Miroslav Šisler

Beitrag zu mehrparametrigen Iterationsverfahren für spezielle lineare Gleichungssysteme

Aplikace matematiky, Vol. 34 (1989), No. 4, 265–273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104355

34 (1989) APLIKACE MATEMATIKY No. 4, 265—273

BEITRAG ZU MEHRPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHREN FÜR SPEZIELLE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

MIROSLAV ŠISLER

(Angegangen am 21. 5. 1986)

Summary. Die Arbeit befasst sich mit der Anwendung eines gewissen mehrparametrigen Iterationsverfahrens bei der Lösung des linearen Gleichungssystems der Form $x = Bx + b$, wo B eine gewisse, eine grosse Anzahl von Nullelementen enthaltende, Matrix bezeichnet und irgendeine von der Hauptuntermatrizen der Matrix B leicht invertierbar ist. Das, in der Arbeit vorgeschlagende Iterationsverfahren stellt eine Kombination des iterativen und direkten Verfahrens dar.

Keywords: linear system, iterative method, spectral radius, convergence, weakly cyclic matrix.

AMS classification: 65F10.

Die Arbeit befasst sich mit der Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten der Form

$$x = Bx + b\,, \tag{1}$$

wo $B = (b_{ij})$ eine gewisse, eine grosse Anzahl von Nullelementen enthaltende, Matrix bezeichnet. Zur Lösung dieses Gleichungssystems benützt man dabei eine, in der Arbeit [2] beschriebene mehrparametrige Iterationsmethode, die von $2n$ Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ abhängt. Die betrachtete Iterationsmethode ist durch folgende Formeln definiert:

$$x_{k+1} = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\, x_k + b'\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

wo

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \tag{3}$$
$$= R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)^{-1}\, Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)\,,$$

$$b' = R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)^{-1}\, b \tag{4}$$

ist. Für die Matrix $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) = (r_{ij})$ gilt dabei

(5) $$r_{ij} = \beta_i b_{ij}\,, \quad i \neq j\,,$$
$$r_{ii} = \beta_i b_{ii} + \alpha_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Ähnlicherweise gilt für die Matrix $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) = (q_{ij})$

(6) $$q_{ij} = (1 + \beta_i)\, b_{ij}\,, \quad i \neq j\,,$$
$$q_{ii} = (1 + \beta_i)\, b_{ii} + (\alpha_i - 1)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Solange für gewählte Parameter α_i, β_j, $i, j = 1, \ldots, n$ die Matrix $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ regulär ist, gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Die Eigenwerte λ der Matrix $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ sind genau alle Wurzeln der Gleichung*

(7) $$\det \begin{pmatrix} B_1 b_{11} - A_1, & B_1 b_{12}, & \ldots, & B_1 b_{1n} \\ B_2 b_{21}, & B_2 b_{22} - A_2, & \ldots, & B_2 b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n b_{n1}, & B_n b_{n2}, & \ldots, & B_n b_{nn} - A_n \end{pmatrix} = 0\,,$$

wo $A_i = 1 - \alpha_i + \lambda\alpha_i$, $B_j = 1 + \beta_j - \lambda\beta_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ ist.

Der Beweis des Satzes 1 ist in der Arbeit [2] durchgeführt.

Es sei N die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, d.h. $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Es sei ferner eine disjunkte Zerlegung $\mathrm{N} = \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ der Menge N gegeben, wobei $\mathrm{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $\mathrm{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$, $p + q = n$ ist. Man setze ferner voraus, dass die Elemente b_{ij} der Matrix B für jede $i \in \mathrm{I}$ und $j \in \mathrm{J}$ Null gleich sind. Man bezeichne mit dem Symbol $B[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ eine solche Submatrix der Matrix B, die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das Element $b_{k_i k_j}$ hat. Die Submatrix $B[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ entsteht also durch die Ausstreitung aller Zeilen und Spalten der Matrix B mit, von der Zahlen $k_1, \ldots, k_m$ verschiedenen, Indexen. Endlich bezeichne man durch P eine solche Permutationsmatrix, die den Vektor $(1, 2, \ldots, n)$ auf den Vektor $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ transformiert, d.h.

$$(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)^{\mathrm{T}} = P(1, 2, \ldots, n)^{\mathrm{T}}\,.$$

Die, durch die simultane Permutation der Zeilen und Spalten der Matrix B entstandene Matrix PBP^{T} besitzt dann die folgende Form:

(8) $$PBP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} B[i_1, i_2, \ldots, i_p], & O \\ B, & B[j_1, j_2, \ldots, j_q] \end{pmatrix}.$$

Mit B' bezeichnet man dabei eine, aus den Elementen b_{ij}, $i \notin \mathrm{I}$, $j \notin \mathrm{J}$ zusammengesetzte Matrix. Der rechte obere Block der Matrix PBP^{T} ist eine Nullmatrix, da er nur aus den Elementen b_{ij}, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{J}$ gebildet ist, wobei nach der Voraussetzung für alle $i \in \mathrm{I}$ und $j \in \mathrm{J}$ $b_{ij} = 0$ gilt. Wir werden ferner voraussetzen, dass die Untermatrix $B[i_1, \ldots, i_p]$ leicht invertierbar ist (z.B. eine Dreiecksmatrix, eine kleine Matrix usw.).

Jetzt werden wir uns mit den Eigenwerten λ der Matrix $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ für den Fall befassen, wo die Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ speziell gewählt sind.

Es folgt unmittelbar aus dem Satz 1, das die Eigenwerte der Matrix $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ genau alle Zahlen λ sind, für die die Determinante der Matrix

$$(9) \qquad P \begin{pmatrix} B_1 b_{11} - A_1, & B_1 b_{12}, & \ldots, & B_1 b_{1n} \\ B_2 b_{21}, & B_2 b_{22} - A_2, & \ldots, & B_2 b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_n b_{n1}, & B_n b_{n2}, & \ldots, & B_n b_{nn} - A_n \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}$$

Null gleich ist angesichts der Gleichung $|\det P| = 1$. Die Matrix (9) kann man in der Blockform

$$\begin{pmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{pmatrix}$$

schreiben, wo

$$(10) \qquad C_{11} = \begin{pmatrix} B_{i_1} b_{i_1 i_1} - A_{i_1}, & B_{i_1} b_{i_1 i_2}, & \ldots, & B_{i_1} b_{i_1 i_p} \\ B_{i_2} b_{i_2 i_1}, & B_{i_2} b_{i_2 i_2} - A_{i_2}, & \ldots, & B_{i_2} b_{i_2 i_p} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{i_p} b_{i_p i_1}, & B_{i_p} b_{i_p i_2}, & \ldots, & B_{i_p} b_{i_p i_p} - A_{i_p} \end{pmatrix},$$

$$C_{12} = \begin{pmatrix} B_{i_1} b_{i_1 j_1}, & B_{i_1} b_{i_1 j_2}, & \ldots, & B_{i_1} b_{i_1 j_q} \\ B_{i_2} b_{i_2 j_1}, & B_{i_2} b_{i_2 j_2}, & \ldots, & B_{i_2} b_{i_2 j_q} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{i_p} b_{i_p j_1}, & B_{i_p} b_{i_p j_2}, & \ldots, & B_{i_p} b_{i_p j_q} \end{pmatrix},$$

$$(11) \qquad C_{21} = \begin{pmatrix} B_{j_1} b_{j_1 i_1}, & B_{j_1} b_{j_1 i_2}, & \ldots, & B_{j_1} b_{j_1 i_p} \\ B_{j_2} b_{j_2 i_1}, & B_{j_2} b_{j_2 i_2}, & \ldots, & B_{j_2} b_{j_2 ip} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{j_q} b_{j_q i_1}, & B_{j_q} b_{j_q i_2}, & \ldots, & B_{j_q} b_{j_q i_p} \end{pmatrix},$$

$$(12) \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} B_{j_1} b_{j_1 j_1} - A_{j_1}, & B_{j_1} b_{j_1 j_2}, & \ldots, & B_{j_1} b_{j_1 j_q} \\ B_{j_2} b_{j_2 j_1}, & B_{j_2} b_{j_2 j_2} - A_{j_2}, & \ldots, & B_{j_2} b_{j_2 j_q} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{j_q} b_{j_q j_1}, & B_{j_q} b_{j_q j_2}, & \ldots, & B_{j_q} b_{j_q j_q} - A_{j_q} \end{pmatrix}$$

ist. Da die, in der Matrix C_{12} vorkommende Elemente b_{ij} der Matrix B nach der Voraussetzung Null gleich sind, gilt $C_{12} = 0$. Die Eigenwerte der Matrix $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ sind also genau alle Wurzeln der Gleichung

$$(13) \qquad \det C_{11} \,.\, \det C_{22} = 0 \,.$$

Jetzt werden wir die Parameter α_i, β_j in spezieller Weise wählen.

Man lege $\beta_i = \beta = 0$ für $i \in \mathrm{I}$ und $\beta_j = 0$ für $j \in \mathrm{J}$. Es ist also $B_i = 1 + \beta - \lambda\beta = B$ für $i \in \mathrm{I}$ und $B_j = 1$ für $j \in \mathrm{J}$. Man lege ferner $\alpha_i = \alpha_1$ für $i \in \mathrm{I}$, so dass $A_i = 1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = A_1$ ist und $\alpha_j = \alpha_2 \neq 0$ für $j \in \mathrm{J}$, so dass $A_j = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 =$

$= A_2$ ist. Die Matrizen C_{11} und C_{22} von der Gleichung (13) sind dann von der Form

$$C_{11} = \begin{pmatrix} Bb_{i_1i_1} - A_1, & Bb_{i_1i_2}, & \dots, & Bb_{i_1i_p} \\ Bb_{i_2i_1}, & Bb_{i_2i_2} - A_1, & \dots, & Bb_{i_2i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Bb_{i_pi_1}, & Bb_{i_pi_2}, & \dots, & Bb_{i_pi_p} - A_1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$C_{22} = \begin{pmatrix} b_{j_1j_1} - A_2, & b_{j_1j_2}, & \dots, & b_{j_1j_q} \\ b_{j_2j_1}, & b_{j_2j_2} - A_2, & \dots, & b_{j_2j_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{j_qj_1}, & b_{j_qj_2}, & \dots, & b_{j_qj_q} - A_2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Die Matrix $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, wo $\alpha_i = \alpha_1$, $\beta_i = \beta = 0$ für $i \in \mathrm{I}$ und $\alpha_j = \alpha_2 \neq 0$, $\beta_j = 0$ für $j \in \mathrm{J}$ ist, hat folgende Eigenwerte λ:*

a) *Alle Zahlen von der Form*

$$\lambda = 1 - (1 - \mu_i)/(\alpha_1 - \mu_i\beta), \quad i \in \mathrm{I}, \tag{16}$$

und

$$\lambda = 1 - (1 - \mu_j)/\alpha_2, \quad j \in \mathrm{J}, \tag{17}$$

für die $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist. Dabei μ_i, $i = 1, \dots, p$ bezeichnet die Eigenwerte der Matrix $B[i_1, \dots, i_p]$ und μ_j, $j = 1, \dots, q$ bezeichnet die Eigenwerte der Matrix $B[j_1, \dots, j_q]$.

b) *Die Zahl $\lambda = (\beta + 1)/\beta$, insofern $\alpha_1 = -\beta$ ist oder wenn für irgendein $j \in \mathrm{J}$ die Beziehung $1 - (1 - \mu_j)/\alpha_2 = (\beta + 1)/\beta$ gilt.*

Beweis. a) Wenn $B \neq 0$ ist, d.h. $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ gilt, kann man die Gleichung (13) in der Form

$$B^p \det(B[i_1, \dots, i_p] - A_1 B^{-1} I) \, . \det(B[j_1, \dots, j_q] - A_2 I) = 0$$

schreiben. Diese Gleichung gilt entweder im Falle, wenn $A_1/B = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)/(1 + \beta - \lambda\beta)$ der Eigenwert von der Matrix $B[i_1, \dots, i_p]$ ist, oder wenn $A_2 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2$ der Eigenwert von der Matrix $B[j_1, \dots, j_q]$ ist. Es muss also wenigstens eine von der Beziehungen

$$(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)/(1 + \beta - \lambda\beta) = \mu_i, \quad i \in \mathrm{I},$$
$$1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu_j, \quad j \in \mathrm{J}$$

gelten. Nach der Umformung der ersten Beziehung bekommt man unmittelbar die Beziehung (14) und aus der zweiten Beziehung folgt (15), wodurch die Behauptung a) des Satzes 2 bewiesen ist.

b) Falls $B = 0$, d.h. $\lambda = (\beta + 1)/\beta$ ist, besitzt die Gleichung (13) die Form

$$\det \operatorname{diag}\{-A_1, \dots, -A_1\} \, . \det(B[j_1, \dots, j_q] - A_2 I) = 0 \, .$$

Diese Gleichung gilt, wenn entweder $A_1 = 1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 0$ ist, oder A_2 ein Eigenwert der Matrix $B[j_1, \ldots, j_q]$ ist, d.h. $A_2 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu_j$, $j \in \mathrm{J}$ ist. Aus der Beziehungen $\lambda = (\beta + 1)/\beta$ und $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 0$ folgt unmittelbar die Gleichung $\alpha_1 = -\beta$ und aus der Beziehungen $\lambda = (\beta + 1)/\beta$, $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu_j$ folgt die Beziehung $1 - (1 - \mu_j)/\alpha_2 = (\beta + 1)/\beta$, wodurch die Behauptung b) des Satzes 2 bewiesen ist.

Bei der praktischen Berechnung führt man im System (1) mit Hilfe einer Permutationsmatrix P eine entsprechende Permutation der Veränderlichen durch. Da die Permutationsmatrix regulär ist und $P^{\mathrm{T}}P = PP^{\mathrm{T}} = I$ gilt, bekommt man sofort aus (1) das äquivalentes System

$$Px = PBP^{\mathrm{T}}Px + Pb$$

oder das System

$$\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{x} + \tilde{b}\,, \tag{18}$$

wo $\tilde{x} = Px$, $\tilde{B} = PBP^{\mathrm{T}}$, $\tilde{b} = Pb$ und

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B[i_1, \ldots, i_p], & O \\ \tilde{B}_{21}, & B[j_1, \ldots, j_q] \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_{21} = \begin{pmatrix} b_{j_1 i_1}, & \ldots, & b_{j_q i_p} \\ b_{j_q i_1}, & \ldots, & b_{j_q i_p} \end{pmatrix}$$

ist. Die Iterationsformel ist offensichtlich von der Form

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{V}\tilde{x}_k + \tilde{R}^{-1}\tilde{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

wo

$$\tilde{V} = \tilde{R}^{-1}\tilde{Q} \tag{20}$$

und

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \beta B[i_1, \ldots, i_p] + \alpha_1 I, & O \\ O\,, & \operatorname{diag}\{\alpha_2, \ldots, \alpha_2\} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} (1 + \beta)\, B[i_1, \ldots, i_p] + (\alpha_1 - 1)\, I, & O \\ \tilde{B}_{21}, & B[j_1, \ldots, j_q] - (\alpha_2 - 1)\, I \end{pmatrix} \tag{22}$$

ist.

Bemerkung 1. Die invertierung der Matrix $\tilde{R}$ reduziert sich also auf die Invertierung der Matrix $\beta B[i_1, \ldots, i_p] + \alpha_1 I$, die angesichts der Voraussetzung leicht durchführbar ist.

Jetzt werden wir uns mit der Wahl der Parameter β, α_1, α_2 aus dem Gesichtspunkt der Minimisierung des Spektralradius der Matrix $\tilde{V} = \tilde{R}^{-1}\tilde{Q}$ befassen. Zuerst führen wir den folgenden Hilfssatz an.

Hilfssatz. a) *Die Abbildung*

$$\lambda = (a\mu + b)/(c\mu + d)\,,$$

wo $a, b, c, d, c \neq 0$ *reelle Zahlen sind, transformiert das Äussere des Kreises in der komplexen Ebene* μ *mit dem Mittelpunkt* $s_\mu = -d/c$ *und Radius* r_μ *in das Innere des Kreises in der komplexen Ebene* λ *mit dem Mittelpunkt* $s_\lambda = a/c$ *und Radius* $r_\lambda = |bc - ad|/r_\mu c^2$.

b) *Die Abbildung*

$$\lambda = a\mu + b$$

wo $a, b, a \neq 0$ *reelle Zahlen sind, transformiert das Innere des Kreises in der komplexen Ebene* μ *mit dem Mittelpunkt* s_μ *und Radius* r_μ *in das Innere des Kreises in der komplexen Ebene* λ *mit dem Mittelpunkt* $s_\lambda = as_\mu + b$ *und Radius* $r_\lambda = |a|\, r_\mu$.

Der Beweis des Hilfssatzes ist trivial.

Für den Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$ es gilt der folgende Satz:

Satz 3. *Die Eigenwerte* μ_i *der Matrix* $B[i_1, \ldots, i_p]$ *liegen in dem Äusseren des Kreises* K_1 *mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, dessen Grenzkreislinie die Punkte* $m_1, M_1, m_1 < 1 < M_1$ *enthält. Die Eigenwerte* μ_j *der Matrix* $B[j_1, \ldots, j_q]$ *liegen in dem Inneren des Kreises* K_2 *mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, dessen Grenzkreislinie die Punkte* m_2, M_2 *mit* $m_2 < M_2 < 1$ *oder* $1 < m_2 < M_2$ *enthält. Dann nimmt der Spektralradius der Matrix* $\tilde{V}$ *für*

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(m_1 + M_1)\,, \quad \alpha_2 = 1 - \tfrac{1}{2}(m_2 + M_2)\,, \quad \beta = -1$$

den Wert

$$\varrho(\tilde{V}) = \max\left[|2 - (m_1 + M_1)|/(M_1 - m_1),\ (M_2 - m_2)\,|2 - (m_2 + M_2)|\right] < 1 \tag{23}$$

an. Falls $1 - m_1 = M_1 - 1$ *ist (d.h. der Mittelpunt des Kreises* K_1 *liegt im Punkt* 1), *nimmt der Spektralradius der Matrix* $\tilde{V}$ *für* $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}(m_2 + M_2), \beta = -1$ *den Wert*

$$\varrho(\tilde{V}) = (M_2 - m_2)/|2 - (m_2 + M_2)| < 1 \tag{24}$$

an.

Beweis. Aus dem Satz 2 folgt, dass für die Eigenwerte der Matrix $\tilde{V}$ nur die Zahlen von der Form

$$\lambda = 1 - (1 - \mu_i)/(\alpha_1 + \mu_i\beta) = \tag{25}$$
$$= [\mu_i(\beta + 1) + (\alpha_1 - 1)]/[\mu_i\beta + \alpha_1]\,, \quad \lambda \neq (\beta + 1)/\beta$$

(μ_i bezeichnet die Eigenwerte der Matrix $B[i_1, \ldots, i_p]$) oder die Zahlen von der Form

(26) $\lambda = 1 - (1 - \mu_j)/\alpha_2 = (\mu_j/\alpha_2) + (\alpha_2 - 1)/\alpha_2\,, \quad \lambda \neq (\beta + 1)/\beta$

(μ_j bezeichnet die Eigenwerte der Matrix $B[j_1, \ldots, j_q]$) und auch die Zahl $\lambda = (\beta + 1)/\beta$ (falls die Bedingungen aus dem Teil b) des Satzes 2 erfüllt sind) in Betracht kommen.

a) Man setze jetzt voraus, dass die Eigenwerte der Matrix $B[i_1, \ldots, i_p]$ in dem Äusseren des Kreises K_1 in der Ebene μ liegen, dessen Grenzkreislinie die reelle Punkte m_1, M_1, $m_1 < M_1$ enthält und dessen Mittelpunkt auf der Realachse liegt. Es ist also $s_\mu = \frac{1}{2}(m_1 + M_1)$ und $r_\mu = \frac{1}{2}(M_1 - m_1)$. Man wähle jetzt solche Parameter α, β, dass die Abbildung (25) den oben erwähnten Kreis auf den Kreis in der Ebene λ mit dem Mittelpunkt im Punkt 0 abbildet (diese Forderung folgt aus der Forderung der Minimisierung des Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$). Für $a = \beta + 1$, $b = \alpha_1 - 1$, $c = \beta$, $d = \alpha_1$ folgt unmittelbar nach dem Hilfssatz die Gleichung $s_\lambda = a/c = (\beta + 1)/\beta = 0$, so dass $\beta = -1$ ist. Angesichts der Beziehung $s_\mu = -\alpha_1/\beta = (m_1 + M_1)/2$ und $\beta = -1$ bekommt man sofort für den Parameter α_1 die Formel $\alpha_1 = \frac{1}{2}(m_1 + M_1)$. Es gilt ferner

$$r_\lambda = |(\alpha_1 - 1)\,\beta + (\beta + 1)\,\alpha_1|/r_\mu\beta^2 =$$
$$= |1 - \tfrac{1}{2}(m_1 + M_1)|/\tfrac{1}{2}(M_1 - m_1) = |2 - (m_1 + M_1)|/(M_1 - m_1)\,.$$

Wir beweisen jetzt die Gültigkeit der Ungleichung $r_\lambda < 1$ im Falle, dass der Kreis K_1 die Zahl $\mu = 1$ enthält (es ist also $m_1 < 1 < M_1$). Wir werden zwei Fälle unterscheiden.

Zuerst es gelte für den Mittelpunkt des Kreises K_1 die Beziehung $s_\mu = \frac{1}{2}(m_1 + M_1) > 1$. Dann ist $m_1 + M_1 > 2$ oder $2 - (m_1 + M_1) < 0$. Es gilt also

$$r_\lambda = |2 - (m_1 + M_1)|/(M_1 - m_1) =$$
$$= (m_1 + M_1 - 2)/(M_1 - m_1) < (1 + M_2 - 2)/(M_1 - 1) =$$
$$= (M_1 - 1)/(M_1 - 1)| = 1\,.$$

Im zweiten Falle, wenn für den Mittelpunkt des Kreises K_1 $s_\mu = \frac{1}{2}(m_1 + M_1) \leqq 1$ gilt, gilt die Ungleichung $2 - (m_1 + M_1) \geqq 0$ und es ist also

$$r_\lambda = |2 - (m_1 + M_1)|/(M_1 - m_1) = (2 - m_1 - M_1)/(M_1 - m_1) <$$
$$< (2 - m_1 - 1)/(1 - m_1) = (1 - m_1)/(1 - m_1) = 1\,.$$

Für $1 - m_1 = M_1 - 1$ gilt die Gleichung $\frac{1}{2}(m_1 + M_1) = 1$, so dass $\alpha_1 = 1$, $r_\lambda = 0$ ist.

b) Man setze jetzt voraus, dass die Eigenwerte der Matrix $B[j_1, \ldots, j_q]$ im Inneren des Kreises K_2 in der Ebene μ mit dem Mittelpunkt s_μ auf der Realachse liegen. Man setze ferner voraus, dass die Grenzkreislinie des Kreises K_2 reelle Punkte m_2, M_2 mit $m_2 < M_2$ enthält. Es ist also $s_\mu = \frac{1}{2}(m_2 + M_2)$, $r_\mu = \frac{1}{2}(M_2 - m_2)$. Man wähle jetzt ein solcher Parameterwert α_2, dass die Abbildung (26) den Kreis K_2 wieder auf den Kreis in der Ebene λ mit dem Mittelpunkt 0 abbildet. Es gilt für $a = 1/\alpha_2$, $b = (\alpha_2 - 1)/\alpha_2$ nach dem Hilfssatz (die Behauptung b))

$$s_\lambda = as_\mu + b = (m_2 + M_2)/2\alpha_2 + (\alpha_2 - 1)/\alpha_2 = 0\,,$$

so dass angesichts $\alpha_2 \neq 0$

$$\alpha_2 = 1 - \tfrac{1}{2}(m_2 + M_2)$$

ist. Dann gilt auch

$$r_\lambda = |a|\, r_\mu = r_\mu/|\alpha_2| = [1/|1 - \tfrac{1}{2}(m_2 + M_2)|]\,[(M_2 - m_2)/2]$$

und es ist also

$$r_\lambda = (M_2 - m_2)/|2 - (m_2 + M_2)|\,.$$

Jetzt beweisen wir, dass $r_\lambda < 1$, solange $\mu = 1 \notin K_2$ ist. Es gelte zuerst $m_2 < M_2 < 1$. Dann ist $2 - (m_2 + M_2) > 0$ und es gilt also $r_\lambda = (M_2 - m_2)/[2 - (m_2 + M_2)] < (1 - m_2)/(2 - m_2 - 1) = (1 - m_2)/(1 - m_2) = 1$. Falls $1 < m_2 < M_2$ gilt, ist $2 - (m_2 + M_2) < 0$ und es gilt also $r_\lambda = (M_2 - m_2)/(m_2 + M_2 - 2) < (M_2 - 1)/(1 + M_2 - 2) = (M_2 - 1)/(M_2 - 1) = 1$.

c) Für den Eigenwert der Matrix $\tilde{V}$ kommt noch die Zahl $\lambda = (\beta + 1)/\beta = 0$ (es ist $\beta = -1$) in Betracht, aber den Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$ kann diese Zahl nich beeinflussen.

Dadurch ist der Satz 3 bewiesen.

Bemerkung 2. Falls speziell $I = \phi$ und $J = N$ ist und die Eigenwerte der Matrix B im Inneren des Kreises liegen, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M mit $m < M < 1$ oder $1 < m < M$ enthält und der Mittelpunkt auf der Realachse ist, ist klar, dass die entsprechende Matrix $\tilde{V}$ von der From $\tilde{V} = \tilde{R}^{-1}\tilde{Q}$, wo $\tilde{R} = \operatorname{diag}\{\alpha, \ldots, \alpha\}$, $\tilde{Q} = \tilde{B} - (\alpha - 1)\, I$ (die Matrix $\tilde{V}$ hängt dann nur von einem Parameter α ab). Der Spektralradius der Matrix $\tilde{V}$ nimmt dann seinen Minimalwert für $\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}(m + M)$ an und es gilt

$$\varrho(\tilde{V}) = (M - m)/|2 - (m + M)|\,.$$

Bemerkung 3. Im Satz 3 setzt man voraus, dass die Eigenwerte der Matrix $B[i_1, \ldots, i_p]$ im Äusseren des Kreises K_1 liegen, der den Punkt 1 nicht enthält. Wenn also die Zahl 1 kein Eigenwert der Matrix $B[i_1, \ldots, i_p]$ ist, kann man immer solche Zahlen m_1, M_1 wählen, dass die Gleichung $1 - m_1 = M_1 - 1$ gilt und $\alpha_1 = 1$ legen. Da $\beta = -1$ ist, stellt die untersuchte Methode eine Kombination des iterativen und direkten Verfahrens für die Lösung des gegebenen Gleichungssystems dar. Mit Vorteil kann man dabei die leichte Invertierbarkeit des Blocks $B[i_1, \ldots, i_p]$ ausnützen.

Literaturverzeichnis

[1] *D. M. Young:* Iterative solution of large systems. Academic Press, 1971 New York end London.

[2] *M. Šisler:* Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit einer dünnen Matrix. Apl. mat. 31 (1986), 420—426.

Souhrn

PŘÍSPĚVEK K VÍCEPARAMETRICKÝM ITERAČNÍM METODÁM PRO SPECIÁLNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

Práce ukazuje možnost využití jisté víceparametrické iterační metody při řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $x = Bx + b$, kde B je matice obsahující velké množství nulových prvků a jejíž některá hlavní submatice je snadno invertovatelná. Metoda navržená v práci je kombinací iterační a přímé metody.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

MIROSLAV ŠISLER

В работе обоснована возможность использования одного итерационного метода, зависящего от многих параметров, для решения систем линейных уравнений вида $x = Bx + b$, где B-матрица, содержащая большое число нулей и такая, что для некоторой ее подматрицы легко находится матрица обратная. Предлагаемый метод является комбинацией итерационного и прямого методов.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler,* CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.