (a) $\sim$ (a).

b) Es sei (a) $\sim$ (a); (a) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{b}$) $\doteq$ (a). Das folgt aus der Bemerkung 1.1d).

c) (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ jede Lösung der Gleichung (a) ist ein Multiplikator des Operators $L[y]$ in I_1. Folgt aus 1.3.

d) (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $\{\tilde{y}_i\} \in$ (a), wo die Funktionen $\tilde{y}_i$ in 1.4 definiert sind. Folgt aus 1.4.

2.3. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_1$) $\{T(x), T'(x)\} \in o_a(I_1) \sim$ ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. Folgt aus 1.6.

Folgerung 1. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_1$) $\sim$ ($\bar{a}_1$), wo ($\bar{a}_1$) $\{T(x), T'(x)\} \in o_a(I_1)$.

Folgerung 2. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ ($\bar{a}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$.

Folgerung 3. Es sei (a) $\sim$ (a), ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$; ($\bar{a}$) $\sim$ ($\bar{a}$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u(x) = cT'(x)$, $c =$ Konst. $\neq 0$.

Folgerung 4. Es sei (a) $\sim$ (a), ($\bar{a}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$; ($\bar{a}$) $\sim$ ($\bar{a}$) $\Leftrightarrow$ $= u(x) = c =$ Konst. $\neq 0$.

2.4. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_2$) $\{T(x), v(x)\} \in o_a(I_1) \sim$ (v$\dot{T}\bar{a}$), *wo*

$$(\mathrm{v}\dot{T}\bar{\mathrm{a}}) \qquad v[T_{-1}(t)]\, \dot{T}_{-1}(t)\, \bar{L}[z] = 0, \qquad t \in I_2,$$

$\bar{L}[z] = 0$ *die Gleichung des Bildes* ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$ *ist.* Folgt aus 1.8.

Folgerung 1. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $(\bar{\mathrm{a}})\,\{x, u(x)\} \in o_a(I_1) \sim u(x)\,L[y]$.

Folgerung 2. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $(\bar{\mathrm{a}})\left\{x, \dfrac{1}{a_0}\right\} \in o_a(I_1) \sim (\mathrm{a}_n)$.

2.5. *Es sei* (a) $\sim$ (a), (b) $\sim$ (a); (b) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ $M[y] = cL[y]$, $c =$ $=$ Konst. $\neq 0$.

Beweis. Es ist (b) $\doteq$ (a) $\Rightarrow$ $M[y] = u(x)\,L[y]$, $u(x) \in C_n(I_1)$, $u(x) \neq 0$ in I_1. I. Es sei (b) $\sim$ (b) $\Rightarrow$ $(\bar{\mathrm{b}})\left\{x, \dfrac{1}{u(x)}\right\} \in o_b(I_1) \sim$ (a) nach 2.4 (Folgerung 1.), so daß die Gleichungen (b), $(\bar{\mathrm{b}})$ quasiidentisch sind und nach dem Hilfssatz 0.1c) $u(x) = c =$ Konst. $\neq 0$ ist. II. Es sei $M[y] =$ $= cL[y]$, $c =$ Konst. $\neq 0$; nach der Bemerkung 2.1b) ist $\tilde{M}[y] =$ $= c\tilde{L}[y] \doteq cL[y] = M[y]$, so daß (b) $\sim$ (b).

2.6. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $(\bar{\mathrm{a}}_1)\left\{T(x), \dfrac{1}{a_0(x)\,u(x)\,[T'(x)]^{n-1}}\right\} \in o_a(I_1) \sim (\bar{\mathrm{a}}_n)$, *wo* $(\bar{\mathrm{a}})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. Folgt aus 1.12.

Folgerung. $(\mathrm{a}_n) \sim (\mathrm{a}_n) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{a}}_1)\left\{T(x), \dfrac{1}{u(x)\,|T'(x)|^{n-1}}\right\} \in o_a(I_1) \sim (\bar{\mathrm{a}}_n)$, *wo* $(\bar{\mathrm{a}})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$.

2.7. $(\mathrm{a}_n) \sim (\mathrm{a}_n) \Rightarrow (\mathrm{a}) \in p_a(I_1)$. Folgt aus der Bemerkung 1.1e).

2.8. *Es sei* (A) *eine halbkanonische Gleichung und es sei* $(\bar{\mathrm{A}})\,\{T(x)\} \in$ $\in p_A(I_1)$. $(\mathrm{A}_n) \sim (\mathrm{A}_n) \Leftrightarrow (\bar{\mathrm{A}}_n) \sim (\bar{\mathrm{A}}_n)$. Das ergibt sich aus 2.6 (Folgerung), wenn wir $u(x) = |T'(x)|^{\frac{1-n}{2}}$ setzen.

Es seien $\Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ Hauptinvarianten der Gleichung (a).

2.9. Satz. *Es sei* $(\bar{\mathrm{A}})\,\{X(x)\} \in p_a(I_1)$; $(\bar{\mathrm{A}}_n) \sim (\bar{\mathrm{A}}_n)$ *dann und nur dann, wenn*

$$(2.1)\qquad \Theta_{2k+1}(A_2, \ldots, A_{2k+1}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \qquad x \in I_1.$$

Beweis. I. Es sei $(\mathrm{A})\,\{x\} \in p_a(I_1)$; $(\bar{\mathrm{A}}_n) \sim (\bar{\mathrm{A}}_n) \Rightarrow (\mathrm{A}_n) \sim (\mathrm{A}_n)$ nach 2.8 $\Rightarrow \Theta_i(A_2, \ldots, A_i) = (-1)^i\,\Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $x \in I_1$ nach 1.18 $\Rightarrow$ (2.1).

II. Es gelte (2.1) und es sei die Gleichung (α) die Normalform des Bildes $(\bar{\alpha})\,\{T(x)\} \in k_a(I_1)$. Laut [2; III, Satz 3.3] gilt die Gleichung (1.15). Nach (1.15), (2.1) schließen wir, daß

$$(2.2)\qquad \vartheta_{2k+1}(\alpha_3, \ldots, \alpha_{2k+1}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \qquad t \in I_2.$$

Es sei $(\beta) \sim (\alpha)$. Nach dem Satz 1.17 gilt (1.12), nach (1.12), (2.2) gilt $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \vartheta_i(\beta_3, \ldots, \beta_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, nach 1.16 ist $(\beta) = (\alpha)$, nach der Bemerkung 2.1a) ist $(\alpha) \sim (\alpha)$. Nach (0.5), 2.8 ist die Normalform des Bildes $(\overline{\mathrm{A}})\,\{X[T_{-1}(t)]\} \in p_\alpha(I_2)$ selbstadjungiert.

Folgerung. Die Gleichung (a) hat die Hauptinvarianten mit ungeradem Index identisch gleich Null dann und nur dann, wenn die Normalform des halbkanonischen Hauptbildes der Gleichung (a) selbstadjungiert ist.

Bemerkung. Aus dem Satz 2.9 ergibt sich die Behauptung, daß eine Differentialgleichung $y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} a_i y_i^{(n-i)} = 0$, für welche die Invarianten $\Theta_\nu(a_2, \ldots, a_\nu)$ mit ungeradem Index ν verschwinden, die Eigenschaft hat, mit ihrer Adjungierten identisch zu sein. Dieser Satz ist ohne Beweis in [4; S. 224] und [1; S. 235] angeführt.

LITERATUR

[1] Brioschi F., *Les invariants des equations differentielles lineaires*, Acta mathematica 14 (1890—1891), 233—248.

[2] Hustý Z., *Über die Transformation und Äquivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung*. Czech. Math. J., T. 15 (90) 1965.

[3] Sansone G., *Equazioni differenziali nel campo reale I*, russiche Übersetzung, Moskva 1953.

[4] Schlesinger L.: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II/1*, Leipzig 1897.