Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für lineare algebraische Gleichungssysteme

Aplikace matematiky, Vol. 35 (1990), No. 5, 337–349

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104415`

ÜBER EIN MEHRPARAMETRIGES ITERATIONSVERFAHREN FÜR LINEARE ALGEBRAISCHE GLEICHUNGSSYTEME

Miroslav Šisler

(Angegangen am 6. 5. 1987)

Summary. Die Arbeit befasst sich mit einem gewissen mehrparametrigen Iterationsverfahren von dem Typ SAOR für die Lösung des linearen Gleichungssystems der Form $x = Bx + b$ mit einer schwach zweizyklischen Matrix B. Es ist eine gegenseitige Beziehung zwischen Eigenwerten der Matrix B, bzw. B^2 und Eigenwerten der angehörigen Iterationsmatrix untersucht.

Keywords: linear system, iterative method, spektral radius, weakly cyclic matrix.

AMS classification: 65F10

Die Arbeit befasst sich mit der gegenseitigen Beziehung zwischen den Eigenwerten der Jacobi-Iterationsmatrix und der, einem gewissen symmetrischen mehrparametrigen Iterationsverfahren entsprechenden, Iterationsmatrix.

Es sei ein lineares algebraisches Gleichungssystem der Form

$$x = Bx + b \tag{1}$$

gegeben, wo B eine schwach zweizyklische Blockmatrix mit den quadratischen Diagonalblöcken der Form

$$B = \begin{pmatrix} O, & U \\ L, & O \end{pmatrix} \tag{2}$$

ist, wobei $I - B$ eine nichtsinguläre Matrix ist. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ seien reelle Parameter mit $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$. Das Iterationsverfahren definieren wir durch folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_{\nu+1/2} &= U(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, x_\nu \qquad + b_U\,, \\ x_\nu &= L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, x_{\nu+1/2} + b_L\,, \end{aligned} \tag{3}$$

wo

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2, \beta) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & \beta U \\ 0, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix}, \\ b_U &= \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & \beta U \\ 0, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} b\,, \end{aligned} \tag{4}$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix},$$
(5)
$$b_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} b\,.$$

Aus (3), (4), (5) folgt die Formel

(6) $$x_\nu = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, x_\nu + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, b_U + b_L\,,$$

wo $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, U(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist. Es ist klar, dass es sich um eine, in den Arbeiten [1], [2] untersuchte, symmetrisch angewandte Iterationsmethode, handelt. Die Gleichungssysteme

$$x = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, x + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, b_U + b_L$$

und (1) sind dabei genau dann äquivalent, wenn $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nichtsingulär ist.

Hilfssatz 1. *Die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist genau dann nichtsingulär, wenn die Matrix*

(7) $$\begin{pmatrix} (2\alpha_1 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ (\beta + 1) L, & (2\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix}$$

nichtsingulär ist.

Beweis: Die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ kann man in der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (2\alpha_1 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ (\beta + 1) L, & (2\alpha_2 - 1) L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & \beta U \\ O, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I, & -U \\ -L, & I \end{pmatrix}$$

schreiben. Davon folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes 1, da $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ und $I - B$ eine nichtsinguläre Matrix ist.

Ohne Beweis geben wir weitere zwei Hilfssätze an.

Hilfssatz 2. *Es seien μ_i^2, $i = 1, \ldots, n$ Eigenwerte der Matrix B^2. Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} p_2 I, & U \\ L, & p_1 I \end{pmatrix}$$

ist genau dann nichtsingulär, wenn $p_1 p_2 \neq \mu_i^2$, $i = 1, \ldots, n$ ist.

Hilfssatz 3. *Es sei A eine gegebene Matrix und $\tau_i, i = 1, \ldots, m$ seien ihre Eigenwerte. Die Matrix $q_1 I - q_2 A$ ist genau dann nichtsingulär, wenn $q_1 \neq q_2 \tau_i$, $i = $ i, $\ldots, m$ ist.*

Man führe jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_2[\alpha_1 - \beta(\alpha_1 - 1)]\,, \\
b &= -\alpha_2[\alpha_1 - \beta(\alpha_1 - 1)] + \alpha_2^2(2\alpha - 1)\,, \\
c_1 &= \lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_2^2(\alpha_1 - 1)^2\,, \\
c_2 &= \lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1^2(\alpha_2 - 1)^2\,, \\
d &= -\beta(\beta + 2\alpha_1)\,, \\
e &= -\alpha_2[\alpha_1 - \beta(\alpha_1 - 1)] + \alpha_1^2(2\alpha_2 - 1)\,, \\
f &= \alpha_2[\alpha_1 - \beta(\alpha_1 - 1)] + \beta(\beta + 2\alpha_1)\,.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Die Beziehung zwischen den Eigenwerten λ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und den Eigenwerten μ der Matrix B beschreibt der folgende Satz.

Satz 1. I. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und die Zahl $\mu \neq 0$ genüge der Gleichung*

$$(a\mu^2 - c_1)(f\mu^2 - c_2) - b\mu^2(d\mu^2 + e) = 0\,. \tag{9}$$

Für jeden Eigenwert μ_i, $i = 1, \ldots, n$ der Matrix B gelte die Beziehung $c_1c_2 \neq \mu^2\mu_i^2\alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \beta)^2$. Dann ist die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix B.

II.A. *Es seien μ ein Eigenwert der Matrix B, $\mu \neq 0$ und λ eine Wurzel der Gleichung (9), Dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.*

B. *Es sei $\mu = 0$ ein Eigenwert der Matrix B und $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \neq o$ der entsprechende Eigenvektor. Die Gleichung (9) besitzt dann die Form $c_1c_2 = 0$ und hat also im Allgemeinen zwei Wurzeln, die den Beziehungen $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ entsprechen. Es sei $x_1 \neq o$, $x_2 = o$. Dann ist die, der Beziehung $c_1 = 0$ entsprechende Wurzel λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ (ähnlicherweise im Fall $x_1 = o$, $x_2 \neq o$). Es sei $x_1 \neq o$, $x_2 \neq o$. Dann sind beide, den Beziehungen $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ entsprechende Wurzeln λ, Eigenwerte der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.*

Bemerkung. Falls in der Blockzerlegung der Matrix B alle Matrizen quadratisch (und von gleichem Typ) sind, ist der Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ die Wurzel der Gleichung (9), die der Beziehung $c_1 = 0$, bzw. $c_2 = 0$ entspricht, je nachdem die Matrix L, bzw. U singulär ist. Falls beide Matrizen L und U singulär sind, sind beide, den Beziehungen $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, entsprechende Wurzeln λ Eigenwerte der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. Das ist klar nach dem Teil II.B, in Anbetracht der Äquivalenz $Bx = o \Leftrightarrow \Leftrightarrow (Ux_2 = o, Lx_1 = o)$.

Wenn die Matrizen L, bzw. U ferner von Typen $q \times p$, bzw. $p \times q$ $(p \neq q)$ sind, dann hat die Gleichung $Lx_1 = o$, bzw. $Ux_2 = o$ eine nichttriviale Lösung, solange $p > q$, bzw. $p < q$ ist und die Wurzel der Gleichung (9), die der Beziehung $c_1 = 0$, bzw. $c_2 = 0$ entspricht, ist dann der Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.

Folgerung des Satzes 1: Aus der Behauptung II.B. des Satzes 1 folgt, dass im Falle, wenn die Matrix B singulär ist, wenigstens eine von den Wurzeln λ der Gleichung (9) ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist.

Beweis des Satzes 1. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. Dann existiert ein solcher Vektor $y = (y_1, y_2)^\mathrm{T} \neq o$, dass

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, y = \lambda y \tag{10}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & \beta U \\ O, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} . \tag{11}$$
$$. \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Davon folgt sofort die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 I, & O \\ -\beta L, & \alpha_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & -\beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix} .$$
$$. \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \alpha_1^2 \alpha_2^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Durch die Multiplizierung der Matrizen bekommt man leicht die, mit (10) äquivalente, Beziehungen

$$\begin{aligned} &aULy_1 + bUy_2 = c_1 y_1 , \\ &dLUy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = c_2 y_2 , \end{aligned} \tag{12}$$

wo für a, b, c_1, c_2, d, e, f die Beziehungen (8) gelten. Die Zahl λ ist also genau dann ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$, wenn die Beziehungen (12) für irgendeinen, von Null verschiedenen Vektor y gilt.

I. Beweis des Satzes 1, Teil I. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. Dann existiert ein solcher Vektor y, $y \neq o$, dass die Beziehungen (12) gelten. Es sei ferner $\mu \neq 0$ eine Zahl, die die Gleichung (9) erfüllt. Wir werden verschiedene Fälle unterscheiden.

a) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a \neq 0$. Nach (9) ist dann auch $a\mu^2 - c_1 \neq 0$ und $f\mu^2 - c_2 \neq 0$. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(a\mu^2 - c_1)\, k_1 + b\mu k_2 = 0 , \\ &(d\mu^3 + e\mu)\, k_1 + (f\mu^2 - c_2)\, k_2 = 0 , \end{aligned} \tag{13}$$

für die Unbekannte k_1, k_2 besitzt eine nichttriviale Lösung, da ihre Determinante angesichts (9) von Null verschieden ist. Es ist offensichtlich $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Wenn nämlich z. B. $k_1 = 0$ wäre, wäre auch $k_2 = 0$, da $b\mu \neq 0$ ist; ähnlicherweise gilt $k_2 \neq 0$. Man definiere jetzt einen Vektor $x = (x_1, x_2)^\mathrm{T}$, wie folgt:

$$y_1 = k_1 x_1 , \quad y_2 = k_2 x_2 . \tag{14}$$

Durch die Benutzung von (14) in (12) bekommt man die Beziehungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} &aULx_1 + b(k_2/k_1)\,Ux_2 = c_1x_1\,, \\ &dLULx_1 + eLx_1 + f(k_2/k_1)\,LUx_2 = c_2(k_2/k_1)\,x_2\,. \end{aligned}$$

Aus (9) folgt sofort

$$(16)\qquad k_2/k_2 = -(a\mu^2 - c_1)/b\mu = -(d\mu^3 + e\mu)/(f\mu^2 - c_2)\,.$$

Aus (16) und (15) bekommt man nach der Umformung die Beziehungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} &a\mu(ULx_1 - \mu Ux_2) + c_1(Ux_2 - \mu x_1) = o\,, \\ &df\mu^2(LULx_1 - \mu LUx_2) - ef\mu(LUx_2 - \mu Lx_1) - ec_2(Lx_1 - \mu x_2) - \\ &- dc_2(LULx_1 - \mu^3x_2) = o\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$(18)\qquad ULx_1 - \mu Ux_2 = -(c_1/a\mu)\,(Ux_2 - \mu x_1)$$

und ferner folgt auch

$$(19)\qquad \begin{aligned} &LULx_1 - \mu^3x_2 = \\ &= LULx_1 - \mu LUx_2 + \mu LUx_2 - \mu^2Lx_1 + \mu^2Lx_1 - \mu^3x_2 = \\ &= L(ULx_1 - \mu Ux_2) + \mu L(Ux_2 - \mu x_1) + \mu^2(Lx_1 - \mu x_2) = \\ &= (\mu - (c_1/a\mu))\,L(Ux_2 - \mu x_1) + \mu^2(Lx_1 - \mu x_2)\,. \end{aligned}$$

Aus (19) und (17) folgt dann nach der Umformung

$$(20)\qquad \begin{aligned} &a\mu U(Lx_1 - \mu x_2) + c_1(Ux_2 - \mu x_1) = o\,, \\ &(dc_1c_2 - dfc_1u^2 - efa\mu^2 - dac_2\mu^2)\,L(Ux_2 - \mu x_1) - \\ &- a\mu c_2(d\mu^2 + e)\,(Lx_1 - \mu x_2) = o\,. \end{aligned}$$

Da $dc_1c_2 - dfc_1\mu^2 - efa\mu^2 - dac_2\mu^2 = (d\mu^2 + e)\,\mu^2(bd - af)$ und $d\mu^2 + e \neq 0$ ist, bekommt man schliesslich die Beziehungen

$$(21)\qquad \begin{aligned} &a\mu U(Lx_1 - \mu x_2) + c_1(Ux_2 - \mu x_1) = o\,, \\ &\mu^2(af - bd)\,L(Ux_2 - \mu x_1) + a\mu c_2(Lx_1 - \mu x_2) = o\,. \end{aligned}$$

Man bezeichne $Lx_1 - \mu x_2 = z_2$, $Ux_2 - \mu x_1 = z_1$. Die Gleichungen (21) kann mann folgenderweise schreiben:

$$(22)\qquad \begin{pmatrix} c_1I & a\mu U \\ \mu^2(af - bd)\,L, & a\mu c_2I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \end{pmatrix}.$$

Die Matrix dieses Systems ist genau dann nichtsingulär, wenn die Matrix

$$(23)\qquad \begin{pmatrix} c_1I\,, & U \\ \mu^2(af - bd)\,L, & c_2I \end{pmatrix}$$

nichtsingulär ist. Durch eine einfache Berechnung kann man feststellen, dass $af - bd = \alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \beta)^2$ gilt.

Falls $af - bd \neq 0$, d.h. $1 \neq \beta$ ist, ist die Matrix (23) nach dem Hilfssatz 2 genau dann nichtsingulär, wenn $c_1c_2/[\mu^2(af - bd)] \neq \mu_1^2$ oder $c_1c_2 \neq \mu^2\mu_i^2\alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \beta)^2$ ist, dieses gilt aber nach der Voraussetzung. Das Gleichungssystem (22) hat eine einzige Lösung $z_1 = o$, $z_2 = o$, da die Matrix (23) nichtsingulär ist. Davon folgt $Lx_1 = \mu x_2$, $Ux_2 = \mu x_1$, so dass $Bx = \mu x$, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \neq o$ ist. Die Zahl μ ist also ein Eigenwert der Matrix B.

Im Fall, dass $af - bd = 0$, d. h. $\beta = -1$ ist, kann man die Beziehung $c_2 \neq 0$ beweisen. Wenn nämlich $af - bd = 0$ und $c_2 = 0$ wäre, wäre auch $\lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 = \alpha_1^2(\alpha_2 - 1)^2$ und demzufolge auch $c_1 = \alpha_1^2(\alpha_2 - 1)^2 - \alpha_2^2(\alpha_1 - 1)^2 = \alpha_2^2(2\alpha_1 - 1) - \alpha_1^2(2\alpha_2 - 1)$. Von der Gleichung (9) folgt für $c_2 = 0$ die Gleichung

$$af\mu^4 - c_1f\mu^2 - bd\mu^4 - be\mu^2 = 0$$

oder $c_1f + be = 0$. Für $\beta = -1$ gilt aber $b = \alpha_2(\alpha_2 - 1)(2\alpha_1 - 1)$, $f = (2\alpha_1 - 1) \,.\, (\alpha_2 - 1)$, $e = -\alpha_2(2\alpha_1 - 1) + \alpha_1^2(2\alpha_2 - 1)$ und es gilt also angesichts $b \neq 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} c_1f + be &= [\alpha_2^2(2\alpha_1 - 1) - \alpha_1^2(2\alpha_2 - 1)](2\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + \\ &+ \alpha_2(\alpha_2 - 1)(2\alpha_1 - 1)[\alpha_1^2(2\alpha_2 - 1) - \alpha_2(2\alpha_1 - 1)] = \\ &= -\alpha_1^2(\alpha_2 - 1)^2(2\alpha_1 - 1) \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Für $\beta = -1$ ist also die Matrix (23) nichtsingulär, da $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ ist.

Dadurch ist die Behauptung I für den Fall I bewiesen.

b) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a = 0$. Es muss nach (9) $a\mu^2 - c_1 = -c_1 \neq 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$ gelten. Man lege wieder (14), wo $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ und

$$k_2/k_1 = c_1/b\mu = -(d\mu^3 + e\mu)/(f\mu^2 - c_2) \tag{24}$$

ist. Aus den Gleichungen (15), wo $a = 0$ und aus (24) bekommt man nach Umformungen

$$\begin{aligned} &Ux_2 - \mu x_1 = 0\,, \\ &d(f\mu^2 - c_2)\,LU(Lx_1 - \mu x_2) - c_2(d\mu^2 + e)(Lx_1 - \mu x_2) = o\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Da $f\mu^2 - c_2 = -b\mu^2(d\mu^2 + e)/c_1$ und $d\mu^2 + e \neq 0$ ist, gilt

$$(c_1c_2I + bd\mu^2LU)(Lx_1 - \mu x_2) = o\,. \tag{26}$$

Die Matrix $c_1c_2I + bd\mu^2LU$ ist nach dem Hilfssatz 3 genau dann nichtsingulär, wenn $c_1c_2 \neq bd\mu^2\mu_i^2$ ist, wo μ_i^2 die Eigenwerte der Matrix B^2 sind. Diese Bedingung ist nach der Voraussetzung erfüllt, da $a = 0$ gilt.

c) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 \neq 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$, $a \neq 0$. Man definiere einen Vektor x durch die Beziehungen (14), wo $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ und

$$k_2/k_1 = -(a\mu^2 - c_1)/b\mu \tag{27}$$

ist. Die Gleichungen (12) gehen nach den Umformungen angesichts $c_2 = f\mu^2$ zu der Form

$$(28) \qquad \begin{aligned} &c_1(Ux_2 - \mu x_1) + a\mu U(Lx_1 - \mu x_2) = o\,, \\ &(af - bd)\, L(Ux_2 - \mu x_1) + af\mu(Lx_1 - \mu x_2) = o \end{aligned}$$

über.

Solange $af - bd \neq 0$ ist, ist die Matrix dieses Systems nach dem Hilfssatz 2 genau dann nichtsingulär, wenn

$$(29) \qquad [c_1/a\mu]\,[a\mu f/(af - bd)] \neq \mu_i^2$$

gilt; die Zahlen μ_i^2 sind dabei die Eigenwerte der Matrix B^2. Die Beziehung (29) kann man aber in Anbetracht der Gleichung $c_2 = f\mu^2$ in der Form $c_1c_2 \neq \mu^2\mu_i^2(af - bd)$ überschreiben, und dieses gilt nach der Voraussetzung. Es ist also $Bx = \mu x$.

Es sei $af - bd = 0$. Dann ist $f \neq 0$ (aus $f = 0$ folgt nämlich angesichts $b \neq 0$ die Beziehung $d = 0$). Für $c_1 \neq 0$ ist dann die Matrix des Systems (28) nichtsingulär, so dass $Ux_2 = \mu x_1$, $Lx_1 = \mu x_2$ oder $Bx = \mu x$ gilt.

Für $c_1 = 0$ kann man leicht beweisen, dass $e = f$ ist. Aus $af - bd = 0$, d. h. $\beta + 1 = 0$ une $e = f$ folgt $(2\alpha_1 - 1) = 0$ und die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nach dem Hilfssatz 1 singulär ist. Der letzte Fall kommt also nicht in Frage.

d) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 \neq 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$, $a = 0$. Man definiere einen Vektor x durch die Beziehungen (14), wo

$$(30) \qquad k_2/k_1 = c_1/b\mu$$

ist. Aus (12) folgt nach Umformungen

$$(fc_1\mu I + bd\mu LU)(Lx_1 - \mu x_2) = o\,.$$

Die Matrix $fc_1\mu I + bd\mu LU$ ist nach dem Hilfssatz 3 genau dann nichtsingulär, wenn $fc_1\mu/bd\mu \neq \mu_i^2$ oder $c_1c_2 \neq (af - bd)\,\mu^2\mu_i^2$ gilt; dieses folgt von der Voraussetzung.

e) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$, $a \neq 0$. Von der ersten Gleichung (12) folgt dann sofort, dass μ^2 ein Eigenwert der Matrix UL ist, so dass μ ein Eigenwert der Matrix B ist.

f) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$, $a = 0$. Aus $b = 0$ und $a = 0$ folgt dann $\alpha_1 = 1/2$, $\beta = -1$, so dass dieser Fall mit Rücksicht auf die Singularität der Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nicht vorkommen kann.

g) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$, $a \neq 0$. Aus den Gleichungen (12) folgt dann nach der Umformung die Beziehung $[ac_2I - (af - bd)\,LU]\,y_2 = o$. Die Matrix $c_2I - (af - bd)\,LU$ ist nach dem Hilfssatz 3 genau dann nichtsingulär, wenn $ac_2 = \mu_i^2(af - bd)$, d. h. $c_1c_2 = \mu^2\mu_i^2(af - bd)$ ist; das kommt wieder von der Voraussetzung.

h) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$, $a = 0$. Aus den Gleichungen (12) folgt dann

$$(31) \qquad Uy_2 = o\,, \quad dL(ULy_1 - \mu^2 y_1) = c_2 y_2\,,$$

wo $d \neq 0$ (aus der Voraussetzung $d = 0$, $a = 0$ folgt $\alpha_1 = 1/2$, $\beta = -1$, so dass die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ singulär wäre). Aus (31) folgt sofort

$$(32) \qquad UL(ULy_1 - \mu^2 y_1) = o\,.$$

Da $c_1 = 0$ ist, es gilt nach der Voraussetzung $0 = c_1c_2 \neq \mu_i^2\mu^2(af - bd)$ und $\mu_i^2 = 0$. Dann ist aber die Matrix B^2 und auch die Matrix UL nichtsingulär und aus (32) folgt $ULy_1 - \mu^2 y_1 = o$, $y_1 \neq o$ (der Fall $y_1 = o$ führt zu einem Widerspruch). Angesichts dessen, dass B eine schwach zweizyklische Matrix ist, ist μ ein Eigenwert der Matrix B.

i) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 \neq 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$, $a \neq 0$. Aus (12) folgt nach der Umformung

$$(33) \qquad ULy_1 = (c_1/a)\, y_1, \left[(dc_1/a) + e\right] Ly_1 + f(LUy_2 - \mu^2 y_2) = o\,,$$

wo $f \neq 0$ ist. Der Fall $f = 0$ führt zum Widerspruch mit der Voraussetzung $c_1c_2 \neq \mu_i^2\mu^2(af - bd)$.

Es sei zuerst $y_1 = o$, $y_2 \neq o$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung (33) die Gleichung $LUy_2 - \mu^2 y_2 = o$, so dass μ ein Eigenwert der Matrix B ist. Der Fall $y_1 \neq o$ kann nicht eintreten, da aus der ersten Gleichung (33) und aus der Voraussetzung $c_1 f\mu^2 = c_1c_2 \neq \mu_i^2\mu^2(af - bd)$ ein Widerspruch folgt.

j) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 \neq 0, f\mu^2 - c_2 = 0$, $a = 0$. Aus $b = 0$, $a = 0$ folgt dann $\beta + 1 = 0$, $2\alpha_1 - 1 = 0$, so dass die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nach dem Hilfssatz 1 singulär wäre. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

k) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$, $a \neq 0$. Aus den Gleichungen (12) folgt dann sofort die Gleichung $f(LUy_2 - \mu^2 y_2) = o$. Falls $y_1 \neq o$ ist, ist μ^2 ein Eigenwert der Matrix UL, d. h. der Matrix B^2, so dass die Behauptung gilt. Falls $y_1 = o$ ist, folgt aus der Gleichung $f(LUy_2 - \mu^2 y_2) = o$ für $f \neq 0$ die Beziehung $LUy_2 - \mu^2 y_2 = o$, $y_2 \neq o$, so dass die Behauptung wieder gilt. Der Fall $f = 0$ kommt nicht in Anbetracht, da nach der Voraussetzung die Beziehung $c_1c_2 \neq \mu_i^2\mu^2(af - bd) = 0$ gelten muss, was ein Widerspruch ist (für $f = 0$ ist nämlich $c_2 = 0$).

l) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$, $a = 0$. Dieser Fall kann nicht vorkommen, da aus der Voraussetzung $c_1c_2 \neq \mu_i^2\mu^2(af - bd)$ folgt, dass $c_1c_2 \neq 0$ ist; ein Widerspruch zu $c_1 = 0$.

Man kann leicht feststellen, dass sonstige Fälle nicht eintreten können, wodurch der erste Teil des Satzes 1 bewiesen ist.

II. A. Man setze jetzt voraus, dass die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix B ist und $\mu \neq 0$. Es existiert also ein solcher Vektor $x = (x_1, x_2)^T \neq o$, dass $Bx = \mu x$ oder $Ux_2 = \mu x_1$, $Lx_1 = \mu x_2$.

a) Es sei λ ein Eigenwert der Gleichung (9), wobei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$ ist. Dann ist auch $a\mu^2 - c_1 \neq 0, f\mu^2 - c_2 \neq 0$ und aus (9) folgt die Beziehung

$$- (a\mu^2 - c_1)/b\mu = - (d\mu^3 + e\mu)/(f\mu^2 - c_2) \neq 0 .$$

Man wähle jetzt einen solchen Vektor $y = (y_1, y_2)^T$, dass (14), (16) gilt. Aus (34) folgt sofort, dass $ULx_1 = \mu^2 x_1$, $LUx_2 = \mu^2 x_2$, $LULx_1 = \mu^3 x_2$ und auch

$$\begin{aligned} aULy_1 + bUy_2 &= ak_1 ULx_1 + bk_2 Ux_2 = k_1[aULx_1 + b(k_2/k_1) Ux_2] = \\ &= k_1[a\mu^2 x_1 - ((a\mu^2 - e_1)/b\mu)\, b\mu x_1] = k_1 c_1 x_1 = c_1 y_1 \end{aligned}$$

gilt, was die erste Gleichung (12) ist. Ähnlicherweise kann man beweisen, dass

$$\begin{aligned} &dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = dk_1 LULx_1 + ek_1 Lx_1 + fk_2 LUx_2 = \\ &= k_2[d(k_1/k_2)\, LULx_1 + e(k_1/k_2)\, \mu Lx_1 + fLUx_2] = \\ &= k_2[-d\mu^3((f\mu^2 - c_2)/(d\mu^3 + e\mu)) - e\mu((f\mu^2 - c_2)/(d\mu^3 + e\mu)) + \\ &+ f\mu^2)\, x_2 \end{aligned}$$

ist, was die zweite Gleichung der Matrix (12) ist, die mit (10) äquivalent ist. Die Zahl λ ist also ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.

b) Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (9), wobei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$ ist. Es gelte ferner $a\mu^2 - c_1 \neq 0, f\mu^2 - c_2 = 0$. Man lege wieder (14), (16). Ähnlicherweise wie im Fall a) kann man die erste Gleichung des Systems (12) beweisen. Ferner folgt, dass

$$\begin{aligned} &dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = dk_1 LULx_1 - d\mu^2 k_1 Lx_1 + fk_2 LUx_2 = \\ &= k_2[-d(b\mu/(a\mu^2 - c_1))\, \mu^3 + d\mu^2(b\mu/(a\mu^2 - c_1))\, \mu + f\mu^2]\, x_2 = \\ &= k_2 f\mu^2 x_2 = c_2 y_2 \end{aligned}$$

gilt, was die zweite Gleichung des Systems (12) ist, so dass λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist.

c) Es sei $b \neq 0$, $d\mu^2 + e = 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$. Es sei μ ein Eigenwert der Matrix B und $x = (x_1, x_2)^T \neq o$ ein entsprechender Eigenvektor. Es muss also $x_1 \neq o$ sein (sonst wäre $\mu x_2 = 0$ und also $x_2 = o$, was ein Widerspruch ist). Man lege $y_1 = x_1$, $y_2 = o$. Es ist also $y \neq o$ und es gilt

$$aULy_1 + bUy_2 = aULx_1 = a\mu^2 x_1 = c_1 x_1 = c_1 y_1 ,$$

was die erste Gleichung des Systems (12) ist. Es ist ferner

$$\begin{aligned} &dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = dLULx_1 + eLx_1 = dLULx_1 - d\mu^2 Lx_1 = \\ &=(d\mu^3 - d\mu^3)\, x_1 = o = c_2 y_2 , \end{aligned}$$

was die zweite Gleichung des Systems (12) ist. Es gilt also (10).

d) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 \neq 0$. Es sei μ ein Eigenwert der Matrix B und $x \neq o$ ein entsprechender Eigenvektor. Man lege $y_1 = o$, $y_2 = x_2$ (es ist $x_2 \neq o$). Dann gilt offensichtlich die erste Gleichung des Systems (12). Ferner is

$$dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = fLUx_2 = f\mu^2 x_2 = c_2 x_2 = c_2 y_2 .$$

was die zweite Gleichung des Systems (12) ist und (10) gilt wieder.

e) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e \neq 0$, $a\mu^2 - c_1 \neq 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$. Man lege $y_1 = o$, $y_2 = x_2$, wo $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$ ein, dem Eigenwert μ der Matrix B entsprechende Eigenvektor, ist. Dann ist

$$aULy_1 + bUy_2 = o = c_1 y_1 ,$$
$$dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = fLUx_2 = f\mu^2 x_2 = c_2 x_2 = c_2 y_2 ,$$

so dass (12) und also auch (10) gilt.

f) Es sei $b = 0$, $d\mu^2 + e = 0$. Dann kann man beweisen, dass $a\mu^2 - c_1 = 0$, $f\mu^2 - c_2 = 0$ gelten muss. Man lege $y_1 = x_1$, $y_2 = o$. Es gilt

$$aULy_1 + bUy_2 = aULx_1 = a\mu^2 x_1 = c_1 x_1 = c_1 y_1 ,$$
$$dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = dLULy_1 + eLy_1 = dLULx_1 - d\mu^2 Lx_1 =$$
$$= dL(ULx_1 - \mu^2 x_1) = o = c_2 y_2 ,$$

so dass (12) und auch (10) gilt.

Dadurch wurden alle möglichen Fälle behandelt und der Teil II. A. des Satzes 1 ist bewiesen.

B. Man setze jetzt voraus, dass $\mu = 0$ ein Eigenwert der Matrix B ist. Dann existiert ein solcher Vektor $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T} \neq o$, dass $Bx = o$ oder $Ux_2 = o$, $Lx_1 = o$ gilt. Die Gleichung (9) besitzt dann die Form

$$c_1 c_2 = 0 . \tag{34}$$

Es sei λ eine, der Beziehung $c_1 = 0$ entsprechende Wurzel der Gleichung (34) und $x_1 \neq o$, $x_2 = o$. Man lege $y_1 = x_1$, $y_2 = o$. Dann gilt

$$aULy_1 + bUy_2 = aULx_1 = o = c_1 y_1 ,$$
$$dLULy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = dLULy_1 + eLy_1 = o = c_2 y_2 ,$$

so dass (12) und also (10) gilt.

Analogisch kann man die Beziehung (10) in übrigen Fällen beweisen, wenn λ eine Wurzel der Gleichung (34) ist und $c_2 = 0$, $x_1 = o$, $x_2 \neq o$, bzw. $c_1 = 0$, $x_1 \neq o$, $x_2 = o$, bzw. $c_2 = 0$, $x_1 \neq o$, $x_2 \neq o$.

Dadurch ist des Satz 1 bewiesen.

Die gegenseitige Beziehung zwischen den Eigenwerten λ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und den Eigenwerten μ^2 der Matrix B^2 beschreibt der folgende Satz.

Satz 2. I. *Es sei die Zahl μ^2 ein Eigenwert der Matrix B^2. Dann ist mindestens eine von den, der Zahl μ^2 entsprechenden Wurzeln λ der Gleichung* (9), *ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.*

II. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. Dann ist mindestens eine von den, der Gleichung* (9) *entsprechenden Zahlen, ein Eigenwert der Matrix B^2.*

Beweis. I. Der erste Teil des Satzes 2 folgt sofort aus dem Teil II des Satzes 1.

II. Man setze voraus, dass λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist. Die Gleichung (9) kann man in der folgenden Form schreiben:

$$(35) \qquad (af - bd)(\mu^2)^2 - (c_1 f + c_2 a + be)\mu^2 + c_1 c_2 = 0 .$$

A. Man setze zuerst voraus, dass $af - bd \neq 0$ ist. Die Gleichung (35) besitzt dann zwei Wurzeln μ_1^2, μ_2^2 (diese könnten auch zusammenfallen).

Es sei wenigstens eine von diesen Wurzeln von Null verschieden, z. B. $\mu_1^2 \neq 0$. Falls $c_1 c_2 \neq \mu_i^2 \mu^2(af - bd)$ für jeden Eigenwert der Matrix B^2 ist, ist die Zahl μ_1^2 nach dem Teil I des Satzes 1 ein Eigenwert der Matrix B^2. Falls $c_1 c_2 = \mu_{i_0}^2 \mu_1^2 (af - bd)$ für einen gewissen Eigenwert $\mu_{i_0}^2$ der Matrix B^2 ist, dann gilt

$$\mu_1^2 \mu_2^2 = c_1 c_2 / (af - bd) = \mu_{i_0}^2 \mu_1^2$$

oder $\mu_2^2 = \mu_{i_0}^2$, so dass μ_2^2 ein eigenwert der Matrix B^2 ist.

Wenn beide Wurzeln der Gleichung (35) Null gleich sind, ist $c_1 c_2 = 0$ und $c_1 f + c_2 a + be = 0$. Da λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist, gilt für einen gewissen, von Null verschiedenen Vektor y die Gleichung (12).

a) Es sei jetzt z. B. $c_1 = 0$. Für $a \neq 0$ folgt aus den Gleichungen (12) schrittweise

$$(af - bd) LUy_2 + e(aLy_1 + by_2) = o ,$$

$$(af - bd)(LU)^2 y_2 + eL(aULy_1 + bUy_2) = o ,$$

$$(LU)^2 y_2 = o .$$

Für $y_2 \neq o$ ist die Matrix B^2 singulär. Wenn $y_2 = o$ ist, gilt $aULy_1 = o$, wo $a \neq 0$, $y_1 \neq o$ und B^2 ist auch in diesem Fall singulär. Wenn $a = 0$, die Gleichungen (12) besitzen die Form

$$bUy_2 = o ,$$

$$dLUy_1 + eLy_1 + fLUy_2 = c_2 y_2 .$$

Wenn $y_2 \neq o$, $b \neq 0$ ist, ist $Uy_2 = o$ oder $LUy_2 = o$, so dass B^2 singulär ist. Der Fall $y_2 \neq o$, $b = 0$ kann nicht eintreten, da aus $b = 0$, $a = 0$ die Gleichungen $2\alpha_1 - 1 = 0$, $\beta + 1 = 0$ folgen und die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nichtsingulär wäre. Wenn $y_2 = o$, dann ist $e = 0$, da $b \neq 0$ gilt und es ist also $dLULy_1 = o$, $y_1 \neq o$. Da offensichtlich $d \neq 0$ ist, ist B^2 eine singuläre Matrix.

b) Es sei jetzt $c_2 = 0$. Aus den Gleichungen (12) folgt sofort die Beziehung

$$(af - bd)\,LULy_1 - (c_1 f + be)\,Ly_1 = o\,.$$

Angesichts dessen, dass für $c_2 = 0$ $c_1 f + be = 0$ und $af - bd \neq 0$ gilt, ist $LULy_1 = o$ oder $(UL)^2\, y_1 = o$. Falls $y_1 \neq o$ ist, ist die Behauptung bewiesen. Falls $y_1 = o$ ist, muss $y_2 \neq o$ sein und von den Gleichungen (12) folgt $bU_2 = o$, $fLUy_2 = o$. Da angesichts $af - bd = 0$ die Gleichungen $b = 0$, $f = 0$ gleichzeitig nicht gelten können, ist B^2 offensichtlich eine singuläre Matrix.

B. Man setze jetzt voraus, dass $af - db = 0$ ist. Die Gleichung (9) ist dann der Form

$$(c_1 f + c_2 a + be)\,\mu^2 = c_1 c_2\,. \tag{36}$$

a) Im Fall $c_1 f + c_2 a + be \neq 0$, $c_1 c_2 \neq 0$ hat die Gleichung (36) eine von Null verschiedene Wurzel μ^2. Da $af - bd = 0$, $c_1 c_2 \neq 0$ gilt, ist die Bedingung $c_1 c_2 \neq \mu_i^2 \mu^2 (af - bd)$ für alle Eigenwerte der Matrix B^2 erfüllt, so dass μ^2 nach dem Satz 1 ein Eigenwert der Matrix B^2 ist.

b) Im Fall $c_1 f + c_2 a + be \neq 0$, $c_1 c_2 = 0$ hat die Gleichung (36) nur die Wurzel $\mu^2 = 0$. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und $c_1 = 0$. Dann folgt aus den Gleichungen (12) die Beziehung

$$aeLy_1 - ac_2 y_2 = o\,, \tag{37}$$

wo $a \neq 0$ ist (im Fall $a = 0$ die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ singulär wäre). Aus (37) und aus der Gleichung $aULy_1 + bUy_2 = o$ (siehe (12)) folgt die Gleichung $(c_2 a + be)\,Uy_2 = 0$, wo $c_2 a + be = 0$ ist. Solange $y_2 \neq o$ ist, ist $LUy_2 = o$ und B^2 eine singuläre Matrix. Solange $y_2 = o$ ist, ist $ULy_1 = o$, $y_1 \neq o$ und B^2 ist wieder eine singuläre Matrix.

Solange $c_2 = 0$ ist, bekommt man nach einer Umformung der Gleichungen (12) die Beziehung

$$(dc_1 + ae)\,Ly_1 = o\,, \tag{38}$$

wo $a \neq 0$ ist (im Fall $a = 0$ wäre $bd = 0$; solange aber gleichzeitig $a = 0$, $b = 0$ oder $a = 0$, $d = 0$ ist, ist die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ singulär). Ferner gilt $dc_1 + ae \neq 0$, da aus der Beziehung $dc_1 + ae = 0$ die Beziehung $c_1 f + be = 0$ folgt, was ein Widerspruch ist. Falls nun $y_1 \neq o$ ist, folgt aus (38) die Beziehung $ULy_1 = o$ und die Matrix B^2 ist singulär. Falls $y_1 = o$ ist, folgt aus (12) die Beziehung $fLUy_2 = o$, wo $y_2 \neq o$, $f \neq 0$ ist (für $f = 0$ wäre $bd = 0$, $be \neq 0$, d. h. $d = 0$, was ein Widerspruch ist). Die Matrix B^2 ist also wieder singulär.

c) Der Fall, wenn $c_1 f + c_2 a + be = 0$, $c_1 c_2 = 0$ gilt, ist trivial.

Dadurch ist der Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *M. Šisler:* Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Apl. mat. 18 (1973), 325—332.
[2] *M. Šisler:* Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahren. Apl. mat. 21 (1976), 213—220.
[3] *D. M. Young:* Iterative Solution of large linear Systems. Academic Press, 1971.

Souhrn

O JISTÉ VÍCEPARAMETRICKÉ SYMETRICKÉ ITERAČNÍ METODĚ PRO SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou symetrickou víceparametrickou iterační metodou typu SAOR pro řešení soustavy rovnic tvaru $x = Bx + b$ se slabě dvojcyklickou maticí B. Je zkoumán vzájemný vztah mezi vlastními čísly matice B, resp. B^2 a vlastními čísly příslušné iterační matice.

Anschrift des Autors: RNDr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.