Applications of Mathematics

Wilhelm Heinrichs

Einschliessungsaussagen bei Systemen semilinearer parabolischer Differentialgleichungen

Applications of Mathematics, Vol. 36 (1991), No. 2, 96–122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104448

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1991

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

36 (1991) APPLICATIONS OF MATHEMATICS No. 2, 96–122

EINSCHLIESSUNGSAUSSAGEN BEI SYSTEMEN SEMILINEARER PARABOLISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

WILHELM HEINRICHS*)

(Eingegangen am 12. 5. 1989)

Summary. Für die Lösungen semilinearer parabolischer Differentialgleichungen werden Einschließungsaussagen hergeleitet. Hierbei werden Aussagen zur Stabilität von Lösungen ermittelt. Die Resultate werden am Beispiel der Fitzhugh-Nagumo Gleichungen diskutiert.

Keywords: Semilinear, parabolisch, Invarianz, Stabilität.

1. EINLEITUNG

Dieser Aufsatz bezieht sich im wesentlichen auf eine Arbeit von Schröder [27], in welcher die Theorie der form-invarianten Schranken und allgemeinere Abschätzungen für vektorwertige elliptisch-parabolische Probleme dargestellt werden. Insbesondere wird in diesem Kapitel ein semilinearer parabolischer Differentialoperator M der Form

$$\begin{aligned} (1.1) \qquad Mu(x,t) &= u_t(x,t) + \mathscr{L}[u](x,t) + \\ &+ f(x,t,u(x,t),u_x(x,t))\,((x,t)\in\Omega_0\times(0,T]) \end{aligned}$$

mit einem entkoppelten, linearen Operator $\mathscr{L}$, welcher nur partielle Ableitungen nach x enthält, betrachtet. Für Lösungen v der Gleichung $Mv = 0$ mit zusätzlichen Anfangs- und dirichletschen oder allgemeineren Randbedingungen werden mit Schröders Theorie [27] Abschätzungen der Form

$$(1.2) \qquad v(x,t)\in\psi_l(x,t)\,\Omega_l \quad ((x,t)\in\bar{\Omega}_0\times[0,T]\,;\quad l=1,2,\ldots,N)$$

hergeleitet. Im einzelnen wird zunächst in Abschnitt 3 die Theorie der form-invarianten Schranken [27] für parabolische Probleme dargestellt. Mit Hilfe von Folgen und Eindeutigkeitsfunktionen werden anschließend hinreichende Bedingungen zur Anwenbarkeit hergleitet.

Für Funktionen f, welche nur von u abhängen, gibt Abschnitt 4 Kriterien für

*) Ich danke Herrn Prof. Dr. J. Schröder für wertvolle Anregungen bei der Erstellung dieser Arbeit.

globale und lokale asymptotische Stabilität konstanter Punkte $u_s \in \mathbb{R}^n$ mit $f(u_s) = 0$. In Abschnitt 5 wird das Langzeitverhalten der Lösung eines Beispiels aus der Biologie (Fitzhugh-Nagumo Gleichungen) diskutiert. Die Fitzhugh-Nagumo Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung der Leitung von Nervenimpulsen.

Für $\psi_l \equiv 1$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ ergeben sich Invarianzaussagen, wie sie auch in den Arbeiten von Amann [3], Chueh et al. [11], Lemmert [17, 18], Martin [19], Redheffer und Walter [22, 23], Schmitt [26] und Weinberger [33] dargestellt sind.

Zum Nachweis asymptotischer Verhaltensweisen von Lösungen ist es erstrebenswert, die Funktionen ψ_l so zu bestimmen, daß die erforderlichen Differentialungleichungen gelten und zusätzlich ψ_l für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Insbesondere arbeitet man bei Untersuchungen auf exponentiell asymptotische Stabilität häufig mit einem Ansatz der Form

$$\psi_l(x, t) = \varepsilon_1\, \varphi_l(x) \exp(-\kappa_l t) \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,, \quad t \geqq 0\,, \qquad l \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{1.3}$$

mit reellen Konstanten $\varepsilon_1 > 0$, $\kappa_1 > 0$ und geeigneten skalarwertigen Funktionen φ_l mit $\varphi_l(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega}_0)$.

Die Stabilitätsaussagen dieses Kapitels vergleiche man auch mit den Ergebnissen von Casten und Holland [7] bei Neumannschen Randbedingungen und Conway et al. [8], Gavalas [13], Georgakis und Sani [14], Kastenberg [16] and Sattinger [24] bei dirichletschen Randbedingungen.

Notation und allgemeine Voraussetzungen

$\Omega = \Omega_0 \times (0, T) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ sei das betrachtete Gebiet mit reeller Konstante $T > 0$; die Variablen seien mit $(x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T]$ bezeichnet.

Für $u \in C_1^n(\Omega_0 \times (0, T])$ sei $u_t(x, t) := D_{m+1}u(x, t)$. $u_x(x, t)$ sei die $n \times m$ Matrix mit Komponenten $D_k u_i(x, t)$.

$\psi \in C_{i,j}(\Omega_0 \times (0, T])$ mit $(i, j) = (2, 1)$ bzw. $(i, j) = (1, 0)$ bedeute, daß ψ auf $\Omega_0 \times (0, T]$ bezüglich "x" i-mal und bezüglich "t" j-mal stetig differenzierbar ist. Für $\psi \in C_{2,1}(\Omega_0 \times (0, T])$ sei

$\psi_t(x, t) := D_{m+1}\psi(x, t)$;

$\psi_x(x, t)$ sei der $1 \times m$ Vektor mit Komponenten $D_k\psi(x, t)$;

$\psi_{xx}(x, t)$ sei die $m \times m$ Matrix mit Komponenten $D_{jk}\psi(x, t)$;

$\Delta\psi(x, t) := \sum_j D_{jj}\psi(x, t)$; Für $\eta \in \mathbb{R}^n$ sei $\eta\psi_x(x, t) \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit Komponenten $\eta_j D_k \psi(x, t)$ definiert.

G° bezeichne das Innere der Menge G.

O bezeichne die Nullelemente von Matrizen und Vektoren.

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$ sei ein inneres Produkt $A \cdot B = \sum_{j,k} a_{jk} b_{jk}$ definiert. Im Falle $m = n$ sei $\|A\| := (A \cdot A)^{1/2}$.

I_n sei die $n \times n$ Einheitsmatrix;

$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ bezeichne die $n \times n$ Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Für auf $\Omega_0 \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definierten $n \times n$ Matrizen $A(x, v) = (a_{ij}(x, v))$ sei $A \in C_0^{n,n}(\Omega_0 \times Y)$, falls $a_{ij} \in C_0(\Omega_0 \times Y)$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Für $u \in \mathbb{R}^n$ sei $|u| = \max\{|u_i|: i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Für Funktionen $u: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und $u_0: \bar{\Omega}_0 \to \mathbb{R}^n$ sei:

$$\|u(\cdot, t)\|^\infty := \sup\{\|u(x, t)\|: x \in \bar{\Omega}\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq T.$$

Die Bezeichnungen wurden im übrigen in Anlehnung an die Arbeit [27] gewählt.

Es sei folgende *allgemeine Voraussetzung* gestellt:

G (bzw. G_l, $l = 1, 2, \ldots, N$) bezeichne eine abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$. 0 sei ein Punkt von G. G sei sternförmig bzgl. 0. Es existiere eine Funktion $W \in C_0(\mathbb{R}^n)$, so daß

$$W(y) = 1 \quad (y \in \partial G)$$
$$W(y) < 1 \quad (y \in G^\circ)$$
$$W(y) > 1 \quad (y \in G).$$

W sei zweimal stetig differenzierbar auf

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n: \alpha y \in \partial G \text{ für ein } \alpha > 0\}.$$

Ferner sei

$$W'(y)\, y > 0 \quad \text{für} \quad y \in \partial G.$$

Das *Minkowski Funktional* sei erklärt durch:

$$V(y) = \alpha^{-1} \quad \text{für} \quad y \in H \quad \text{mit} \quad \alpha y \in \partial G, \quad V(y) = 0 \quad \text{für} \quad y \notin H.$$

V erfülle die gleichen Vorraussetzungen wie W.

V ist positiv homogen, d.h. $V(ty) = t\, V(y)$ für $y \in \mathbb{R}^n$, $t \geqq 0$. Es ist $H = \{y: V(y) > 0\}$. Schließlich gilt für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \geqq 0$:

$$y \in \alpha G \Leftrightarrow V(y) \leqq \alpha.$$

2. DAS DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM UND BEGRIFFE

$\Omega = \Omega_0 \times (0, T) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ sei ein beschränktes Gebiet. Die Differentialgleichungen dieses Kapitels sind gegeben für Funktionen $u \in R$ bzw. $u \in R^\infty$ mit

$$R = C_0^n(\bar{\Omega}) \cap C_{2,1}^n(\Omega_0 \times (0, T])$$

und

$$R^\infty = C_0^n(\bar{\Omega}_0 \times (0, \infty)) \cap C_{2,1}^n(\Omega_0 \times (0, \infty))$$

($u \in C_{2,1}^n$ bedeute, daß $u_i \in C_{2,1}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$).

Für skalarwertige Funktionen sei $\mathscr{R}$ gegeben durch

$$\mathscr{R} = C_0(\bar{\Omega}) \cap C_{2,1}(\Omega_0 \times (0, T]).$$

Die Mengen G bzw: G_1 $(l = 1, 2, \ldots, N)$ mögen die Voraussetzung aus [27; 2] erfüllen.

Betrachtet werden semilineare parabolische Differentialgleichungen des Typs (vgl. [27, 6.1])

$$(2.1) \qquad \mathscr{L}_t[u](x, t) + f(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) = 0 \quad \text{für} \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T] .$$

Hierbei bezeichne $\mathscr{L}_t$ einen linearen Operator definiert durch:

$$(2.2) \qquad \mathscr{L}_t[u](x, t) = u_t(x, t) + \mathscr{L}[u](x, t) ,$$

wobei $\mathscr{L}$ ein n-Vektor mit

$$(2.3) \qquad \mathscr{L}_i[u](x, t) = \hat{L}_i[u_i](x, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit

$$(2.4) \qquad \hat{L}_i[\varphi](x, t) = -\hat{A}_i(x)\, \varphi_{xx}(x, t) + \hat{b}_i(x)\, \varphi_x(x, t) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathscr{R}$$

mit gegebenen Matrizen $\hat{A}_i(x) \in \mathbb{R}^{m,m}$ und Vektoren $\hat{b}_i(x) \in \mathbb{R}^{1,m}$, so daß $\hat{A}_i(x) = \hat{A}_i^{\mathrm{T}}(x) \geqq_d O$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Für $\tilde{G} = \bigcap_{l=1}^{N} G_l \subset \mathbb{R}^n$ sei definiert:

$\tilde{G}$ heißt *invariant* bzgl. der Differentialgleichung (2.1), falls für jede Lösung $u \in R$ des Problems (2.1) gilt:

$$(2.5) \qquad \left.\begin{cases} u(x, 0) \in \tilde{G} & (x \in \bar{\Omega}_0) \\ u(x, t) \in \tilde{G} & (x \in \partial\Omega_0, \quad t \in (0, T]) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u(x, t) \in \tilde{G} \\ \text{für } (x, t) \in \bar{\Omega} \end{matrix}\right\} .$$

Für die Stabilitätsaussagen der Abschnitte 4 und 5 werden folgende Begriffe definiert, welche sich auf Lösungen eines Systems der Art (4.1), (4.2), (4.3) beziehen:

$u_s \in \mathbb{R}^n$ heißt „*stationärer Punkt bzgl. f*“, falls

$$(2.6) \qquad f(u_s) = O .$$

Ein „bzgl. f stationärer Punkt u_s“ heißt (lokal) *stabil*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, daß für jede Lösung $u \in R^\infty$ gilt:

$$(2.7) \qquad \|u(\cdot, 0) - u_s\|^\infty < \delta \quad \text{impliziert} \quad \|u(\cdot, t) - u_s\|^\infty < \varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq 0 .$$

Ein „bzgl. f stationärer Punkt u_s“ heißt (*lokal*) *asymptotisch stabil*, falls u_s (lokal) stabil ist und ein $\delta > 0$ derart existiert, daß für jede Lösung $u \in R^\infty$ mit, $\|u(\cdot, 0) - u_s\|^\infty < \delta$ gilt:

$$(2.8) \qquad \|u(\cdot, t) - u_s\|^\infty \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty .$$

u_s heißt *global asymptotisch stabil*, falls δ beliebig groß möglich.

u_s heißt (*exponentiell*) *asymptotisch stabil*, falls u_s in dem Sinne asymptotisch stabil ist, daß reelle Konstanten $K > 0$, $\kappa > 0$ derart existieren, daß für jede Lösung $u \in R^\infty$ gilt:

$$(2.9) \qquad \|u(\cdot, t) - u_s\|^\infty \leqq K \exp(-\kappa t) \quad \text{für} \quad t \geqq 0 .$$

3. DIE THEORIE DER FORM-INVARIANTEN SCHRANKEN BEI PARABOLISCHEN PROBLEMEN

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Aussagen der Sätze 1 und 5 aus [27] bei parabolischen Problemen auch gelten, falls man die dortigen Voraussetzungen (j) und (j_l) $(l = 1, 2, \ldots, N)$ nur für Parameter λ mit

$$(3.1) \qquad 0 < \lambda \leqq \varepsilon_0$$

fordert, wobei $\varepsilon_0 > 0$ beliebig gewählt sein kann.

3.1. Abschätzungen $v(x, t) \in \psi(x, t)\, G^\circ$.

Sei der semilineare parabolische Differentialoperator M gegeben durch

$$(3.2) \qquad Mu(x, t) = \mathscr{L}_t[u]\,(x, t) + f(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \quad \text{für} \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T],$$

$$(3.3) \qquad Mu(x, t) = u(x, t) \quad \text{für} \quad (x, t) \in \partial\Omega_0 \times (0, T],$$

$$(3.4) \qquad Mu(x, t) = u(x, t) \quad \text{für} \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times \{0\},$$

für $u \in R$.

f bilde ab von $\Omega_0 \times (0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,m}$ in den $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{L}_t$ sei durch (2.2)–(2.4) definiert, wobei hier speziell

$$(3.5) \qquad \hat{L}_i = \hat{L}_1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(i.e. $\hat{A}_i(x, t) = \hat{A}_1(x, t)$, $\hat{b}_i(x, t) = \hat{b}_1(x, t)$ für $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$).

Falls (3.5) gilt, so wird im folgenden $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{b}$ statt $\hat{L}_1$, $\hat{A}_1$, $\hat{b}_1$ geschrieben. Weiter sei

$$(3.6) \qquad L_t[\varphi]\,(x, t) = \varphi_t(x, t) + \hat{L}[\varphi]\,(x, t) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathscr{R}.$$

Lemma 3.1. *Sei $\psi \in \mathscr{R}$ gegeben mit $\psi(x, t) > 0$ für $(x, t) \in \bar{\Omega}$ und*

$$(3.7) \qquad \begin{aligned} &\text{(i)}\ \omega(\eta)\, L_t[\psi]\,(x, t) + Q(x, \eta, q)\, \psi(x, t) + \\ &\quad + W'(\eta) f(x, t, \psi(x, t)\, \eta, \psi(x, t)\, q + \eta \psi_x(x, t)) \\ &> W'(\eta)\, Mv(x, t) \\ &\textit{mit} \quad \omega(\eta) = W'(\eta)\, \eta\,, \quad Q(x, \eta, q) = A(x)\,(q^{\mathrm{T}}\, W''(\eta)\, q) \\ &\textit{für} \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^n\,, \quad q \in \mathbb{R}^{n,m} \quad \textit{mit} \end{aligned}$$

$$(3.8) \qquad W(\eta) = 1\,, \quad W'(\eta)\, q = O\,,$$

$$(3.9) \qquad v(x, t) = \psi(x, t)\, \eta\,, \quad v_x(x, t) = \psi(x, t)\, q + \eta \psi_x(x, t)\,.$$

$$(3.10) \qquad \text{(ii)} \quad v(x, t) \in \psi(x, t)\, G^\circ \quad \textit{für} \quad (x, t) \in \partial\Omega_0 \times (0, T]\,,$$

$$(3.11) \qquad v(x, 0) \in \psi(x, 0)\, G^\circ \quad \textit{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,.$$

Dann gilt:

$$(3.12) \qquad v(x, t) \in \psi(x, t)\, G^\circ \quad \textit{für} \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T]\,.$$

Beweis. Im wesentlichen analog zum Beweis von Satz 1 aus [27; 3].

Sei ohne Einschränkung $\hat{b}(x) = 0$ für $x \in \Omega_0$ (sonst ergänze man $\hat{b}(x)\,(u_i)_x\,(x, t)$ zu $f_i(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$; dies führt wegen (3.8) zu dem gleichen Ergebnis).

Aufgrund (3.11) gilt

$$V(v(x, 0)) < \psi(x, 0) \quad \text{für alle} \quad x \in \bar{\Omega}_0 .$$

(V bezeichnet das Minkowski Funktional).

Angenommen die Behauptung sei falsch, dann existiert ein minimales $t_0 > 0$ mit

$$V(v(x, t)) < \psi(x, t) \quad \text{für alle} \quad x \in \bar{\Omega}_0 , \quad 0 \leqq t < t_0 ,$$

$$0 < V(v(x_0, t_0)) = \psi(x_0, t_0) \quad \text{für ein} \quad (x_0, t_0) \in \Omega_0 \times (0, T] .$$

Wegen (3.10) gehört x_0 nicht zu $\partial\Omega_0$ und es ist $V(v(x, t)) > 0$ für alle (x, t) in geeigneter Umgebung von (x_0, t_0). Man kann dort schreiben:

$$v(x, t) = \varrho(x, t)\,\eta(x, t) \quad \text{mit} \quad W(\eta(x, t)) = 1 \quad \text{und} \quad \varrho(x, t) = V(v(x, t)).$$

ϱ und η sind in obiger Umgebung von (x_0, t_0) Funktionen aus $\mathscr{R}$ bzw. R (folgt aus Voraussetzungen an W mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen); man kann also wie im Beweis zu Satz 1 aus [27; 3.1] die Differentiationen (i)–(iii) und (α)–(γ) durchführen. ((iii) und (γ) nur bzgl. x). Die Funktion $\psi - \varrho$ hat in (x_0, t_0) ein relatives Minimum und es gilt an der Stelle (x_0, t_0):

$$\text{(a)}\quad \psi = \varrho \qquad \text{(c)}\quad \psi_{xx} \geqq \varrho_{xx}$$

$$\text{(b)}\quad \psi_x = \varrho_x \qquad \text{(d)}\quad \psi_t \leqq \varrho_t .$$

Da $\hat{A} \geqq_d O$, folgt aus (c) und (d):

$$L_t[\varrho] \geqq L_t[\psi] .$$

Den Widerspruch erzielt man ab hier analog zum Beweis von Satz 1 aus [27; 3.1] mit $\mathscr{L}$ ersetzt durch $\mathscr{L}_t$. □

3.2. Abschätzungen $v(x, t) \in \psi(x, t)\,G$.

In diesem Abschnitt wird ein parabolischer Differentialoperator gegeben durch (3.2)–(3.5) mit einer Funktion f, welche unabhängig von u_x ist, betrachtet. Es sei also

(3.13) $\qquad f = f(x, t, u)$.

Außerdem sei G so gegeben, daß für alle $x \in \Omega_0$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit $W(\eta) = 1$, $W'(\eta)\,q = 0$ gilt:

(3.14) $\qquad Q(x, \eta, q) = \hat{A}(x)\,(q^{\mathrm{T}}\,W''(\eta)\,q) \geqq 0$

((3.14) ist bei konvexem G stets erfüllt).

Eigentlich ist man an Einschließungsaussagen der Form (3.12) mit G° ersetzt durch G interessiert.

Zu diesem Zweck sei die folgende Vorgehensweise eingeführt.

In Analogie zur Behandlung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (vgl. [28; 251ffff.]) kann man Lemma 3.1 auch mit Folgen $\{z_k\} \subset \subset C_0[0, T] \cap C_1(0, T]$ formulieren (vgl. Theorem 2.6 aus [28; IV.2.4.1].)

Für eine fest vorgegebene Funktion $\psi \in \mathscr{R}$ sei $\psi_k \in \mathscr{R}$ $(k = 1, 2, \dots)$ gegeben durch $\psi_k(x, t) = \psi(x, t) + z_k(t)$ für $(x, t) \in \bar{\Omega}$.

Voraussetzung (Z). *Es möge eine Folge* $\{z_k\} \subset C_0[0, T] \cap C_1(0, T]$ *mit den folgenden Eigenschaften existieren*:

$$\lim_{k\to\infty} z_k(t) = 0 \quad \textit{für jedes} \quad t \in [0, T]$$

und für genügend großes k sei

$$\omega(\eta)\, z_k'(t) + W'(\eta)\,[f(x, t, \psi_k(x, t)\,\eta) - f(x, t, \psi(x, t)\,\eta)] > 0 \tag{3.15}$$

für $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ *mit* $W(\eta) = 1$ *und*

$$z_k(t) > 0 \quad \textit{für} \quad t \in [0, T]\,. \tag{3.16}$$

Satz 3.2. *Falls eine Folge* $\{z_k\} \subset C_0(0, T] \cap C_1(0, T]$ *derart existiert, daß Voraussetzung* (Z) *und die Ungleichung*

$$\omega(\eta)\, L_t[\psi]\,(x, t) + W'(\eta)\, f(x, t, \psi(x, t)\,\eta) \geqq W'(\eta)\, Mv(x, t) \tag{3.17}$$

für $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ *mit* $W(\eta) = 1$, $v(x, t) = \psi_k(x, t)\,\eta$ *für genügend großes k erfüllt ist, sowie*

$$v(x, t) \in \psi(x, t)\, G \quad \textit{für} \quad (x, t) \in \partial\Omega_0 \times (0, T]\,, \tag{3.18}$$

$$v(x, 0) \in \psi(x, 0)\, G \quad \textit{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,, \tag{3.19}$$

dann gilt:

$$v(x, t) \in \psi(x, t)\, G \quad \textit{für} \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T]\,. \tag{3.20}$$

Beweis. Addition der Ungleichungen (3.15) & (3.17) liefert für genügend großes k:

$$\omega(\eta)\, L_t[\psi_k]\,(x, t) + W'(\eta)\, f(x, t, \psi_k(x, t)\,\eta) > W'(\eta)\, Mv(x, t) \tag{3.21}$$

für $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $W(\eta) = 1$, $v(x, t) = \psi_k(x, t)\,\eta$. Aus den Anfangs- und Randbedingungen (3.18) und (3.19) sowie (3.16) folgt:

$$v(x, t) \in \psi_k(x, t)\, G^\circ \quad \text{für} \quad (x, t) \in \partial\Omega_0 \times (0, T] \tag{3.22}$$

$$v(x, 0) \in \psi_k(x, 0)\, G^\circ \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,. \tag{3.23}$$

Wegen (3.21), (3.22), (3.23) ist Lemma 3.1 anwendbar und es folgt

$$v(x, t) \in \psi_k(x, t)\, G^\circ \quad \text{für alle} \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T]$$

und für $k \to \infty$

$$v(x, t) \in \psi(x, t)\, G \quad \text{für} \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T]\,. \qquad \square$$

3.4. Abschätzungen $v(x, t) \in \psi_1(x, t)\, G_1$ $(l = 1, 2, \dots, N)$.

Satz 3.2 ist auch für Abschätzungen der Art $v(x, t) \equiv \psi_1(x, t)\, G_1$ $(l = 1, \dots, N)$

und allgemeinere Operatoren gegeben durch (3.2)–(3.4) formulierbar. Hierzu seien die Voraussetzungen (A) und (Z_l) definiert.

Zu jedem Index $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ gibt es eine Teilmenge P_l von Indizes, so daß $i \in P_l$ dann und nur dann, wenn $\partial/\partial y_i \, W_l(y) \neq 0$ für ein $y \in \partial G_l$. Dies bedeutet, daß W_l auf ∂G_l von y_i abhängt.

Mit Hilfe der Indexmenge P_l formulieren wir die wesentliche Vorraussetzung hinsichtlich der führenden Koeffizienten:

Voraussetzung (A): *Es sei $\hat{L}_i = \hat{L}_j$ für Paare von Indizes i, j mit $i \in P_l$ und $j \in P_l$ für ein $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$.*

Ferner sei Voraussetzung (Z_l) erfüllt:

Voraussetzung (Z_l): *Es existiere eine Folge $\{z_{l,k}: k = 1, 2, \ldots\}$ derart, daß die Voraussetzung (Z) mit W, ψ ersetzt durch W_l, ψ_l gilt.*

Sei $\omega_l(\eta) := W_l'(\eta)\, \eta$ und $\psi_{l,k}(x, t) := \psi_l(x, t) + z_{l,k}(t), (x, t) \in \bar{\Omega}, l \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Satz 3.3. *Es möge die Voraussetzung (A) gelten und eine Folge $\{z_{l,k}: k = 1, 2, \ldots\}$ derart existieren, daß Voraussetzung (Z_l) und die Ungleichung*

$$\begin{aligned}(3.24) \qquad & \omega_l(\eta)\,[(\psi_l)_t\,(x, t) + \hat{L}_i[\psi_l]\,(x, t)] + \\ & + W_l'(\eta)\, f(x, t, \psi_l(x, t)\, \eta) \geqq W_l'(\eta)\, Mv(x, t)\end{aligned}$$

für $i \in P_l$, $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $W_l(\eta) = 1$, $v(x, t) = \psi_{l,k}(x, t)\, \eta$ und $v(x, t) \in \bigcap_{j=1}^{N} \psi_{j,k}(x, t)\, G_j$ für $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ und genügend großes k gilt.

Falls dann $v(x, t) \in \psi_l(x, t)\, G_l$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ für $(x, t) \in (\partial\Omega_0 \times (0, T]) \cup \cup (\bar{\Omega}_0 \times \{0\})$, so ist $v(x, t) \in \psi_l(x, t)\, G_l$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ für $(x, t) \in \bar{\Omega}$.

Der Beweis ist ähnlich dem Beweis zu Satz 3.2. Die Bedeutung der Voraussetzung (A) entnehme man [27; 6.2].

Die Bedingung (3.15) ähnelt einer Lipschitzbedingung an f in u. Ein in der Anwendung häufig benutztes Ergebnis ist daher:

Falls die Funktion $f = f(x, t, u)$ für $(x, t, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, so existiert eine Folge $\{z_k\}$ mit den Eigenschaften (Z_l) $(l = 1, 2, \ldots, N)$ des Satzes 3.3.

4. EINE ANWENDUNG IN DER STABILITÄTSTHEORIE

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 werden Kriterien für lokale und globale asymptotische Stabilität eines „bzgl. f stationären Punktes u_s" hergeleitet. In Abschnitt 4.2 sind die Voraussetzungen vom Typ einer lokalen einseitigen Lipschitzbedingung um den „bzgl. f stationären Punkt u_s". In Abschnitt 4.3 werden nach der Linearisierung von f Stabilitätsaussagen gegeben.

Die Kriterien aus Abschnitt 4.2 haben den Vorteil, daß eine Umgebung U um u_s

derart angebbar ist, daß die Lösungen mit Anfangsdaten in U asymptotisch gegen u_s konvergieren (vgl. (4.21)).

Eine solche Umgebung U wird im folgenden auch Anziehungsbereich genannt.

4.1. Das Differentialgleichungssystem

In diesem Abschnitt wird ein parabolisches Problem folgender Form betrachtet:

$$\mathscr{L}_t[u](x,t) + f(u(x,t)) = O \quad \text{für} \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,\infty), \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = u_s \quad \text{für} \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times (0,\infty), \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0, \tag{4.3}$$

für Funktionen $u \in R^\infty$.

$\mathscr{L}_t$ sei ein linearer Operator gegeben durch (2.2)–(2.4).
u_s sei ein „stationärer Punkt bzgl. f", d.h. $f(u_s) = O$.
u_0 sei eine Funktion, welche von $\bar{\Omega}_0$ in den $\mathbb{R}^n$ abbildet.
f sei eine Funktion, welche vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ abbildet.

4.2. Kriterien für lokale und globale asymptotische Stabilität mit Anziehungsbereich

Allgemeine Voraussetzungen. Die Mengen $G_l \subset \mathbb{R}^n$ seien so vorgegeben, daß (3.17) mit $\hat{A}$, W ersetzt durch $\hat{A}_i$, W_l ($i \in P_l$; $l = 1, 2, \ldots, N$) und Voraussetzung (A) gelten.

Die Menge $\bigcap_{l=1}^{N} G_l$ sei beschränkt.

Es existiere eine Folge $\{z_k: k = 1, 2, \ldots\}$ (unabhängig von l), welche die Voraussetzung (Z_l) des Satzes 3.3 für $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ erfüllt. (Hinreichende Bedingungen hierfür sind in den Abschnitten 3.3, 3.4 angegeben.)

Insbesondere gelten die obigen Bedingungen, falls die Voraussetzung (A) gilt, die Mengen G_l ($l = 1, 2, \ldots, N$) konvex sind, $\bigcap_{l=1}^{N} G_l$ beschränkt ist und die Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

Unter der allgemeinen Voraussetzung ist bei fest vorgegebenem $T > 0$ zur Anwendung des Satzes 3.3 folgende Ungleichung für genügend froßes k und alle $l \in$ $\in \{1, 2, \ldots, N\}$ zu verifizieren:

$$\omega_l(\eta)\,[(\psi_l)_t(x,t) + \hat{L}_i[\psi_l[\,(x,t)]] + W_l'(\eta) f(\psi_l(x,t)\,\eta) \geqq 0 \tag{4.4}$$

für $i \in P_l$, $(x,t) \in \Omega_0 \times (0,T]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit

$$W_l(\eta) = 1 \quad \text{und} \quad \psi_{l,k}(x,t)\,\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} \psi_{j,k}(x,t)\, G_j \quad (\psi_{l,k} = \psi_l + z_k)\,. \tag{4.5}$$

Kriterien für lokale asymptotische Stabilität

Satz 4.1. *Existieren reelle Konstanten* $\varepsilon_1 > 0$, $\kappa > 0$ *und Funktionen* $\varphi_l \in C_0(\bar{\Omega}_0) \cap C_2(\Omega_0)$ *mit* $\varphi_l(x) > 0$ *für* $x \in \bar{\Omega}_0$, *sowie*

$$\hat{L}_i[\varphi_l](x) - \kappa\, \varphi_l(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \in \Omega_0\,, \tag{4.6}$$

für $i \in P_l$, *und gelte weiter*

$$W_l'(\eta) f(u_s + \alpha\eta) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.7}$$

mit $\eta \in \gamma_l(\bigcap_{j=1}^{N} G_j)$ *und* $W_l(\eta) = 1$, *wobei* $\gamma_l = \gamma^*/\gamma_*^l > 0$ *mit*

$$\begin{cases} \gamma^* = \max\{\varphi_k(x) |\ x \in \bar{\Omega}_0,\ k = 1, 2, \ldots, N\} \\ \gamma_*^l = \min\{\varphi_l(x) |\ x \in \bar{\Omega}_0\} \end{cases} \tag{4.8}$$

für $l = 1, 2, \ldots, N$, *dann ist der „bzgl. f stationäre Punkt* u_s*" lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Falls $\varphi_l = \varphi_1$ $(l = 2, 3, \ldots, N)$, *so gilt die obige Aussage mit* $\gamma_l = 1$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$.

Satz 4.2. *Existieren reelle Konstanten* $\varepsilon_1 > 0, K_l > 0$, *so daß*

$$W_l'(\eta) f(u_s + \alpha\eta) \geqq K_l \alpha \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.9}$$

mit $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$, $W_l(\eta) = 1$ *für* $l = 1, 2, \ldots, N$, *so ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.1a. *Existieren eine Funktion* $\varphi \in C_0(\bar{\Omega}_0) \cap C_2(\Omega_0)$, *welche die Voraussetzungen von Satz 4.1 für* $l = 1, 2, \ldots, N$ *erfüllt, sowie reelle Konstanten* $a_{*j} < 0$, $a_j^* > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *und* $\varepsilon_1 > 0$ *derart, daß für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *gilt:*

$$f_i(u_s + \alpha u^*) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.10}$$

mit $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, $a_{*j} \leqq u_j^* \leqq a_j^*$ $(j \neq 1,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $u_i^* = a_i^*$, *und*

$$f_i(u_s + \alpha u_*) \leqq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.11}$$

mit $u_* = (u_{*1}, u_{*2}, \ldots, u_{*n})$, $a_{*j} \leqq u_{*j} \leqq a_j^*$ $(j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $u_{*i} = a_{*i}$, *dann ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.2a. *Existieren reelle Konstanten* $a_{*j} < 0$, $a_j^* > 0$, $K_{*j} < 0$, $\bar{K}_j^* > 0$ *für* $j = 1, 2, \ldots, n$ *und* $\varepsilon_1 > 0$ *derart, daß für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *gilt:*

$$f_i(u_s + \alpha u^*) \geqq \bar{K}_i^* \alpha \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.12}$$

mit $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, $a_{*j} \leqq u_j^* \leqq a_j^*$ $(j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $u_i^* = a_i^*$, *und*

$$f_i(u_s + \alpha u_*) \leqq K_{*i} \alpha \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1 \tag{4.13}$$

mit $u_* = (u_1, u_{*2}, \ldots, u_{*n})$, $a_{*j} \leqq u_{*j} \leqq a_j^*$ $(j \neq i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $u_{*i} = a_{*i}$, *dann ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.2b. *Sei in* (2.4) $\hat{L}_i = \hat{L}_1$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. *Existieren reelle Konstanten* $K > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ *derart, daß*

(4.14) $\qquad \eta^{\mathrm{T}} f(u_s + \alpha\eta) \geqq K\alpha \quad$ *für* $\quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1$

und alle $\eta \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\eta^{\mathrm{T}}\eta = 1$, *dann ist* u_s *lokal* (*exp.*) *asymptotisch stabil.*

Kriterium für globale asymtotische Stabilität

Satz 4.3. *Gelten die Voraussetzungen von Satz* 4.1, *Satz* 4.2, *Korollar* 4.1a, *Korollar* 4.2a, *Korollar* 4.2b *für beliebiges* $\varepsilon_1 > 0$, *so ist* u_s *global* (*exp.*) *asymptotisch stabil.*

Kriterien für lokale und globale asymptotische Stabilität mit Beschränkung an Ω_0

Für das parabolische Problem (4.1)–(4.3) mit einem linearen Operator $\mathscr{L}_t$ der Art (2.2)–(2.4) speziell gegeben durch

(4.15) $\qquad \hat{A}_i = a_i I_m\,; \quad \hat{b}_i \equiv O$

mit reellen Konstanten $a_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, läßt sich unter einer Beschränkung von Ω_0 die Behauptung des Satzes 4.2 auch aufrecht erhalten, falls $K_l < 0$ für ein $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Zum Zwecke einer möglichst günstigen Abschätzung in der Differentialgleichung bestimmt man auf Ω_0 die Eigenfunktion des Laplaceoperators mit homogenen dirichletschen Randbedingungen zum kleinsten positiven Eigenwert.

Da dies im allgemeinen mit Schwierigkeiten verbunden ist, betrachtet man das obige Eigenwertproblem speziell auf dem Würfel und der Kugel und versucht $\bar{\Omega}_0$ in eine dieser geometrischen Figuren einzubetten.

Dazu sei für $L > 0$ und $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$, $B = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$ mit $B_i - A_i = L$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ der Würfel $Q_{L,A,B}$ definiert durch:

(4.16) $\qquad Q_{L,A,B} := \{z \in \mathbb{R}^m\colon\ A_i \leqq z_i \leqq B_i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}\,.$

Für $z_0 \in \mathbb{R}^m$ und $r_0 > 0$ sei die Kugel K_{r_0,z_0} definiert durch:

(4.17) $\qquad K_{r_0,z_0} := \{z \in \mathbb{R}^m\colon\ \|z - z_0\| \leqq r_0\}\,.$

Sei weiter:

(4.18) $$\gamma = \max\Big\{(-K_l)/(\omega_l(\eta)\,a_i)\colon \eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j \quad \text{mit} \quad W_l(\eta) = 1\,;\ i \in P_l\,;\quad l = 1, 2, \ldots, N\Big\}\,,$$

wobei K_l durch (4.19) gegeben ist.

$\mu_1^{(m/2-1)}$ sei die kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion $J_{m/2-1}$ [vgl. [10, VII, § 2]].

Für das parabolische Problem (4.1)–(4.3) mit einem linearen Operator $\mathscr{L}_t$ der Art (2.2)–(2.4), (4.15) läßt sich folgender Satz herleiten:

Satz 4.4. *Es mögen reelle Konstanten* $\varepsilon_1 > 0$, $K_l \leqq 0$ *derart existieren, daß*

(4.19) $$W_l'(\eta) f(u_s + \alpha\eta) \geqq K_l \alpha \quad \textit{für} \quad 0 < \alpha \leqq \varepsilon_1$$

für $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$ *mit* $W_l(\eta) = 1$ *und* $l = 1, 2, \ldots, N$. *Falls* $K_l < 0$ *für ein* $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$, *so gelte* (i) *oder* (ii):

(i) $\bar{\Omega}_0 \subset Q_{L,A,B}$ *für* $A, B \in \mathbb{R}^m$ *und* L *mit* $0 < L < \pi\sqrt{(m/\gamma)}$,

(ii) $\bar{\Omega}_0 \subset K_{r_0, z_0}$ *für* $z_0 \in \mathbb{R}^m$ *und* r_0 *mit* $0 < r_0 < \mu_1^{(m/2-1)}/\sqrt{\gamma}$.

Dann ist u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil hinsichtlich des Problems* (4.1)–(4.3), (4.15).

Korollar 4.4a. *Falls die Voraussetzungen von Satz* 4.4 *für beliebiges* $\varepsilon_1 > 0$ *gelten, so ist* u_s *global (exp.) asymptotisch stabil hinsichtlich des Problems* (4.1)–(4.3), (4.15).

Bemerkungen zu den Sätzen und Korollaren

Bemerkung 4.1. Globale asymptotische Stabilität bei $u_s = O$: Existiert eine Funktion $\varphi \in C_0(\bar{\Omega}_0) \cap C_2(\Omega_0)$, welche die Voraussetzungen von Satz 4.1 für $l = 1, 2, \ldots, N$ erfüllt, und gilt:

$$f_i(u) \geqq 0 \quad \text{für} \quad u_i \geqq 0$$

und

$$f_i(u) \leqq 0 \quad \text{für} \quad u_i \leqq 0\,,$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$, so ist $u_s = O$ global (exp.) asymptotisch stabil.

Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.3 bezogen auf Korollar 4.1a mit $u_s = O$.

Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt auch Sattinger [24] in Satz 1.

Bemerkung 4.2. Für $m = 2, 3$ ergeben sich $\mu_1^{(0)}$, $\mu_1^{(1/2)}$ exakt bzw. näherungsweise zu

$$\mu_1^{(0)} = \pi\,; \quad \mu_1^{(1/2)} \approx 2.404826 \quad \text{(vgl. [32; 15.51])}\,.$$

Daher gelten für $m = 2, 3$ die Ungleichungen:

$$\pi\,\frac{\sqrt{m}}{2} < \mu_1^{(m/2-1)} < \pi\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)}\,.$$

Dies bedeutet, daß sich für $m = 2, 3$ und L „nahe bei" $\pi\sqrt{(m/\gamma)}$, r_0 „nahe bei" $\mu_1^{(m/2-1)}/\sqrt{\gamma}$ die entsprechenden Quadrate und Kreise bzw. Würfel und Kugeln jeweils nur teilweise überdecken, d.h. es ist weder das Quadrat im Kreis bzw. die Kugel im Würfel ganz enthalten noch umgekehrt.

Beweise zu den Sätzen und Korollaren

Ad Satz 4.1. Sei ohne Einschränkung $u_s = O$ (sonst Transformation des Problems, so daß u_s neuer Nullpunkt).

Benutze zum Beweis die Aussage des Satzes 3.3. Sei hierzu $T > 0$ beliebig vorgegeben und

$$(4.20) \qquad \psi_l(x, t) = \delta_0\, \varphi_l(x) \exp(-\kappa t) \quad ((x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T])$$

mit $\delta_0 = \varepsilon_1/\gamma^*$.

Sei δ in (2.7) so klein, daß $\|u_0\|^\infty \leqq \delta$ impliziert:

$$(4.21) \qquad u_0(x) \in \delta_1\Big(\bigcap_{j=1}^{N} G_j\Big) \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,,$$

wobei $\delta_1 = \delta_0 \gamma_* > 0$ mit $\gamma_* = \min\{\gamma_*^l : l = 1, 2, \ldots, N\}$.

Die Anfangs- und Randbedingungen des Satzes 3.3 gelten aufgrund obiger Wahl von δ und da $O \in G_l^\circ$ für $l = 1, 2, \ldots, N$. Somit ist nur noch die Ungleichung (4.4) für $l = 1, 2, \ldots, N$ nachzuweisen.

Aufgrund der obigen Wahl von δ_0 ist $0 < \psi_l(x, t) \leqq \varepsilon_1$ und mit (4.7) folgt:

$$(4.22) \qquad W_l'(\eta) f(\psi_l(x, t)\, \eta) \geqq 0 \quad ((x, t) \in \Omega_0 \times (0, T])$$

für $\eta \in \gamma_l \bigcap_{j=1}^{N} G_j$ mit $W_l(\eta) = 1$ und $l = 1, 2, \ldots, N$.

Daher gilt (4.22) auch für alle $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit (4.5).

[Für festes $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$ ergibt sich dies aus den folgenden mengentheoretischen Überlegungen:

$$\psi_{l,k}(x, t)\, \eta \in \bigcap_{j=1}^{N} \psi_{j,k}(x, t)\, G_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\psi_l(x, t) + z_k(t))\, \eta \in (\gamma^* \delta_0 e^{-\kappa t} + z_k(t)) \bigcap_{j=1}^{N} G_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_l(x)\, \eta \in \gamma^* \bigcap_{j=1}^{N} G_j \Rightarrow \eta \in \gamma_l \bigcap_{j=1}^{N} G_j\,.$$

Falls $\varphi_l = \varphi_1$ $(l = 2, 3, \ldots, N)$, so ist $\psi_l = \psi_1$ $(l = 2, 3, \ldots, N)$ und es folgt: $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$.]

Die Ungleichungen (4.6), (4.22) ergeben (4.4). Da die Parameter δ_0, κ und Funktionen φ_l $(l = 1, 2, \ldots, N)$ unabhängig von T bestimmt sind, ist Satz 3.3 für beliebig großes T anwendbar und liefert die Behauptung des Satzes. □

Ad Satz 4.2. Man verfährt analog zum Beweis von Satz 4.1 mit speziell $\varphi_l \equiv 1$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ und $\kappa > 0$ so gewählt, daß gilt:

$$\kappa\, \omega_l(\eta) \leqq K_l \quad \text{für} \quad \eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j \quad \text{mit} \quad W_l(\eta) = 1\,,$$

für $l = 1, 2, \ldots, N$.

Mit $\psi(t) = \varepsilon_1 e^{-\kappa t}$ $(t \in [0, T])$ ergibt sich (4.4) zu

$$-\kappa\, \omega_l(\eta)\, \psi(t) + W_l'(\eta) f(\psi(t)\, \eta) \geqq 0\,.$$

Da $0 < \psi(t) \leqq \varepsilon_1$ $(t \geqq 0)$, ist diese Ungleichung wegen (4.9) erfüllt.

Ad Korollar 4.1a. Ergibt sich mit Satz 4.1 angewandt auf das Rechteck

$$\hat{R} = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^n: a_j \leqq \hat{u}_j \leqq a_j, j = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad \square$$

Ad Korollar 4.2a. Ergibt sich mit Satz 4.2 angewandt auf das Rechteck $\hat{R}$. $\square$

Ad Korollar 4.2b. Ergibt sich mit Satz 4.2 angewandt auf den Kreis $\hat{K}$

$$\hat{K} = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^n: \hat{u}^{\mathrm{T}}\hat{u} = 2\}. \qquad \square$$

Ad Satz 4.3. Wie man dem Beweis von Satz 4.1 entnimmt, war δ in (2.7) so klein zu wählen, daß aus $\|u_0\|^\infty < \delta$ (4.21) folgt.

Da ε_1 und daher auch δ_1 in (4.21) beliebig groß wähler sind, gilt die Aussage des Satzes 4.1 für ein beliebiges $\delta > 0$. Dies bedeutet globale Stabilität. Bezüglich des Satzes 4.2 und der Krollare 4.1a, 4.2a, 4.2b ist genauso zu argumentieren.

Ad Satz 4.4. Sei ohne Einschränkung $u_s = O$. Man verfährt nun analog zum Beweis von Satz 4.1 mit der speziellen Wahl

$$(4.23) \qquad \psi_l(x, t) := \varepsilon_2\, \varphi(x) \exp(-\kappa t) \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad l = 1, 2, \ldots, N.$$

Hierbei sei die Funktion φ gewählt mit $\varphi(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega}_0)$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varphi_0$ mit $\varphi_0 = \min\{1/\varphi(x): x \in \bar{\Omega}_0\}$; daher gilt: $0 < \psi_l \leqq \varepsilon_1$ auf $\bar{\Omega}$ für $l = 1, 2, \ldots, N$.

Für hinreichend kleines $\kappa > 0$ ist die Differentialungleichung (4.4) erfüllt, falls

$$(4.24) \qquad -\Delta\varphi - \gamma\varphi > 0 \quad \text{auf} \quad \Omega_0.$$

Im Falle (i) hat die Funktion φ gegeben durch

$$(4.25) \qquad \varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} \sin\left(\left(\frac{\pi - 2\delta_0}{L}\right)(x_i - A_i) + \delta_0\right) \quad (x \in \bar{\Omega}_0)$$

die Eigenschaft (4.24), falls $\delta_0 > 0$ so klein, daß $(m(\pi - 2\delta_0)^2)/L^2 - \gamma > 0$.

Im Falle (ii) sei ohne Einschränkung $z_0 = O$ (sonst Transformation mit neuem Ursprung z_0).

Nach Einführung von Polarkoordinaten und einem speziellen Ansatz mit einer Funktion Φ_m, welche nur vom Radius r abhängt, müssen wegen (4.24) folgende Ungleichungen gelten:

$$(4.26) \qquad \left.\begin{cases} -\Phi_m''(r) - (m-1/r)\,\Phi_m'(r) - \gamma\,\Phi_m(r) > 0 \\ \Phi_m(r) \hfill > 0 \end{cases}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq r_0.$$

Zeige nun: Sei κ reelle Konstante mit $1 < \kappa < \mu_1^{(m/2-1)}/r_0 \sqrt{\gamma}$ und

$$d_\kappa := \kappa \sqrt{(\gamma)}/\mu_1^{(m/2-1)},$$

dann erfüllt die Funktion Φ_m gegeben durch

$$\Phi_m(r) = \Psi_m(d_\kappa r)$$

mit

$$\Psi_m(s) = s^{-m/2+1}\, J_{m/2-1}(\mu_1^{(m/2-1)} s)$$

für $0 \leqq r \leqq r_0$ die Ungleichungen (4.26).

Die Funktion Ψ_m ist auf der Einheitskugel eine Eigenfunktion des Laplaceoperators mit homogenen dirichletschen Randbedingungen zum Eigenwert $(\mu_1^{(m/2-1)})^2$, d.h.

$$-\Psi_m''(s) - \frac{m-1}{s}\Psi_m'(s) - (\mu_1^{(m/2-1)})^2\,\Psi_m(s) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq 1,$$

$$\Psi_m(s) = 0 \quad \text{für} \quad s = 1$$

(vgl. dazu Satz (32.6) aus [28; VI, § 32]; die dortigen Kugelflächenfunktionen $S_m^{(l)}$ wurden vom Grade $l = 0$ gewählt, da ansonsten die Positivitätsbedingung der Φ_m nicht erfüllbar ist.)

Nun ist $\Phi_m(r) > 0$ für $0 \leqq r \leqq r_0$, da $d_\kappa r_0 < 1$ und

$$\Phi_{2k+2}(0) = \frac{1}{2^k k!}(\mu_1^{(k)})^k > 0\,,$$

sowie

$$\Phi_{2k+1}(0) = \frac{k!\,2^{k+\frac{1}{2}}}{(2k)!\,\sqrt{\pi}}(\mu_1^{(k-\frac{1}{2})})^{k-\frac{1}{2}} > 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(folgt mit Darstellung der Besselfunktionen in der Form (21) aus [10; VII, § 2, 6]).

Ferner gilt:

$$-\Phi_m''(r) - \frac{m-1}{r}\Phi_m'(r) - \gamma\,\Phi_m(r) = \gamma(\kappa^2 - 1)\,\Psi_m(d_\kappa r) > 0 \quad \text{für } 0 \leqq r \leqq r_0\,.$$

Im Falle $\gamma = 0$, d.h. $K_l = 0$ für $l = 1, 2, \ldots, N$, genügt zum Beispiel die Funktion φ gegeben durch (4.25) der Ungleichung (4.24) ohne Einschränkung an Ω_0, da L beliebig groß wählbar ist. □

Ad Korollar 4.4a. Folgt direkt mit Satz 4.4, indem ε_2 in (4.23) so groß gewählt wird, daß

$$u_0(x) \in \varepsilon_2\,\varphi(x)\,(\bigcap_{l=1}^{N} G_l) \quad \text{für alle} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,.$$ □

4.3. KRITERIEN FÜR LOKALE ASYMPTOTISCHE STABILITÄT OHNE ANZIEHUNGSBEREICH

Neben der Forderung, daß f in einer Umgebung des „bzgl. f stationären Punktes u_s" stetig differenzierbar sei, mögen die allgemeinen Voraussetzungen aus Abschnitt 4.2 gelten.

$f'(u_s)$ bezeichne die $n \times n$ Matrix mit Komponenten $D_i f_j(u_s)$.

Korollar 4.2c. *Falls*

(4.27) $$W_l'(\eta)\,f'(u_s)\,\eta > 0$$

für $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$ *mit* $W_l(\eta) = 1$ *und* $l = 1, 2, \ldots, N$, *dann ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.2c angewandt auf das Rechteck oder den Kreis liefert:

Korollar 4.2d. *Existieren reelle Konstanten* $a_{*i} < 0$, $a_i^* > 0$, *so daß*

$$a_i^* D_i f_i(u_s) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} D_j f_i(u_s) \eta_j > 0 \tag{4.28}$$

$$-a_{*i} D_i f_i(u_s) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} D_j f_i(u_s) \eta_j > 0 \tag{4.29}$$

für $a_{*j} \leqq \eta_j \leqq a_j^*$ $(j = 1, 2, \ldots, n,\ j \neq i)$ *und* $i = 1, 2, \ldots, n$, *dann ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.2e. *Sei in* (2.4) $\hat{L}_i = \hat{L}_1$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. *Falls*

$$\kappa^{\mathrm{T}} f'(u_s)\, \eta > 0 \tag{4.30}$$

für alle $\eta \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\eta^{\mathrm{T}} \eta = 1$, *so ist* u_s *lokal (exp.) asymptotisch stabil.*

Korollar 4.4b. *Die Aussage des Satzes* 4.4 *bleibt erhalten, falls man die Ungleichung* (4.19) *ersetzt durch: Es mögen reelle Konstante* $K_l \leqq 0$ *derart existieren, daß*

$$W_l'(\eta) f'(u_s)\, \eta > K_l \tag{4.31}$$

für $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$ *mit* $W_l(\eta) = 1$ *und* $l = 1, 2, \ldots, N$.

Bemerkung 4.3. Für die Erfüllbarkeit der Voraussetzungen (4.28), (4.29), (4.30) der Korollare 4.2d, 4.2e ist es notwendig, daß

$$D_i f_i(u_s) > 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

d.h. die Diagonalelemente von $f'(u_s)$ sind positiv.

Für eine lineare Funktion f mit $f(u) = Cu$, $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist also wegen Korollar 4.2e die positive Definitheit der Matrix C hinreichend für die asymptotische Stabilität von $u_s = O$.

Beweise zu den Korollaren 4.2c—4.2e, 4.4b

Ad Korollar 4.2c. Bezeichne

$$g_l(\beta) := W_l'(\eta) f(u_s + \alpha\eta)\,,$$

$$h_l(\alpha) := g_l(\alpha) - K_l \alpha\,,$$

wobei $\eta \in \bigcap_{j=1}^{N} G_j$, $W_l(\eta) = 1$, $0 < K_l < g_l'(0)$ für $l = 1, 2, \ldots, N$. Wegen (4.27) ist $g_l'(0) > 0$ und K_l wie oben wählbar. Es ist

$$h_l(0) = 0 \quad \text{und} \quad h_l'(0) > 0\,.$$

Daher existiert ein $\varepsilon_1 > 0$ derart, daß für $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon_1$

$$h_l(\alpha) \geqq 0\,.$$

Damit ist (4.9) aus Satz 4.2 erfüllt und es folgt die Behauptung.

Ad Korollar 4.2d. Folgt mit Korollar 4.2c angewandt auf das Rechteck $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^n \colon a_j \leqq \hat{u}_j \leqq a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\} . \qquad \square$$

Ad Korollar 4.2e. Folgt mit Korollar 4.2c angewandt auf Kreis $\hat{K}$:

$$\hat{K} = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^n \colon \hat{u}^{\mathsf{T}} \hat{u} = 1\} . \qquad \square$$

Ad Korollar 4.4b. Dies zeigt man analog zum Beweis von Korollar 4.2c.

4.4. EIN BEISPIEL AUS DER BIOCHEMIE

Als Anwendungsbeispiel wird Beispiel (H) aus [11; 6] betrachtet. Es handelt sich um ein System von Reaktions- Diffusionsgleichungen als Modell für gewisse biochemische Reaktionen [6].

Sei also das System

$$(4.32)\qquad \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} u_t - \alpha u_{xx} + f_1(u, v) &= 0 \\ v_t - \beta v_{xx} + f_2(u, v) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{auf} \quad \Omega_0 \times (0, \infty) \\ &(u(x, t), v(x, t)) = (A, B/A) \qquad \text{für} \quad x \in \partial\Omega\,, \quad t \geqq 0\,, \\ &(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}_0\,, \end{aligned}$$

für $(u, v) \in R^\infty$ gegeben, wobei

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &:= -A + (B + 1)\, u - u^2 v \\ f_2(u, v) &:= -Bu + u^2 v\,, \quad A, B > 0\,. \end{aligned}$$

u und v bezeichnen Konzentrationen biochemischer Substanzen. Mit Hilfe von Korollar 4.2d kommt man zu folgender *Stabilitätsaussage*:

> Seien $\alpha, \beta \geqq 0$. Falls $A > 0$, $0 < B < 1/2$, so ist der „bzgl. $f = (f_1, f_2)$ stationäre Punkt $(A, B/A)$“ lokal (exp.) asymptotisch stabil.

Dies ergibt sich aus folgender *Rechnung*: Zum Nachweis von (4.28), (4.29) von Korollar 4.2d angewandt auf $u_s = (A, B/A)$ sind reelle positive Konstanten a_1^*, $-a_{*1}$, a_2^*, $-a_{*2}$ zu finden mit

$$(4.33)\qquad \begin{aligned} a_1^*(1 - B) - A^2\eta_2 > 0\,; &\quad a_2^* A^2 + B\eta_1 > 0\,; \\ -a_{*1}(1 - B) + A^2\eta_2 > 0\,; &\quad -a_{*2}A^2 - B\eta_1 > 0 \end{aligned}$$

für η_1, η_2 mit $a_{*1} \leqq \eta_1 \leqq a_1^*$, $a_{*2} \leqq \eta_2 \leqq a_2^*$. Bemerkung 4.4 impliziert bereits $0 < B < 1$. Wegen $0 < B < \frac{1}{2}$ ist $[B/(1 - B)] < [(1 - B)/B]$ und bei beliebig vorgegebenem $a_{*2} < 0$ gilt:

$$(4.34)\qquad [B/(1 - B)]\,(-a_{*2}) < [(1 - B)/B]\,(-a_{*2})\,.$$

Es existiert also ein $a_2^* > 0$ mit

$$(4.35)\qquad 0 < [B/(1 - B)]\,(-a_{*2}) < a_2^* < [(1 - B)/B]\,(-a_{*2})\,.$$

Daher kann man $a_{*1} < 0$, $a_1^* > 0$ finden mit

$$(4.36) \qquad \begin{aligned} &0 < [A^2/(1-B)]\, a_2^* < a_1^* < [A^2/B]\,(-a_{*2})\,, \\ &[A^2/B]\,(-a_2^*) < a_{*1} < [A^2/(1-B)]\, a_{*2} < 0\,. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen (4.36) sind äquivalent zu:

$$\begin{aligned} a_1^*(1-B) - A^2 a_2^* > 0\,; &\qquad a_2^* A^2 + B a_{*1} > 0\,; \\ -a_{*1}(1-B) + A^2 a_{*2} > 0\,; &\qquad -a_{*2}A^2 - B a_1^* > 0\,. \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen sind hinreichend für (4.33).

Bemerkung 4.4. Für $A > 0$, $B > 0$ mit $1/2 < B < 1$ behaupten Chueh et al. [11] die Invarianz von Rechtecken, die genügend eng den Punkt $(A, B/A)$ umschließen. Dies ist *falsch*, da die für Invarianzaussagen notwendige Tangentenbedingung (3) von Satz 4.2 aus [11] nur für Parameter B mit $0 < B \leqq 1/2$ erfüllt ist. (Beweis durch einfaches Nachrechnen.)

5. DISKUSSION EINES BEISPIELS

5.1. Allgemeine Vorbemerkungen

Es wird ein Beispiel von Chueh et al. [11; 6] bearbeitet und diskutiert. Neben den dortigen Invarianzaussagen werden mit Hilfe der Theorie der form-invarianten Schranken asymptotische Verhaltensweisen der Lösungen nachgewiesen. Um „stationäre Punkte bzgl. f" sind konkrete Anziehungsbereiche angebbar; sie werden durch konvexe Mengen (Rechtecke, Kreise oder auch Durchschnitte von Mengen unterschiedlicher Form beschrieben. Die globalen asymptotischen Stabilitätsaussagen sind häufig nur mit Beschränkungen an Ω_0 herleitbar (vgl. die Ergebnisse (iii) und (ii) aus dem Abschnitt 5.2)

Die Differentialgleichungen sind vom Typ (4.1), wobei speziell

$$(5.1) \qquad \hat{A}_i(x) = a_i I_m \quad (a_i \geqq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$(5.2) \qquad \hat{b}_i(x) = b_i \qquad (b_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Für Untersuchungen auf asymptotische Verhaltensweisen werden Anfangs- und Randbedingungen der Art (4.2), (4.3) ergänzt. (4.2) wird gelegentlich verallgemeinert zu einer Bedingung der Art

$$(5.3) \qquad u(x, t) = u_s \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega_0\,, \quad t \geqq T_0 > 0$$

oder zu einer gemischten Randbedingung.

Die Differentialgleichungen werden bei asymptotischen Stabilitätsaussagen auf $\Omega_0 \times (0, \infty)$ und bei Invarianzaussagen auf $\Omega_0 \times (0, T]$, $T > 0$ betrachtet.

Übliche Vorgehensweise

In den betrachteten Beispielen sind in der Regel die Mengen G_l $(l = 1, 2, \ldots, N)$ und die Funktion f derart gegeben, daß die allgemeine Voraussetzung von Abschnitt 4.2 erfüllt ist. Zur Anwendung des Satzes 3.3 mit einem festen $T > 0$ und einer Funktion $\psi \in \mathscr{R}$ (unabhängig von $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$) ist also die Ungleichung (4.4) nachzuprüfen, wobei lediglich $\eta \in \bigcap_{l=1}^{N} G_l$ betrachtet werden. ($\eta \in G_l$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ folgt wie in Satz 4.1).

Mit Satz 3.3 kann man nun schließen:

Falls

(5.4a) $\qquad v(x, 0) \in \psi(x, 0)\, G_l \quad (x \in \bar{\Omega}_0;\ l = 1, 2, \ldots, N)$,

(5.4b) $\qquad v(x, t) \in \psi(x, t)\, G_l \quad ((x, t) \in \partial\Omega_0 \times (0, T];\ l = 1, 2, \ldots, N)$,

dann

(5.5) $\qquad v(x, t) \in \psi(x, t)\, G_l \quad ((x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, T];\ l = 1, 2, \ldots, N)$

für jede Lösung $v \in R$ des Problems (4.1), (4.2), (4.3) auf $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \times [0, T]$.

Da in den Beispielen die Funktion ψ mit (4.4) und (5.4b) unabhängig von T wählbar ist, folgt:

$$v(x, t) \in \psi(x, t)\, G_l \quad ((x, t) \in \bar{\Omega}_0 \times [0, \infty);\ l = 1, 2, \ldots, N)$$

für jede Lösung $v \in R^\infty$ des Problems (4.1)–(4.3).

Mit einer Funktion ψ vom Typ (1.3) sind somit (exp.) asymptotische Verhaltensweisen von v nachweisbar.

5.2. Die Fitzhugh-Nagumo Gleichungen

Mathematische Modelle zur Beschreibung der Leitung von Nervenimpulsen wurden zuerst in einer Arbeit von Hodgkin und Huxley [15] gegeben. Einfachere Modelle, welche das qualitative Verhalten analysieren sollten, wurden auch von Fitzhugh und Nagumo [12, 20] vorgelegt. Die Fitzhugh-Nagumo Gleichungen bilden ein System der Art

$$(5.6) \qquad \left.\begin{aligned} v_t - v_{xx} - g(v) + u &= 0 \\ u_t - \varepsilon u_{xx} - \sigma u + \gamma u &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{auf } (0, L) \times (0, \infty) \\ \text{bzw. } (0, L) \times (0, T];\ L > 0 \end{array}$$

mit reellen Konstanten $\sigma, \gamma > 0$ und $\varepsilon \geqq 0$, sowie $g(v) := -v(v - a)(v - b)$, $0 < a < b$.

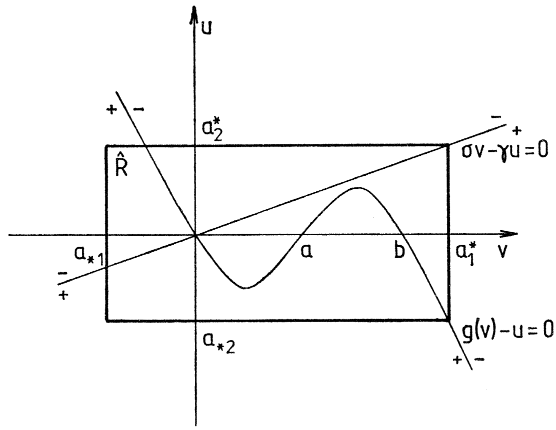
Sei ein Rechteck $\tilde{R}$ gegeben durch

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} \tilde{R} := \{(\hat{v}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^2\colon & a_{*1} \leqq \hat{v} \leqq a_1^*;\ a_{*2} \leqq \hat{u} \leqq a_2^*; \\ & a_{*1}, a_{*2} < 0;\ a_1^*, a_2^* > 0\}\,. \end{aligned}$$

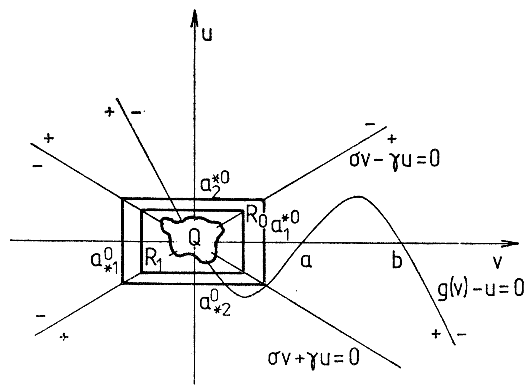
Ein Rechteck $\tilde{R}$ sei vom Typ $\hat{R}$, falls es durch $a_1^*, a_{*1}, a_2^*, a_{*2}$ gegeben ist mit

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} \sigma a_1^* - \gamma a_2^* &\leqq 0\,; & g(a_1^*) - a_{*2} &\leqq 0\,; \\ \sigma a_{*1} - \gamma a_{*2} &\geqq 0\,; & g(a_{*1}) - a_2^* &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

Skizzen zu $\hat{R}$, R_0 und R_1:



Skizze 1



Skizze 2

(Im Bereich + ist $g(v) - u \geqq 0$ bzw. $\sigma v - \gamma u \geqq 0$ bzw. $\sigma v + \gamma u \geqq 0$;
Im Bereich − ist $g(v) - u \leqq 0$ bzw. $\sigma v - \gamma u \leqq 0$ bzw. $\sigma v + \gamma u \leqq 0$.)

Für Parameter a, b, σ, γ mit $ab > \sigma/\gamma$ sei das Rechteck R_0 (Skizze 2) gegeben durch

(5.9) $$R_0 = \{(\hat{v}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^2 : a_{*1}^0 \leqq \hat{v} \leqq a_1^{*0};\ a_{*2}^0 \leqq \hat{u} \leqq a_2^{*0};\ a_{*1}^0, a_{*2}^0 < 0,\ a_1^{*0}, a_2^{*0} > 0\}$$

mit $a_{*1}^0, a_1^{*0}, a_{*2}^0, a_2^{*0}$ gegeben durch

$$a_{*2}^0 = -(\sigma/\gamma)\, a_1^{*0}\ ;\quad a_{*1}^0 = -a_1^{*0}\ ;\quad a_2^{*0} = (\sigma/\gamma)\, a_1^{*0}$$

mit $a_1^{*0} < a$ und $g(a_1^{*0}) = -(\sigma/\gamma)\, a_1^{*0}$, d.h.

$$a_1^{*0} = [(a + b)/2] - [((a + b)^2/4) - ab + (\sigma/\gamma)]^{1/2} > 0\,.$$

Mit diesen Festsetzungen kommt man zu folgenden *Ergebnissen*:

(i) Ein Rechteck vom Typ $\hat{R}$ ist invariant bzgl. des Problems (5.6).

(ii) Sei $ab > \sigma/\gamma$. Das Rechteck R_0 ist invariant bzgl. des Problems (5.6). Für jede kompakte Menge Q mit $Q \subset R_0^\circ$ existiert ein Rechteck R_1 (Skizze 2) mit $Q \subset R_1^\circ \subset \subset R_0^\circ$, welches bzgl. des Problems (5.6) invariant ist. Für die Ergebnisse (iii), (iv) seien die Randbedingungen gegeben durch

(5.10a) $\quad (v(0, t), u(0, t)) = (0, 0)$ für $t \geqq T_0 > 0$

(5.10b) $\quad (v(L, t), u(L, t)) = (0, 0)$ für $t \geqq T_0 > 0$

bzw.

(5.10c) $\quad (v_x(L, t) + \alpha v(L, t), u_x(L, t) + \beta u(L, t)) = (0, 0)$

für $t \geqq 0$ mit reellen Konstanten $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

(iii) Sei $s = (b - a)^2/4$; $r = [(s - ab)/2] + [(s - ab)^2/4 + asb + \sigma^2/\gamma^2]^{1/2}$ Falls L gegeben mit $0 < L < \pi/r^{1/2}$ bzw. $0 < L < \pi/2r^{1/2}$, so ist $u_s = (0, 0)$ global (exp.) asymptotisch stabil bzgl. des Problems (5.6), (5.10a), (5.10b) bzw. (5.6), (5.10a), (5.10c).

(iv) Sei $ab > \sigma/\gamma$. Falls

(5.11a) $\quad (v(x, 0), u(x, 0)) \in R_0^\circ$ für $x \in [0, L]$,

(5.11b) $\quad (v(0, t), u(0, t)) \in R_0^\circ$ für $t \in (0, T_0)$,

(5.11c) $\quad (v(L, t), u(L, t)) \in R_0^\circ$ für $t \in (0, T_0)$,

dann existieren reelle Konstanten $\kappa, K > 0$, so daß

(5.12) $\quad \|(v(\cdot, t), u(\cdot, t))\|^\infty \leqq K \exp(-\kappa t)$ für $t \geqq 0$

für jede Lösung $(v, u) \in R^\infty$ des Problems (5.6), (5.10a), (5.10b).

Bemerkungen zu den Ergebnissen

Bemerkung 5.1. Ergebnis (iii) zeigt, daß bei einer Begrenzung der Länge L des Nervs — L ist i.a. von den Parametern a, b, σ, γ abhängig — die Null global asymptotisch stabil ist, d.h. biologisch gesehen: Ein an den Endpunkten des Nervs für eine gewisse Zeit wirkender Stimulus, welcher dann abbricht (ab T_0), löst eine Nervenreaktion aus, die aber mit zunehmender Zeit ($t \to \infty$) wieder erlischt.

In (iv) wurde gezeigt, daß kleine Lösungen mit Anfangs- und Randwerten innerhalb eines Rechtecks R_0 für $t \to \infty$ gegen Null streben.

Dem entspricht die biologische Tatsache, daß ein minimaler Stimulus erforderlich ist, um eine Nervenreaktion auszulösen; geringe Stimuli werden nicht weitergeleitet.

Bemerkung 5.2. Beim Problem (5.6), (5.10a), (5.10c) erhält man in Ergebnis (iii) günstigere Abschätzungen für die Länge des Nervs L, falls man in (5.14) die Funktion φ als Eigenfunction zum kleinsten Eigenwert des Operators $-(\partial/\partial x)^2$ mit gemischten Randbedingungen (5.10a), (5.10c) wählt. Dies führt auf dem Intervall $[0, \pi]$ zu einer Funktion der Art $\sin(\nu_1 x)$, wobei ν_1 die kleinste Wurzel einer transzendenten Gleichung darstellt. (vgl. [10; V, § 3, 1])

Bemerkung 5.3. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangen auch Rauch und Smoller [21] in einer qualitativen Theorie der Fitzhugh-Nagumo Gleichungen.

Für $\varepsilon = 0$ und den Randbedingungen (5.10a), (5.10b) bzw. (5.10a), (5.10c) in v wird die Aussage von Ergebnis (iii) für Parameter L mit $0 < L < 2\pi/(b - a)$ bzw. $0 < L < \pi/(b - a)$ hinsichtlich der Norm $\| \;\|^{\infty}$ und der L^2-Norm gezeigt (vgl. Satz 5.2 aus [21; 5]). Die Beschränkung $0 < L < 2\pi/(b - a)$ entnimmt man dem Beweis zu Satz 5.2 in [21; 5], indem dort der kleinste Eigenwert des Operators $-(\partial/\partial x)^2$ mit *dirichletschen* Randbedingungen bestimmt wird.

Wegen der Beziehung $\pi/r^{1/2} < 2\pi/(b - a)$ ergibt sich also mit der Methode der form-invarianten Schranken eine ungünstigere Beschränkung von L, welche insbesonders von der Steigung der Geraden $u = (\sigma/\gamma)\, v$ abhängt. Dies ist in Anbetracht der benutzten Technik jedoch nicht verwunderlich und auch anschaulich erklärbar (vgl. Skizze 1).

Im Beweis wird ein Rechteck vom Typ $\hat{R}$ gegeben durch (5.17a)–(5.17c) mit einer Funktion ψ der Art (5.14) auf den Nullpunkt „zusammengezogen". Hierbei sind die Ecken (a_1^*, a_2^*), (a_{*1}, a_2^*), (a_{*1}, a_{*2}) mit (5.17a)–(5.17c) ohne Beschränkung an L wählbar. Falls man die Ecke (a_*^1, a_{*2}) hinzunimmt, wird eine Beschränkung von L notwendig. Diese hängt insbesondere von dem Quotienten σ/γ ab. Denn bei wachsender Steigung der Geraden $u = (\sigma/\gamma)\, v$ wird der Eckpunkt (a_*^1, a_{*2}) des Rechtecks $\hat{R}$ mit (5.17a)–(5.17c) in der Komponente a_*^1 anwachsen und in der Komponente a_{*2} abfallen müssen. Somit wird auch die Funktion $g(v) - u$ in den Eckpunkten $\psi(x, t)\,(a_1^*, a_{*2})$ für $(x, t) \in (0, L) \in (0, \infty)$ größere positive Werte annehmen und daher zum Ausgleich eine stärkere Beschränkung von L erforderlich.

Bemerkung 5.4. Ein Ergebnis vom Typ (i) erhalten auch Chueh et al. [11, 6C]. Hier wird in den Ungleichungen (5.8) zur Bildung des invarianten Rechtecks $\hat{R}$ statt „>" allerdings nur „≧" verlangt.

Verifikation der Ergebnisse (i)—(iv)

Da die allgemeinen Voraussetzungen des Abschnitts 4.2 für die durch (5.13) gegebenen Mengen G_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ und die Funktion $f(v, u) = (u - g(v), \gamma u - \sigma v)^{\mathrm{T}}$ erfüllt sind, wird wie in Anschnitt 5.1 verfahren.

Für $(\hat{v}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$(5.13)\qquad W_1(\hat{v}, \hat{u}) = \hat{v} - a_1^* + 1\,; \quad W_2(\hat{v}, \hat{u}) = -\hat{v} + a_{*1} + 1\,;$$

$$W_3(\hat{v}, \hat{u}) = \hat{u} - a_2^* + 1\,; \quad W_4(v, u) = -\hat{u} + a_{*2} + 1$$

mit Konstanten $a_{*1}, a_{*2} < 0$ und $a_1^*, a_2^* > 0$.

Die Mengen G_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ seien durch W_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ gegeben und daher ist

$$\tilde{R} = \bigcap_{l=1}^{4} G_l\,.$$

$\psi = \psi_l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ sei gegeben durch:

$$(5.14) \qquad \psi(x, t) = \varepsilon_1\, \varphi(x) \exp(-\kappa t) \quad ((x, t) \in [0, L] \times [0, T])$$

mit geeigneter Funktion $\varphi > 0$ und Konstanten $\varepsilon_1 > 0$, $\kappa \geqq 0$. Mit (5.13), (5.14) lauten die Differentialungleichungen (4.4):

$$(5.15a) \qquad (l = 1): \quad a_1^*(\psi_t - \psi_{xx}) - g(\psi a_1^*) + \psi \eta_2 \geqq 0$$

$$(5.15b) \qquad (l = 2): \quad -a_{*1}(\psi_t - \psi_{xx}) + g(\psi a_{*1}) - \psi \eta_2 \geqq 0$$

$$(5.15c) \qquad (l = 3): \quad a_2^*(\psi_t - \varepsilon\psi_{xx}) + \psi(\gamma a_2^* - \sigma \eta_1) \geqq 0$$

$$(5.15d) \qquad (l = 4): \quad -a_{*2}(\psi_t - \varepsilon\psi_{xx}) - \psi(\gamma a_2 - \sigma \eta_1) \geqq 0$$

mit $\psi = \psi(x, t)$ für $(x, t) \in (0, L) \times (0, T]$, $a_{*1} \leqq \eta_1 \leqq a_1^*$, $a_{*2} \leqq \eta_2 \leqq a_2^*$.

Die Anfangs- und dirichletschen Randbedingungen (5.4a), (5.4b) ergeben sich zu:

$$(5.16a) \qquad (v(x, 0), u(x, 0)) \in \varepsilon_1\, \varphi(x)\, \tilde{R} \qquad \text{für} \quad x \in [0, L]\,,$$

$$(5.16b) \qquad (v(0, t), u(0, t)) \in \varepsilon_1\, \varphi(0) \exp(-\kappa t)\, \tilde{R} \qquad \text{für} \quad t \in (0, T]\,,$$

$$(5.16c) \qquad (v(L, t), u(L, t)) \in \varepsilon_1\, \varphi(L) \exp(-\kappa t)\, \tilde{R} \qquad \text{für} \quad t \in (0, T]\,.$$

Ad (i). Seien dazu in (5.14): $\varepsilon_1 = 1$, $\kappa = 0$, $\varphi(x) = 1$ $(x \in [0, L])$, also $\psi \equiv 1$. Unter Berücksichtigung der Abschätzungen $a_{*1} \leqq \eta_1 \leqq a_1^*$, $a_{*2} \leqq \eta_2 \leqq a_2^*$ ist für (5.15a)–(5.15d) hinreichend:

$$(l = 1): \quad -g(a_1^*) + a_{*2} \geqq 0\,; \qquad (l = 2): \quad g(a_{*1}) - a_2^* \geqq 0\,;$$

$$(l = 3): \quad \gamma a_2^* - \sigma a_1^* \geqq 0\,; \qquad (l = 4): \quad \sigma a_{*1} - \gamma a_{*2} \geqq 0\,.$$

Falls also $\tilde{R}$ ein Rechteck vom Typ $\hat{R}$ ist, so gelten die Ungleichungen (4.4), und wenn zusätzlich die Anfangs- und Randwerte aus $\hat{R}$ sind, so folgt:

$$(v(x, t), u(x, t)) \in \hat{R} \quad \text{für} \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T]\,.$$

Daher ist $\hat{R}$ ein invariantes Rechteck.

Ad (ii). R_0 ist ein Rechteck vom Typ $\hat{R}$, wie man leicht nachrechnet. Wegen (i) ist also R_0 invariant bzgl. (5.6). Das Rechteck R_1 wird mit $Q \subset R_1^\circ \subset R_0^\circ$ und achsenparallelen Seiten mit Eckpunkten auf den Geraden $u = (\sigma/\gamma)\, v$ und $u = -(\sigma/\gamma)\, v$ gewählt. Wie man sich leicht überzeugt, ist auch R_1 ein Techteck vom Typ $\hat{R}$ und wegen (i) invariant bzgl. des Problems (5.6). ($ab > \sigma/\gamma$ wurde vorausegestzt, da ensonsten $a_1^{*0} \leqq 0$ und R_0 nicht definiert ist!)

Ad (iii). Betrachte zunächst das Problem (5.6), (5.10a), (5.10b). Dazu sei in (5.14) $\varphi(x) = \sin((\pi - 2\delta_0)(x/L) + \delta_0)$ $(x \in [0, L])$ und $\varepsilon_1, \kappa, \delta_0$ wie unten geeignet gewählt. Wegen $0 < L < \pi/r^{1/2}$ ist $\sigma^2/\gamma^2 < (\pi^2/L^2 + ab)(\pi^2/L^2 - (b - a)^2/4)$. Bei beliebig vorgegebenem $a_{*1} < 0$ existiert also ein $a_1^* > 0$ mit

$$(5.17a) \qquad (-a_{*1})(\sigma/\gamma)((\pi^2/L^2) - (b-a)^2/4)^{-1} < a_1^* <$$
$$< (-a_{*1})(\gamma/\sigma)((\pi^2/L^2) + a\,.$$

Daher gibt es Konstanten $a_{*2} < 0$, $a_2^* > 0$ mit

$$(5.17b) \qquad (\sigma/\gamma)\, a_1^* < a_2^* < (-a_{*1})((\pi^2/L^2) + ab)\,,$$
$$(5.17c) \qquad (-a_1^*)((\pi^2/L^2) - (b-a)^2/4) < a_{*2} < (\sigma/\gamma)\, a_{*1}\,.$$

Die Ungleichungen (5.17b), (5.17c) sind äquivalent zu

$$a_1^*[(\pi^2/L^2) - (b-a)^2/4] + a_{*2} > 0\,,$$
$$(-a_{*1})[(\pi^2/L^2) + ab] - a_2^* > 0\,,$$
$$\gamma a_2^* - \sigma a_1^* > 0\,,$$
$$\sigma a_{*1} - \gamma a_{*2} > 0\,.$$

Aufgrund der Abschätzungen

$$(z-a)(z-b) \geqq -(b-a)^2/4 \quad \text{für} \quad z \geqq 0 \quad \text{und}$$
$$(z-a)(z-b) \geqq ab \qquad\qquad \text{für} \quad z \leqq 0$$

folgt hieraus für genügend kleine Konstanten $\kappa, \delta_0 > 0$

$$a_1^*(-\kappa + (\pi - 2\delta_0)^2/L^2) + a_1^*(\psi a_1^* - a)(\psi a_1^* - b) + a_{*2} \geqq 0\,,$$
$$(-a_{*1})(-\kappa + (\pi - 2\delta_0)^2/L^2) - a_{*1}(\psi a_{*1} - a)(\psi a_{*1} - b) - a_2^*) \geqq 0\,,$$
$$a_2^*(-\kappa + \varepsilon(\pi - 2\delta_0)^2/K^2) + \gamma a_2^* - \sigma a_1^* \geqq 0\,,$$
$$(-a_{*2})(-\kappa + \varepsilon(\pi - 2\delta_0)^2/L^2) - \gamma a_{*2} + \sigma a_{*1} \geqq 0$$

mit $\psi = \psi(x, t)$ für $(x, t) \in (0, L) \times (0, T]$.

Wegen den Beschränkungen $a_{*1} \leqq \eta_1 \leqq a_1^*$, $a_{*2} \leqq \eta_2 \leqq a_2^*$ folgen nach Multiplikation obiger Ungleichungen mit $\psi > 0$ die Differentialungleichungen (5.15a)–(5.15d).

Sei nun $\tilde{R}$ ein Rechteck mit $a_{*1}, a_1^*, a_{*2}, a_2^*$ wie in (5.17a)–(5.17c). Falls $\varepsilon_1 > 0$ – in Abhängigkeit von κ, δ_0, T_0 und $\tilde{R}$ – so groß gewählt, daß:

$$(v(x,0), u(x,0)) \in (\varepsilon_1 \sin(\delta_0))\, \tilde{R} \qquad \text{für} \quad x \in [0, L]$$
$$(v(0,t), u(0,t)) \in (\varepsilon_1 \sin(\delta_0) \exp(-\kappa T_0))\, \tilde{R} \qquad \text{für} \quad t \in (0, T_0)$$
$$(v(L,t), u(L,t)) \in (\varepsilon_1 \sin(\pi - \delta_0) \exp(-\kappa T_0)\, \tilde{R} \quad \text{für} \quad t \in (0, T_0)$$

so gelten die Anfangs- und Randbedingungen (5.16a)–(5.16c), und es folgt für jede Lösung $(v, u) \in R^\infty$ des Problems (5.6), (5.10a), (5.10b)

$$(v(x,t), u(x,t)) \in \varepsilon_1 \exp(-\kappa t)\, \tilde{R} \quad \text{für} \quad (x,t) \in [0, L] \times [0, T]\,.$$

Da T beliebig groß wählbar, ergibt sich also auch (5.12) mit einer Konstanten $K > 0$ abhängig von $\tilde{R}$ und ε_1.

Für das Problem (5.6), (5.10a), (5.10c) sei in (5.14)

$$\varphi(x) = \sin((\pi/2 - 2\delta_0)(x/L) + \delta_0) \quad (x \in [0, L])$$

mit genügend kleinem $\delta_0 > 0$ gewählt.

Ansonsten ist der Beweis analog zu dem des Problems (5.6), (5.10a), (5.10b) durchführbar, wobei nun für $x = L$ anstatt der dirichletschen Randbedingung (5.16c) die entsprechende Differentialungleichung nachzuprüfen ist.

Ad (iv). Sei in (5.14) $\varphi(x) = 1$ $(x \in [0, L])$, $\varepsilon_1 = \exp(\kappa T_0)$ mit $\kappa > 0$ wie unten geeignet gewählt. Sei $a_1^* > 0$ mit $0 < a_1^* < a_1^{*0}$ $(<a)$ und $\kappa > 0$ so klein, daß $0 < \varepsilon_1 a_1^* < a_1^{*0}$. Es folgt dann aufgrund der Wahl von a_1^{*0}

$$(\varepsilon_1 a_1^* - a)(\varepsilon_1 a_1^* - b) > (\sigma/\gamma)$$

und wegen $ab > (\sigma/\gamma)$

$$(\varepsilon_1 a_1^* - a)(\varepsilon_1 a_1^* - b) > (\sigma^2/\gamma^2)(1/ab)\,.$$

Folglich existiert eine Konstante $a_{*1} < 0$ mit

(5.18a) $$(\gamma/\sigma)(-a_1^*)(\varepsilon_1 a_1^* - a)(\varepsilon_1 a_1^* - b) < a_{*1} < (\sigma/\gamma)(1/ab)(-a_1^*)\,.$$

Daher gibt es Konstanten $a_{*2} < 0$, $a_2^* > 0$ mit

(5.18b) $$(\sigma/\gamma)\, a_1^* < a_2^* < ab(-a_{*1})\,,$$

(5.18c) $$-a_1^*(\varepsilon_0 a_1^* - a)(\varepsilon_0 a_1^* - b) < a_{*2} < (\sigma/\gamma) a_{*1}\,.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind bei Vorgabe von a_1^* beliebig „nahe bei“ a_1^{*0} und $\kappa > 0$ genügend klein (d.h. ε_1 genügend „nahe bei“ 1) die Konstanten a_{*1}, a_{*2}, a_2^* auch beliebig „nahe bei“ a_{*1}^0, a_{*2}^0, a_2^{*0} gemäß (5.18a)–(5.18c) wählbar. Mit (5.18a)–(5.18c) folgt:

$$-g(\psi a_1^*) + \psi\eta_2 > 0\,,$$

$$+g(\psi a_{*1}) - \psi\eta_2 > 0\,,$$

$$+\psi(\gamma a_2^* - \sigma\eta_1) > 0\,,$$

$$-\psi(\gamma a_{*2} - \sigma\eta_1) > 0$$

mit $a_{*1} \leqq \eta_1 \leqq a_1^*$, $a_{*2} \leqq \eta_2 \leqq a_2^*$, $\psi = \psi(x, t)$ für $(x, t) \in \Omega_0 \times (0, T]$. Diese Ungleichungen sind für genügend kleines $\kappa > 0$ hinreichend für (5.15a)–(5.15d) bei obiger Wahl von ψ.

Da $\psi(x, t) \geqq 1$ für $(x, t) \in [0, L] \times [0, T_0]$ und wegen den Voraussetzungen (5.11a)–(5.11c) ist es möglich, ein Rechteck $\tilde{R} \subset R_0^\circ$ mit (5.18a)–(5.18c) derart zu bestimmen, daß die Anfangs- und Randwerte aus $\tilde{R}$ sind.

Für jede Lösung $(v, u) \in R^\infty$ des Problems (5.6), (5.10a), (5.10b) mit (5.11a)–(5.11c) folgt daher

$$(v(x, t), u(x, t)) \in \varepsilon_1 \exp(-\kappa t)\, \tilde{R} \quad \text{für} \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T]\,.$$

Da T beliebig groß wählbar, existiert eine von T_0, κ und $\tilde{R}$ abhängige Konstante $K > 0$ mit der Eigenschaft (5.12). □

[1] *E. Abrahams, T. Tsuneto:* Time variation of the Ginzberg-Landau order parameter. Phys. Rev. 152 (1968), 416—432.

[2] *N. Alikakos:* Remarks on invariance in reaction-diffusion equations. Nonlinear Analysis 5 (1981), 593—614.

[3] *H. Amann:* Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems. J. Math. Anal. App. 65 (1978), 432—467.

[4] *N. R. Amundson:* Nonlinear problems in chemical reactor theory. SIAM-AMS Proc. 8 (1974), 59—84.

[5] *J. W. Bebernes, K. Schmit.:* Invariant sets and the Hukuhara-Kneser property for systems of parabolic partial differential equations. Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 575—567.

[6] *J. A. Boa:* Multiple steady states in a model biochemical reaction. Studies in appl. Math. 54 (1975), 9—15.

[7] *R. G. Casten, C. J. Holland:* Stability properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations. SIAM J. Appl. Math. 33 (1977), 353—364.

[8] *E. Conway, D. Hoff, J. Smoller:* Large time behaviour of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations. SIAM J. Appl. Math. 35 (1978), 1—16.

[9] *R. Courant, K. O. Friedrichs:* Supersonic flow and shock waves, Interscience Publishers, Inc., New York, 1948.

[10] *R. Courant, D. Hilbert:* Methods of mathematical physics. Vol. I, Interscience Publishers, Inc. New York, 1953.

[11] *K. N. Chueh, C. C. Conley, J. A. Smoller:* Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 373—392.

[12] *R. Fitzhugh:* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membran. Biophys. J. 1 (1961), 445—466.

[13] *G. R. Gavalas:* Nonlinear differential equations of chemically reacting systems. Springer, New York, 1968.

[14] *C. Georgakis, R. L. San:* On the stability of the steady state in systems of coupled diffusion and reaction. Arch. Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 266—296.

[15] *A. L. Hodgkin, A. F. Huxley:* A quantitative description of membran current and its application to conduction and excitation in nerves. J. Physiol. 117 (1952), 500—544.

[16] *W. E. Kastenberg:* On the asymptotic stability of non-linear distributed parameter energy systems. Internat. J. Control 19 (1974), 73—79.

[17] *R. Lemmert:* Über die Invarianz einer konvexen Menge in bezug auf Systemen gewöhnlichen, parabolischen und elliptischen Differentialgleichungen, Math. Ann. 230 (1977), 43—56.

[18] *R. Lemmert:* Über die Invarianz konvexer Mengen eines normierten Raumes in bezug auf elliptische Differentialgleichungen. Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 297—318.

[19] *R. R. Martin Jr.:* Nonlinear perturbations of uncoupled systems of elliptic operators. Math. Ann. 211 (1974), 155—169.

[20] *J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa:* Am active pulse transmission line simulating nerve axon. Proc. IRE 50 (1964), 2061—2070.

[21] *J. Rauch, J. A. Smoller:* Qualitative theory of the Fitzhugh-Nagumo equations. Advances in Math. 27 (1978), 12—44.

[22] *R. Redheffer, W. Walter:* Invariant sets for systems of partial differential equations. I. parabolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 67 (1978), 41—52.

[23] *R. Redheffer, W. Walter:* Invariant sets for systems of partial differential equations, II. First-order and elliptic equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 73 (1980), 19—29.

[24] *D. H. Sattinger:* Stability of nonlinear parabolic systems. J. Math. Anal. and Appl. 24 (1968), 241—245.
[25] *C. Schaefer:* Invariant sets and contractions for weakly coupled systems of parabolic differential equations. Rendiconti di Mathematica 13 (1980), 337—357.
[26] *K. Schmitt:* Boundary value problems for quasilinear second order elliptic equations. Nonlinear Anal. 2 (1978), 263—309.
[27] *J. Schröder:* Shape-invariant bounds and more general estimates for vector-valued elliptic-parabolic problems. J. of Diff. Equ. 45 (1982), 431—460.
[28] *J. Schröder:* Operator inequalities. Academic Press, New York, 1980.
[29] *H. Triebel:* Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
[30] *V. S. Vladimirov:* Equations of mathematical physics. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
[31] *W. Walter:* Differential and integral inequalities, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 55. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
[32] *G. N. Watson:* A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge at the University Press, 1958.
[33] *H. F. Weinberger:* Invariants sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems. Rendiconti di Mathematica 8, Serie VI (1975), 295—310.

Souhrn

VÝROKY O VNOŘENÍ PRO SYSTÉMY SEMILINEÁRNÍCH PARABOLICKÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

WILHELM HEINRICHS

Pro řešení semilineárních parabolických rovnic jsou uvedeny výroky o vnoření. Vyšetřují se přitom otázky stability řešení. Výsledky jsou diskutovány na příkladu Fitzhugh-Nagumových rovnic.

Author's address: Dr. *Wilhelm Heinrichs,* Mathematisches Institut der Heinrich-Heine Universität Düsseldorf, Universitätsstraße 1, D-4000 Düsseldorf 1.