

# Applications of Mathematics

---

Miroslav Šisler

Über die Konvergenzoptimierung eines symmetrischen Iterationsverfahrens

*Applications of Mathematics*, Vol. 36 (1991), No. 1, 21–31

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104441>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1991

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER DIE KONVERGENZOPTIMIERUNG EINES SYMMETRISCHEN ITERATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Angegangen an 20. 6. 1989)

*Zusammenfassung.* In der Arbeit wird ein gewisses symmetrisches Iterationsverfahren für die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems der Form  $x = Bx + b$  mit einer schwach zweizyklischen Matrix untersucht. Die untersuchte Methode hängt von 3 reellen Parametern ab. In der Arbeit wird die Frage der optimalen Parameterwahl vom Gesichtspunkt der Konvergenzgeschwindigkeit gelöst.

**Keywords:** linear system, iterative method, weakly cyclic matrix, convergence

*AMS Classification:* 65F10

Die Arbeit, ebenso wie die Arbeit [2], befasst sich mit einem symmetrischen Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$x = Bx + b,$$

wo  $B$  eine schwach zweizyklische Blockmatrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} O, & U \\ L, & O \end{pmatrix}$$

ist (die diagonalen Nullmatrizen sind quadratisch). Das Iterationsverfahren wird durch die Formel

$$x_{v+1} = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x_v + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) b_U + b_L$$

definiert; hier sind  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $\beta$  reelle Parameter und es gilt

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) U(\alpha_1, \alpha_2, \beta),$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} b,$$

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_1 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_U = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} b.$$

Ebenso, wie in [2] setzen wir voraus, dass  $I - B$  eine nichtsinguläre Matrix ist und dass die Matrix  $B^2$  nichtnegative Eigenwerte  $\mu_i^2$  besitzt, wobei  $0 \leq m^2 \leq \mu_i^2 \leq M^2 < 1$  gilt. Wir werden uns mit der optimalen Wahl der Parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  vom Gesichtspunkt der Optimierung des Spektralradius  $\varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$  der Matrix  $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$  befassen. In dem Satz 3 von [2] wurde diese Frage für den speziellen Fall  $\beta = -1$  gelöst.

Wir beweisen folgenden Satz:

**Satz. A.** *Es sei  $1 - m^2 < \sqrt{1 - M^2}$ . Dann erreicht  $\varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$  seinen Minimalwert für jede drei Parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ , für die die Beziehungen*

$$(1) \quad (1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2) = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2),$$

$$(2) \quad \beta = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

gelten; dabei ist

$$(3) \quad \min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)].$$

**B.** *Es sei  $1 - m^2 \geq \sqrt{1 - M^2}$ . Dann ist*

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = [1 - \sqrt{1 - M^2}]/[1 + \sqrt{1 - M^2}],$$

wo die Parameterwerte  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  durch den Satz 3 der Arbeit [2] gegeben sind.

Der Beweis des Satzes. Aus den Sätzen 1 und 2 in [2] folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$  genau alle Wurzeln  $\lambda$  der Gleichungen

$$(4) \quad (a\mu_i^2 - c)(f\mu_i^2 - c) - b\mu_i^2(d\mu_i^2 + e) = 0$$

sind, wobei  $\mu_i^2$  die Eigenwerte der Matrix  $B^2$  sind und

$$a = \alpha_2(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta),$$

$$b = \alpha_2(\alpha_1 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$c = \lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1),$$

$$d = -\beta(\beta + \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$e = \alpha_1(\alpha_2 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$f = (\beta + \alpha_1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta)$$

gilt. Die Gleichung (4) ist eine quadratische Gleichung, die bei gegebenen Werten  $\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta$  im Allgemeinen zwei Wurzeln

$$(5) \quad \lambda_1(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 2\alpha_1\alpha_2(1 + \beta) \mu_i^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) - \sqrt{(D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta))}\} / 2\alpha_1^2\alpha_2^2,$$

$$(6) \quad \lambda_2(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 2\alpha_1\alpha_2(1 + \beta) \mu_i^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + \sqrt{(D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta))}\} / 2\alpha_1^2\alpha_2^2$$

besitzt; dabei gilt

$$(7) \quad D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \frac{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} \cdot \left\{ \frac{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 + \beta) \mu_i^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} \right\}.$$

Man definiere jetzt die Zahlen  $A, B$  durch die Formeln

$$(8) \quad A = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) / \alpha_1\alpha_2 = (1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2), \\ B = (\beta + 1) / \alpha_1\alpha_2.$$

Man bezeichne ferner

$$\lambda_1(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \lambda_1(\mu_i^2, A, B), \quad \lambda_2(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \lambda_2(\mu_i^2, A, B), \\ D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = D(\mu_i^2, A, B), \quad \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = \varrho(S(A, B)).$$

Aus den Formeln (5), (6), (7) folgen dann die Formeln

$$(9) \quad \lambda_1(\mu_i^2, A, B) = \frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - B\mu_i^2 + A - \sqrt{(D(\mu_i^2, A, B))},$$

$$(10) \quad \lambda_2(\mu_i^2, A, B) = \frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - B\mu_i^2 + A + \sqrt{(D(\mu_i^2, A, B))},$$

$$(11) \quad D(\mu_i^2, A, B) = \frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 \{ \frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - 2B\mu_i^2 + 2A \}.$$

Es sei jetzt  $A$  eine gegebene Zahl und  $\mu_i^2$  sei einer der Eigenwerte der Matrix  $B^2$ . Dann bildet  $\lambda_1, \lambda_2$  ein Paar komplex konjugierter Wurzeln, oder ist  $\lambda_1 = \lambda_2$ , insofern

$$(12) \quad D(\mu_i^2, A, B) \leq 0$$

gilt. Da  $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 \geq 0$  ist, gilt die Ungleichung (12) genau dann, wenn  $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 = 0$  oder  $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1) > 0$  ist und zugleich

$$(13) \quad \mu_i^2 B^2 + B[2\mu_i^2(1 - A) - 4\mu_i^2] + \mu_i^2(1 - A)^2 + 4A \leq 0$$

gilt. Solange  $A \leq 0$  gilt, ist die Ungleichung (13) für jedes  $B$  von dem Intervall

$$(14) \quad B_{1\mu_i^2} \leq B \leq B_{2\mu_i^2}$$

erfüllt, wo

$$(15) \quad B_{1\mu_i^2} = 1 + A - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu_i^2)},$$

$$(16) \quad B_{2\mu_i^2} = 1 + A + 2\sqrt{A(1 - 1/\mu_i^2)}$$

gilt. Für  $A > 0$  und beliebige Zahlen  $B, \mu_i^2$  sind offensichtlich die Wurzeln  $\lambda_1(\mu_i^2, A, B), \lambda_2(\mu_i^2, A, B)$  reell.

Man betrachte jetzt den Fall

$$(17) \quad B - A + 1 = 0,$$

d. h.  $B = A - 1$ . Dann ist nach (9), (10), (11)

$$(18) \quad \lambda_1(\mu_i^2, A, B) = \lambda_2(\mu_i^2, A, B) = -B\mu_i^2 + A = (1 - A)\mu_i^2 + A = A(1 - \mu_i^2) + \mu_i^2.$$

Der Graph der Funktion  $(1 - \mu_i^2)A + \mu_i^2$  ist eine Gerade mit einem positiven Richtungskoeffizient  $1 - \mu_i^2$  (da  $0 \leq m^2 \leq \mu_i^2 \leq M^2 < 1$  gilt) und für  $A = 1$  gilt immer  $(1 - \mu_i^2)A + \mu_i^2 = 1$ . Für  $A < 1$  gilt ferner

$$(1 - m^2)A + m^2 \leq (1 - \mu_i^2)A + \mu_i^2 \leq (1 - M^2)A + M^2,$$

wobei  $|\lambda_1(m^2, A, B)| = |\lambda_1(M^2, A, B)|$  ist, wenn

$$- [(1 - m^2)A + m^2] = (1 - M^2)A + M^2,$$

d. h.

$$(19) \quad A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)$$

gilt. Für  $B$  gilt dann angesichts (17)

$$(20) \quad B = 2/(M^2 + m^2 - 2).$$

Angesichts (17), (18), (19) und (20) ist

$$\begin{aligned} & \lambda_1(M^2, (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2), 2/(M^2 + m^2 - 2)) = \\ & = [(1 - M^2)(M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)] + M^2 = \\ & = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)], \end{aligned}$$

so dass  $\min_{A, B=A-1} \varrho(S(A, B)) = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]$  gilt.

Es sei jetzt  $B - A + 1 \neq 0$ . Wir unterscheiden einige Fälle.

I. Der Fall  $A > 0$ . In diesem Fall sind die Wurzeln  $\lambda_1(\mu_i^2, A, B), \lambda_2(\mu_i^2, A, B)$  für jede  $\mu_i^2$  reell, wobei  $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A - 1)^2 - B\mu_i^2 + A \geq 0$  ist. Es gilt also nach (8) und (10)  $\lambda_2(\mu_i^2, A, B) \geq 0$  und  $|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| \leq \lambda_2(\mu_i^2, A, B)$ . Wir beweisen jetzt, dass  $\lambda_2(M^2, A, B) \geq M^2$  für jedes  $B$  gilt. Diese Ungleichung ist der Ungleichung

$$(22) \quad \sqrt{(D(M^2, A, B))} \geq M^2 - \frac{1}{2}M^2(B - A + 1)^2 + BM^2 - A$$

äquivalent. Wenn die rechte Seite der Ungleichung (22) nichtpositiv ist, gilt diese Ungleichung automatisch. Wenn

$$(23) \quad M^2 - \frac{1}{2}M^2(B - A + 1)^2 + BM^2 - A > 0$$

ist, bekommen wir nach Potenzierung und Umformung der Ungleichung (22) die Ungleichung

$$(24) \quad A(1 + M^2) < 2M^2(B + 1).$$

Aus (23) folgt unmittelbar die Ungleichung

$$2A \leq 2M^2(1 + B) - \frac{1}{2}M^2(B + 1 - A)^2$$

wovon (24) folgt. Es ist also

$$\varrho(S(A, B)) \geq M^2$$

für jedes  $B$  und  $A > 0$ .

II. Es sei  $A = 0$ . Dann gilt für eine beliebige Zahl  $B$

$$\begin{aligned} \lambda_1(M^2, 0, B) &= \frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - BM^2 - \\ &- \sqrt{(\frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 \{ \frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - 2BM^2 \})} = M^2, \\ \lambda_2(M^2, 0, B) &= \frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - BM^2 + \\ &+ \sqrt{(\frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 \{ \frac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - 2BM^2 \})} = B^2M^2. \end{aligned}$$

Für  $A = 0$  und eine beliebige  $B$  ist also wieder

$$\varrho(S(0, B)) \geq M^2.$$

III. Wir befassen uns mit dem wichtigsten Fall  $A < 0$ . Es sei  $\mu_i^2$  ein beliebiger Eigenwert der Matrix  $B^2$  und die Zahl  $B$  liege im Intervall (14). Dann sind die Wurzeln  $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$ ,  $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$  komplex konjugiert oder identisch und es gilt

$$|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| = |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)| = (B\mu_i^2 - A)^2.$$

Der Graph der Funktion  $B\mu_i^2 - A$  der Veränderlichen  $B$  ist eine Gerade mit dem Richtungskoeffizient  $\mu_i^2$ , wobei für  $B = 0$   $B\mu_i^2 - A = -A$  und für  $B = A/\mu_i^2$   $B\mu_i^2 - A = 0$  ist. Es gilt ferner  $A/\mu_i^2 \leq B_{1\mu_i^2}$ , da diese Ungleichung mit den Ungleichungen  $A/\mu_i^2 \leq A + 1 - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu_i^2)}$ ,  $0 \leq [1 - A(1 - 1/\mu_i^2)]^2$  äquivalent ist. Es ist also für  $B$  aus dem Intervall (14)  $B\mu_i^2 - A \geq 0$  und es gilt

$$(25) \quad A(\mu_i^2, A, B) = |\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| = |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)| = B\mu_i^2 - A.$$

a) Setzen wir nun voraus, dass

$$(26) \quad - (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leq A < 0$$

und

$$(27) \quad B \geq B_{2M^2}$$

gilt. Es ist leicht zu beweisen, dass eine solche Zahl  $\mu^2$  existiert, dass  $0 < \mu^2 < M^2$  und  $B = B_{2\mu^2} = A + 1 + 2\sqrt{A(1 - 1/\mu^2)}$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda_2(M^2, A, B) &= \lambda_2(M^2, A, B_{2\mu^2}) = \\ &= \frac{1}{2}M^2(B_{2\mu^2} - A + 1)^2 - B_{2\mu^2}M^2 + \sqrt{(D(M^2, A, B_{2\mu^2}))} = \\ &= [\sqrt{M^2(1 + \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)})} + \sqrt{A(1 - M^2/\mu^2)}]^2 \geq M^2\end{aligned}$$

für jede  $A < 0$  (und auch für (26)). Es gilt also für jede  $A$  aus dem Intervall (26) und  $B$  aus dem Intervall (27)

$$\varrho(S(A, B)) \geq M^2.$$

b) Man setze voraus, dass  $A$  im Intervall (26) und  $B$  im Intervall

$$(28) \quad B_{1M^2} \leq B \leq B_{2M^2}$$

liegen. Aus der Ungleichung (26) folgt sofort, dass  $0 \leq B_{1M^2}$  ist. Für eine nicht-negative Zahl  $B$  gilt aber nach (25)

$$\begin{aligned}A(\mu_i^2, A, B) &= B\mu_i^2 - A \leq BM^2 - A = \Lambda(M^2, A, B) = \\ &= |\lambda_2(M^2, A, B)|\end{aligned}$$

und es gilt ferner

$$\begin{aligned}\min_{B_{1M^2} \leq B \leq B_{2M^2}} |\lambda_2(M^2, A, B)| &= B_{1M^2}M^2 - A = \\ &= M^2(1 - \sqrt{A(1 - 1/M^2)})^2 \geq \\ &\geq M^2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}\right)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)}\right)^2 = \\ &= M^2 \left(1 - \frac{\sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}\right) = \frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}.\end{aligned}$$

Im Fall (26) und (28) gilt also

$$\varrho(S(A, B)) \geq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}).$$

c) Setzen wir (26) und

$$(29) \quad B \leq B_{1M^2}$$

voraus. Ähnlicherweise, wie im Fall a) existiert eine solche Zahl  $\mu^2$ ,  $\mu^2 \leq M^2$ , dass  $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu^2)}$  gilt. Für (29) gilt dann

$$\begin{aligned}\lambda_2(M^2, A, B) &= \lambda_2(M^2, A, B_{1\mu^2}) = \\ &= \frac{1}{2}M^2(B_{1\mu^2} - A + 1)^2 - B_{1\mu^2}M^2 + A + \sqrt{(D(M^2, A, B_{1\mu^2}))} = \\ &= [\pm \sqrt{M^2(1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)})} + \sqrt{A(1 - M^2/\mu^2)}]^2,\end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen (+), bzw. (-) im Fall  $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geq 0$  bzw.  $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$ . gilt. Es ist also

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [-\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2$$

für  $\mu^2 < A/(A - 1)$  und

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2$$

für  $A/(A - 1) \leq \mu^2 \leq M^2$ . Durch Differenzierung der Funktion  $\lambda_2(M^2, A, B)$  nach  $\mu^2$  stellt man fest, dass die Funktion  $\lambda_2(M^2, A, B)$  abnehmend für alle  $\mu^2 \leq M^2$  ist. Es ist also

$$\begin{aligned} \min_{B \leq B_{1M^2}} \lambda_2(M^2, A, B) &= \lambda_2(M^2, A, B_{1M^2}) = \\ &= [\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})}]^2 = \\ &= M^2 \left( 1 - \sqrt{\left( \frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}} \frac{1 - M^2}{M^2} \right)} \right)^2 = \frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}. \end{aligned}$$

Dadurch ist bewiesen, dass auch im Fall c)

$$\varrho(S(A, B)) \geq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

gilt.

Eine ähnliche Analyse führen wir nun auch in dem Fall durch, wenn  $A$  im Intervall

$$(30) \quad A \leq -(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

liegt.

d) Es gelte zuerst (30) und (27). Im Fall a) wurde bewiesen, dass die Ungleichung

$$\lambda_2(M^2, A, B) \geq M^2 \geq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

für jede negative Zahl  $A$  und also auch für (30) gilt. Es gilt also im Fall d)

$$\varrho(S(A, B)) \geq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}).$$

e) Es gelte ferner (30) und (28). Aus (30) folgt sofort, dass  $B_{1M^2} < 0$  ist. Falls  $0 \leq B \leq B_{2M^2}$  ist, ist  $A(M^2, A, B) \geq -A = (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$ , so dass für (30) und  $0 \leq B \leq B_{2M^2}$  die Ungleichung  $\varrho(S(A, B)) \geq (1 - \sqrt{(1 - M^2)}) : (1 + \sqrt{(1 - M^2)})$  gilt.

Es sei  $B_{1M^2} \leq B \leq 0$ . Dann ist

$$A(\mu_i^2, A, B) = B\mu_i^2 - A \leq Bm^2 - A = A(m^2, A, B) = |\lambda_2(m^2, A, B)|,$$

so dass

$$\begin{aligned} (31) \quad \min_{B_{1M^2} \leq B \leq 0} |\lambda_2(m^2, A, B)| &= \min_{B_{1M^2} \leq B \leq 0} Bm^2 - A = B_{1M^2}m^2 - A = \\ &= [A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/M^2))}]m^2 - A = \\ &= A(m^2 - 1) - 2m^2\sqrt{(A(1 - 1/M^2))} + m^2 \end{aligned}$$



gilt. Es gilt ferner

$$(32) \quad \frac{d}{dA} [A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{A(1 - 1/M^2)} + m^2] = \\ = (m^2 - 1) \sqrt{A(1 - 1/M^2)} - m^2(1 - 1/M^2).$$

Man kann leicht beweisen, dass für

$$(33) \quad 1 - m^2 > \sqrt{1 - M^2}$$

die Ableitung im Intervall (30) negativ ist, so dass der Ausdruck (31) seinen Minimalwert für

$$A_1 = -(1 - \sqrt{1 - M^2}) / (1 + \sqrt{1 - M^2})$$

annimmt. Nach der Einsetzung von  $A_1$  in (31) bekommt man nach einer Umformung

$$A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{A(1 - 1/M^2)} + m^2 = \\ = (1 - \sqrt{1 - M^2})(1 - m^2) / (1 + \sqrt{1 - M^2}) - \\ - 2m^2 \sqrt{1 - M^2} / (1 + \sqrt{1 - M^2}) + m^2 = \\ = (1 - \sqrt{1 - M^2}) / (1 + \sqrt{1 - M^2}).$$

Für (33), (30) und  $B_{1M^2} \leq B \leq 0$  gilt also wieder

$$\varrho(S(A, B)) \geq (1 - \sqrt{1 - M^2}) / (1 + \sqrt{1 - M^2}).$$

Im Fall

$$(34) \quad 1 - m^2 \leq \sqrt{1 - M^2}$$

ist die Ableitung (32) negativ für  $A < -m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2$ , positiv für  $-m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2 < A \leq A_2$  und gleich Null für  $A = -m^4(1 - M^2) : : M^2(1 - m^2)^2$ . Der Ausdruck (31) nimmt also im Intervall (30) seinen Minimalwert für

$$(35) \quad A = -m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2.$$

an. Durch Einsetzung von (35) in (31) bekommt man schrittweise

$$(36) \quad A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{A(1 - 1/M^2)} + m^2 = \\ = [m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)] - \\ - [2m^2 \sqrt{m^4(1 - M^2)} / \sqrt{M^4(1 - m^2)^2}] + m^2 = \\ = m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2).$$

Man kann leicht beweisen, dass für (34)

$$m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2) \leq (1 - \sqrt{1 - M^2}) / (1 + \sqrt{1 - M^2})$$

gilt. Für (34), (30) und  $B_{1M^2} \leq B \leq 0$  gilt also

$$\varrho(S(A, B)) \geq m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2).$$

f) Nun behandeln wir den Fall, wenn (30) und

$$(37) \quad B_{1m^2} \leq B \leq B_{1M^2}$$

gilt. Man kann leicht beweisen, dass eine solche Zahl  $\mu^2$ ,  $m^2 \leq \mu^2 \leq M^2$  existiert, dass  $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu^2)}$  gilt. Man bezeichne

$$(38) \quad L(\mu_i^2, A, B) = \max(|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)|, |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)|).$$

Falls  $B = B_{1\mu^2}$ ,  $\mu^2 \leq \mu_i^2$ , sind die Wurzeln  $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$ ,  $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$  reell und es gilt

$$(39) \quad L(\mu_i^2, A, B) = [\pm \sqrt{\mu_i^2(1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)})} + \sqrt{A(1 - \mu_i^2/\mu^2)}]^2,$$

wobei das Vorzeichen (+), bzw. (-) für  $1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)} \geq 0$  bzw. für  $1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)} < 0$  gilt. Aus (39) folgt sofort, dass für  $\mu_i^2 = M^2$  und  $m^2 \leq \mu^2 \leq M^2$  (d. h. für  $B_{1m^2} \leq B \leq B_{1M^2}$ ) die Ungleichung

$$(40) \quad L(M^2, A, B) \geq A(1 - M^2/\mu^2)$$

gilt (die Gleichheit gilt dabei für  $1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)} = 0$ ).

Falls ferner  $\mu^2 \leq \mu_i^2 \leq \mu_j^2$ ,  $B = B_{1\mu^2}$  gilt, sind die Wurzeln  $\lambda_{1,2}(\mu_i^2, A, B)$ ,  $\lambda_{1,2}(\mu_j^2, A, B)$  reell und es gilt die Ungleichung

$$(41) \quad L(\mu_i^2, A, B) \leq L(\mu_j^2, A, B)$$

mit Rücksicht darauf, dass die Funktion  $L(K, A, B)$  (siehe (39)) für  $\mu^2 \leq K$  zunehmend ist. Es ist also klar, dass im Intervall (37) die Zahl  $q(S(A, B))$  ihren Minimalwert für diejenige  $B = B_{1\mu^2}$  annimmt, für die gleichzeitig

$$(42) \quad 1 - \sqrt{A(1 - 1/\mu^2)} = 0$$

gilt, so dass  $L(M^2, A, B) = L(m^2, A, B)$  ist, d. h.

$$(43) \quad A(1 - M^2/\mu^2) = m^2 B_{1\mu^2} - A = m^2(A + 1 - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu^2)}) - A$$

gilt. Aus (42) folgt sofort  $A = \mu^2/(\mu^2 - 1)$  und nach Einsetzung in die Formel (43) bekommt man nach einer Umformung

$$(44) \quad \mu^2 = \frac{1}{2}(M^2 + m^2),$$

so dass auch in diesen Fall die Beziehung

$$(19) \quad A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)$$

gilt. Es gilt ferner

$$B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{A(1 - 1/\mu^2)} = A - 1,$$

was die Beziehung (17) ist. Für  $B$  gilt dann die Gleichheit

$$(45) \quad B = 2/(M^2 + m^2 - 2).$$

Im Fall  $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$  gilt offensichtlich die Ungleichung

$$(M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)] < (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}),$$

während für  $1 - m^2 \geq \sqrt{(1 - M^2)}$

$$(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leq (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]$$

ist.

g) Es bleibt der Fall übrig, wenn (30) und

$$(46) \quad B \leq B_{1m^2}$$

gilt. Für jede  $B$  aus dem Intervall (46) existiert wieder eine solche Zahl  $\mu^2$ ,  $0 < \mu^2 \leq m^2$ , dass  $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}$  ist.

Man untersuche jetzt den Verlauf der Funktion  $\lambda_2(M^2, A, B)$  der Veränderlichen  $B$  für  $B$  vom Intervall (46) bei der gegebenen Zahl  $A$  aus dem Intervall (30). Angesichts (39) gilt

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [\pm \sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2,$$

wobei das Zeichen (+), bzw. (-) für  $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geq 0$  bzw.

$1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$  gilt. Für  $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geq 0$  gilt schrittweise

$$\begin{aligned} \frac{d}{dB} \lambda_2(M^2, A, B) &= \frac{d}{dB} [\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \\ &+ \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2 = \\ &= \frac{d}{d\mu^2} [\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2 \frac{d\mu^2}{dB} = \\ &= [\sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}] \cdot \\ &\cdot A \sqrt{M^2} [\sqrt{M^2} \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} - \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}] \frac{d\mu^2}{dB} : \\ &: \mu^4 \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} < 0, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \sqrt{M^2(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))})} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} &\geq 0, \\ \sqrt{M^2} \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} - \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} &\geq 0, \end{aligned}$$

$(d\mu^2/dB) = 1/(dB/d\mu^2) \geq 0$ ,  $A < 0$  ist. Ähnlicherweise kann man beweisen, dass  $(d/dB) \lambda_2(M^2, A, B) < 0$  auch für  $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$  gilt. Die Funktion  $\lambda_2(M^2, A, B)$  nimmt also ihren Minimalwert für  $B = B_{1m^2}$  an (siehe den Fall f)).

Auf Grund der oben untersuchten Fälle kommen wir zum Schluss, dass im Fall  $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$  der Spektralradius  $\varrho(S(A, B))$  seinen Minimalwert  $(M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]$  für  $A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)$  und  $B = A - 1 = 2/(M^2 + m^2 - 2)$  annimmt. Aus den Beziehungen (8) folgen dann sofort die Beziehungen (1) und (2). Im Fall  $1 - m^2 \geq \sqrt{(1 - M^2)}$  nimmt der Spektral-

radius  $\rho(S(A, B))$  seinen Minimalwert  $(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$  an; diesen Wert kann man aber für festen Parameter  $\beta = -1$  erreichen (siehe die Arbeit [2]).

Bemerkung. Es ist klar, dass die untersuchte, von drei Parametern  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  abhängige Methode, eigentlich von zwei Parametern  $A, B$  (siehe (8)) abhängt. Wählt man also die Zahl  $\alpha$  beliebig,  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$  und legt man  $\alpha_1 = \alpha$ , folgt sofort aus (8), dass

$$(47) \quad \alpha_2 = (1 - \alpha)/[\alpha(A - 1) + 1]$$

und

$$(48) \quad \beta = \{\alpha[(1 - \alpha)B - (A - 1)] - 1\}/[\alpha(A - 1) + 1]$$

gilt. Aus dem in dieser Arbeit bewiesenen Satz folgt also, dass die betrachtete, von drei Parametern abhängige Iterationsmethode im Fall  $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$  am schnellsten für

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = (1 - \alpha)(2 - M^2 - m^2)/[2(1 - \alpha) - (M^2 + m^2)],$$

$$\beta = 2\alpha^2/[2(1 - \alpha) - (M^2 + m^2)]$$

konvergiert;  $\alpha$  ist dabei eine beliebige reelle Zahl,  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ .

#### Literaturverzeichnis

- [1] D. M. Young: Iterative Solution of large Systems. Academic Press, 1971.  
 [2] M. Šisler: Über die Konvergenz eines symmetrisches Iterationsverfahrens für lineare algebraische Gleichungssysteme. Apl. mat., 35 (1990), 471–480.

Souhrn

#### O OPTIMALISACI KONVERGENCE JISTÉ SYMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci je zkoumána jistá symetrická iterační metoda pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic tvaru  $x = Bx + b$ , kde  $B$  je slabě dvojcyklická matice. Metoda závisí na třech reálných parametrech. V práci je řešena otázka optimální volby těchto parametrů z hlediska rychlosti konvergence.

Anschrift des Verfassers: RNDr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.