Otto Röschel

Ein Beitrag zur Kinematik des Geradenraumes

Aplikace matematiky, Vol. 34 (1989), No. 3, 213–223,224

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104349`

EIN BEITRAG ZUR KINEMATIK DES GERADENRAUMES

OTTO RÖSCHEL

(Eingegangen am 17. November 1987)

Kurzfassung. In dieser Arbeit werden alle jene Bewegungsvorgänge des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 bestimmt, bei denen die Geraden einer drei- bzw. zweiparametrigen gangsfesten Schar im Rastsystem Bahnregelflächen beschreiben, deren Erzeugenden von rastfesten Mittengeraden konstanten dualen Abstand besitzen. Im dreiparametrigen Fall wird gezeigt, daß diese Bewegungsvorgängen entweder duale Bricard-Bewegungen oder spezielle Zylinderschrotungen sind, während im zweiparametrigen Fall zusätzlich neben Schiebungsvorgängen mit auf Drehzylindern verlaufenden Bahnen auch besondere Bewegungsvorgänge auftreten, deren sphärischer Bewegungsanteil eine symmetrische Drehkegelrollung ist. Danach werden unter den genannten Bewegungsvorgängen die symmetrischen charakterisiert. Dabei zeigt sich, daß die Krames'sche Grundregelfläche dieser Schrotungen entweder ein gerades Konoid oder eine Regelfläche ist, deren Erzeugenden ihrerseits von einer festen Mittengeraden konstanten dualen Abstand besitzen.

Keywords: Kinematics, special motions of the dual sphere, dual Bricard-motions.

AMS Classification: 53A17.

In [15] ist es dem Autor gelungen, sogenannte *duale Bricard-Bewegungen* zu charakterisieren. Es sind dies jene Zwangläufe Σ/Σ' des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3, bei denen alle Geraden g einer vierparametrigen Schar gangfester Geraden Bahnregelflächen beschreiben, deren Erzeugenden von gewissen rastfesten Geraden $m'(g)$ (*Mittengeraden*) *konstanten dualen Abstand besitzen.*[1]) Die Bahnregelflächen haben dann – entsprechende Differenzierbarkeit vorausgesetzt – Zentraltorsen, die der Tangentialebenenmenge eines Drehzylinders mit Achse $m'(g)$ oder einem Ebenenbüschel mit Träger $m'(g)$ angehören. In der vorliegenden Note werden jene Bewegungsvorgänge Σ/Σ' bestimmt, bei denen die *Bahnregelflächen der Geraden einer drei – bzw. zweiparametrigen gangfesten Geradenmenge* obige Eigenschaft besitzen. In gewissem Sinne handelt es sich dabei um Untersuchungen, die für Punktbahnen bereits von E. Borel [3] und R. Bricard [5] begonnen wurden.

[1]) Manche Autoren verwenden an Stelle des dualen Abstandes die Bezeichnung „dualer Winkel".

Die oben erwähnten Mittengeraden $m'(g)$ sind die Krümmungsachsen der Bahnregelflächen.[2])

1. Im projektiv abgeschlossenen reellen dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 läßt sich ein C^3 – Zwanglauf Σ/Σ' mit Hilfe der Ortsvektoren $\mathbf{x}' = (x', y', z')^t$ und $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ sowie des Schiebvektors $\mathbf{d}'(t) = (d'_1(t), d'_2(t), d'_3(t))^t$ durch

$$(1) \qquad \mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{d}'(t), \quad t \in I = [0, T] \subset \mathfrak{R}$$

beschreiben, wobei $A(t) = (a_{ij}(t))$ aus $SO(3, \mathfrak{R})$ und $d'_i(t)$, $a_{ij}(t) \in C^3(I)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ sind. Eine in Σ feste Gerade g

$$(2) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{u} + v\mathbf{a} \quad (\mathbf{a}^2 = 1,\ v \in \mathfrak{R})$$

wird zweckmäßig mit Hilfe eines *dualen Einheitsvektors*

$$(3) \qquad \mathbf{G} = \mathbf{a} + e\hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{u} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \,.\, \hat{\mathbf{a}} = 0$$

erfaßt, wobei e die *duale Einheit* bezeichnet.[3]) Zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 mit zugehörigen dualen Einheitsvektoren $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$ kann über

$$(4) \qquad \cos \Phi = \mathbf{G}_1 \,.\, \mathbf{G}_2 = \mathbf{a}_1 \,.\, \mathbf{a}_2 + e(\hat{\mathbf{a}}_1 \,.\, \mathbf{a}_2 + \hat{\mathbf{a}}_2 \,.\, \mathbf{a}_1)$$

ein *dualer Abstand* $\Phi = \phi + e\hat{\phi}$ zugeordnet werden. Dabei mißt ϕ den Winkel zwischen g_1 und g_2, $\hat{\phi}$ den Normalabstand.

Die Wirkung des Zwanglaufs Σ/Σ' (1) auf die Geraden von Σ wird in Σ' zweckmässig mit Hilfe *dualer orthogonaler Matrizen* $\mathbf{A}(t) \in SO(3, \mathbf{D})$

$$(5) \qquad \mathbf{G}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{G}$$

beschrieben, wobei mit

$$(6) \qquad D'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -d'_3(t) & d'_2(t) \\ d'_3(t) & 0 & -d'_1(t) \\ -d'_2(t) & d'_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(7) \qquad \mathbf{A}(t) = A(t) - eD'(t)\,A(t)$$

der Bezug zu (2) hergestellt wird.

2. Wir wollen nun alle jene Zwangläufe Σ/Σ' bestimmen, bei denen alle Geraden g eines in Σ festen Komplexes K während des Zwanglaufes von gewissen *Mittengeraden* $m'(g) \subset \Sigma'$ konstanten dualen Abstand besitzen. Die entsprechende Bahnregelflächen $\Phi'(g)$ sind dann Böschungsregelflächen. Wenn der Komplex K keine singuläre in der Fernebene von Σ gelegene Leitkurve besitzt, erfüllen die Fernpunkte

[2]) Damit ist der Bezug zu einer Arbeit von E. Disteli [6] hergestellt. Weitere Literaturhinweise zu diesem Themenkreis finden sich in [4] und [7].

[3]) Man vergleiche diesbezüglich W. Blaschke [2] bzw. A. Karger - J. Novák [7] und die dort angegebene Literatur.

der Komplexgeraden eine zweiparametrige Schar von Punkten. Sie müssen bei Σ/Σ' auf Kreisen im Sinne der in der Fernebene herrschenden elliptischen Maßbestimmung geführt werden oder fest bleiben. Dies ist mit [14] nur möglich, wenn Σ/Σ' entweder ein *reiner Schiebvorgang oder eine Zylinderschrotung* ist. Im ersten Fall müßten alle Geraden $g \subset K$ Drehzylinder als Bahnregelflächen erzeugen. Das ist aber nicht für alle Geraden eines in Σ festen Komplexes K möglich. Der zweite Fall liefert Zylinderschrotungen: ihre feste Richtung legen wir in die z'- bzw. z-Achse der Koordinatensysteme in Σ' bzw. Σ. Da alle Geraden, die in Σ der zur z-Achse parallelen Ebene durch eine Komplexgerade g angehören, dann bei Σ/Σ' ebenfalls stationären dualen Abstand von der Geraden $m'(g)$ behalten, muß Σ/Σ' ein in [15] als *duale Bricard-Bewegung* bezeichneter Bewegungsvorgang sein.

Wenn der Komplex K aus den Treffgeraden einer in Σ festen Fernkurve f_u besteht, müssen die Punkte von f_u bei Σ/Σ' Kreise im Sinne der in der Fernebene herrschenden elliptischen Maßbestimmung beschreiben oder fest bleiben. In [14] wurde gezeigt, daß dies nur für Zylinderschrotungen möglich ist. Wieder legen wir die rastfeste Richtung in die z'- bzw. z-Achse der Koordinatensysteme in Σ' bzw. Σ. Wenn nun f_u keine den Fernpunkt der z-Achse enthaltende Gerade ist, muß nach obigem Schluß Σ/Σ' eine der dualen Bricard-Bewegungen aus [15] sein. Anders liegen die Dinge, wenn f_u eine Ferngerade durch den Fernpunkt der z-Achse darstellt. Dann bringen wir sie durch eine Bewegung in die Ferngerade der Ebenen $x = \text{konst.}$ In Punktkoordinaten muß sich der Zwanglauf (1) dann in der Form

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \end{pmatrix}$$

darstellen lassen. Dieser Zylinderschrotung ist mit

$$\text{(9)} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \end{pmatrix}$$

ein *Grundrißzwanglauf* E/E' in der Ebene $z' = 0$ zugeordnet. E/E' ist in unserem Fall so zu bestimmen, daß gewisse zur y-Achse von E parallele Geraden *Kreise* umhüllen. Die sind dann bekanntlich *konzentrisch* (vgl. [18]); ihren gemeinsamen Mittelpunkt legen wir in den Koordinatenursprung von E'. Dann erhält E/E' die Normalform

$$\text{(10)} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1' \\ -d_1' \cot t \end{pmatrix}.$$

Der entsprechende räumliche Bewegungsvorgang ist *dreiparametrig* und besitzt die Normalform

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} d_1' \\ -d_1' \cot t \\ d_3' \end{pmatrix};$$

mit freien Funktionen $d_1', d_3' \in C^3(I)$. In dualer Notation haben wir

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{G}' = \begin{pmatrix} \cos t + ed_3' \sin t & -\sin t + ed_3' \cos t & d_1'(1 + e \cot t) \\ \sin t - ed_3' \cos t & \cos t + ed_3' \sin t & d_1'(\cot t + e) \\ e \dfrac{d_1'}{\sin t} & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{G}\,.$$

Die zur Ebene $x = 0$ parallelen Geraden $g \subset \Sigma$ gehören einem *speziellen linearen Komplex* K an. Alle Geraden dieses Komplexes beschreiben bei Σ/Σ' *Bahnregelflächen* $\Phi'(g)$, *deren Erzeugenden von der festen Mittengeraden* $m'(g) = m'$

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{M}' = (0, 0, 1)^t$$

konstanten dualen Abstand besitzen. Wir fassen zusammen in

Satz 1. *Die räumlichen Zwangläufe Σ/Σ' des euklidischen Raumes, bei denen alle Geraden g eines im Gangsystem Σ festen Komplexes $K \subset \Sigma$ Bahnregelflächen $\Phi'(g)$ überstreichen, deren Erzeugenden von gewissen rastfesten Mittengeraden $m'(g)$ konstanten dualen Abstand besitzen, sind entweder duale Bricard-Bewegungen oder lassen sich in der Normalform* (11) *bzw.* (12) *erfassen. In diesem Fall ist K ein spezieller linearer Komplex, der alle zu einer gangfesten Ebene parallelen Geraden umfaßt.*

3. Nun bestimmen wir alle jene Zwangläufe Σ/Σ', bei denen *alle Geraden g einer in Σ festen Geradenkongruenz G von gewissen Mittengeraden $m'(g) \subset \Sigma'$ konstanten dualen Abstand behalten.* Wenn die Fernpunkte der Kongruenzgeraden ein ganzes Gebiet oder ein Kurvenstück in der Fernebene des Gangsystems Σ erfüllen, muß Σ/Σ' wie in Abschnitt 2 eine Zylinderschrotung sein. In diesem Fall wählen wir eine beliebige Gerade $g \subset G$ und g_1 parallel g derart, daß die Ebene $[g, g_1]$ die bei dieser Zylinderschrotung feste Richtung enthält. Dann sind die Bahnregelflächen $\Phi'(g)$ und $\Phi'(g_1)$ kongruent und lassen sich durch Schiebung längs der rastfesten Richtung ineinander überführen. Wenn daher diese Zylinderschrotung unsere Geradenkongruenz G in der gewünschten Weise bewegt, lassen sich im Gangsystem Σ sogar die Geraden eines ganzen Geradenkomplexes K auf diese Art bewegen. Diese Zwangläufe haben wir bereits in Abschnitt 2 studiert.

Der verbleibende Fall ist der, daß unsere Geradenkongruenz G in verschiedenen Bündeln paralleler Geraden enthalten ist. O.B.d.A. können wir uns auf die Untersuchung eines Parallelgeradenbündels G beschränken, dessen Richtung wir nach geeigneter Koordinatenwahl in Σ in die z-Achse legen. Die z-Achse selbst soll G angehören. Nun können wir nach geeigneter Koordinatisierung im Rastsystem Σ' die Mittengerade $m'(z)$ der von der z-Achse überstrichenen Bahnregelfläche in die z'-Achse legen:

$$\text{(14)} \qquad z \ldots \mathbf{Z} = (0, 0, 1)^t\,, \quad z' \ldots \mathbf{M}'(z) = (0, 0, 1)^t\,.$$

Weiters setzen wir voraus, daß

$$\mathbf{Z}' \,.\, \mathbf{M}'(z) = \cos \Phi = \cos \varphi - e\hat{\varphi} \sin \varphi \tag{15}$$

mit $\varphi = \text{konst.} \in [-\pi/2, +\pi/2]$ und $\hat{\varphi} = \text{konst.} \in \mathfrak{R}$ gilt. Mit (7) haben wir dann die Identität

$$\begin{aligned} \cos \varphi - e\hat{\varphi} \sin \varphi &= [A(t) - e\, D'(t)\, A(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \mathbf{M}'(z) = \\ &= [A(t) - e\, D'(t)\, A(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

für alle $t \in I$. Trennung von Real- und Dualteil ergibt unter Verwendung der Euler-Winkel α, β, γ die Bedingungen

$$\begin{aligned} & A(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\cos\varphi & \sin\beta\sin\varphi \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi & -\cos\beta\sin\varphi \\ \sin\alpha\sin\varphi & \cos\alpha\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\sin\varphi(\hat{\varphi} + d_2' \sin\beta + d_1' \cos\beta) = 0$$
$$\gamma(t) := \varphi$$

mit gewissen $\alpha(t), \beta(t) \in C^3(I)$. Nun sind offensichtlich zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall A: $\sin\varphi = 0$. Die Matrix $A(t)$ (17) stimmt dann entweder für alle $t \in I$ mit der Einheitsmatrix überein oder erhält nach einem geeigneten Parameterwechsel die Gestalt

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Σ/Σ' ist damit *entweder eine reine Schiebung oder eine Zylinderschrotung mit z bzw. z' als fester Richtung*. Beidemale müssen die Geraden g des z-parallelen Bündels G in Σ von den Mittengeraden $m'(g)$ des z'-parallelen Bündels in Σ' konstanten Abstand besitzen. Dies ist nur möglich, wenn Σ/Σ' sich in der Form

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

mit $f(t)$ bel. $\in C^3(I)$, $R = \text{konst.} \in \mathfrak{R}$ darstellen läßt.

Im ersten Fall liegen *Schiebungen* längs auf Drehzylindern verlaufenden Bahnkurven vor. Im zweiten Fall handelt es sich um *Umschwungbewegungen*, bei denen mit [15] alle Geraden $g \subset \Sigma$ auf Bahnregelflächen mit der gewünschten Eigenschaft führen. Die Mittengeraden $m'(g)$ fallen in die Umschwungachse. Für die *Schiebungen* haben wir in dualer Notation

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & e\,f(t) & eR\sin t \\ e\,f(t) & 1 & -eR\cos t \\ eR\sin t & -eR\cos t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{G}\,. \tag{20}$$

Die Geraden $\mathbf{G} = (e\hat{a}_1, e\hat{a}_2, 1)^t$ des z-parallelen Bündels G beschreiben *Drehzylinder mit Achsen (Mittengeraden)* $m'(g)$

$$\mathbf{M}'(g) = \begin{pmatrix} e\hat{a}_1 \\ e\hat{a}_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Die durch g und $m'(g)$ in den beiden Bündeln vermittelte Abbildung ist eine Kongruenzabbildung.

Fall B: $\sin\varphi \neq 0$. Aus Gleichung (17) folgt die Beziehung

$$\hat{\varphi} + d_2' \sin\beta + d_1' \cos\beta = 0\,. \tag{22}$$

Das in Σ feste Bündel z-paralleler Geraden G wird durch

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

beschrieben. Die einzelnen Geraden dieses Bündels überstreichen beim Zwanglauf Σ/Σ' mit (17) und (22) Bahnregelflächen, für deren Krümmungsachsen wir zum Zeitpunkt t die Darstellung

$$\mathbf{K}'(g, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -\dot{f}\cos t + \ddot{f}\sin t \\ -\dot{f}\sin t - \ddot{f}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

finden[4]), wobei abkürzend

$$f = f(t) = \hat{a}_1 \sin\alpha + \hat{a}_2 \cos\alpha \quad \text{und} \quad \beta(t) = t \tag{25}$$

gesetzt wurde. Dies ist möglich, weil $\beta(t) = \text{konst.}\ \forall t \in \mathfrak{R}$ mit (17) Zylinderschrotungen oder Schiebungen kennzeichnet. Das haben wir bereits in Abschnitt 2 bzw. unter A abgehandlet.

Nun muß in (24) noch $\mathbf{K}'(g, t)$ von t unabhängig sein. Differenzieren von (24) liefert, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

---

[4]) $\mathbf{K}'(g, t)$ wird am besten über die Beziehungen $\mathbf{K}'(g, t) \,.\, (\mathrm{d}\mathbf{G}'/\mathrm{d}t) = \mathbf{K}'(g, t) \,.\, (\mathrm{d}^2\mathbf{G}'/\mathrm{d}t^2) = 0$ und $\operatorname{Re}(\mathbf{K}'(g, t)) = (0, 0, 1)^t$ berechnet.

(26) $$f + \frac{d^3 f}{dt^3} = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}$$

und $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ gilt.

Differenzieren von (25) liefert mit (26) die Bedingung

(27) $$\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3} - \dot{\alpha}^3 + \dot{\alpha}\right)(\hat{a}_1 \cos\alpha - \hat{a}_2 \sin\alpha) = 3\dot{\alpha}\ddot{\alpha}(\hat{a}_1 \sin\alpha + \hat{a}_2 \cos\alpha)$$

$\forall t \in \mathfrak{R}$ und $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, woraus wir

(28) $$\frac{d^3\alpha}{dt^3} - \dot{\alpha}^3 + \dot{\alpha} = 3\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}$$

gewinnen.[5]) Damit sind hier wieder zwei Fälle zu diskutieren:

Fall B1: $\dot{\alpha} = 0\ \forall t \in \mathfrak{R}$. Hier gilt dann $\alpha =$ konst. $\forall t \in \mathfrak{R}$; die Bewegung wäre wieder eine *Schiebung oder eine Zylinderschrotung*. Das haben wir bereits in Abschnitt 2 bzw. Fall A diskutiert.

Fall B2: $\dot{\alpha} \neq 0$, aber $\ddot{\alpha} = 0\ \forall t \in \mathfrak{R}$. Das bedeutet mit (28), daß

(29) $$\alpha = \pm t - L \quad \text{mit} \quad L \in \mathfrak{R}$$

sein muß.

Die Mittengerade $m'(g_0)$ der Bahnregelfläche $\Phi'(g_0)$ der Bündelgeraden g_0

(30) $$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnet sich mit (29) zu

(31) $$\mathbf{M}'(g_0) = \mathbf{K}'(g_0, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \sin(t \mp t \mp L) \\ -\cos(t \mp t \mp L) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sie ist genau dann von t unabhängig, wenn in (29) das obere Vorzeichen gewählt wird. Wenn wir nun überdies das Koordinatensystem im Rastraum Σ' so um die z'-Achse drehen, daß $\mathbf{M}'(g_0)$ (31) die x'-Achse trifft, erhalten wir zusätzlich $L = 0$. Damit läßt sich unser Bewegungsvorgang Σ/Σ' in Punktkoordinaten durch

(32) $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \cos\varphi & -\sin t \cos t(1 + \cos\varphi) & \sin t \sin\varphi \\ \sin t \cos t(1 + \cos\varphi) & -\sin^2 t + \cos^2 t \cos\varphi & -\cos t \sin\varphi \\ \sin t \sin\varphi & \cos t \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mathbf{x} +$$

[5]) Der einzige Sonderfall tritt auf, wenn $\tan^2\alpha = -1$ gilt. Dies führt aber nicht auf reelle Bewegungsvorgänge und interessiert uns daher nicht weiter.

$$+\begin{pmatrix} d_1' \\ \dfrac{\hat{\varphi} - d_1' \cos t}{\sin t} \\ d_3' \end{pmatrix}$$

mit d_1', d_3' beliebig $\in C^3(I)$ erfassen.[6])

Die Krümmungsachsen $\mathbf{K}'(g, t)$ (24) der Bahnregelflächen unserer Bündelgeraden $g \in G$ (23) berechnen sich zu

$$\mathbf{K}'(g, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -\hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}'(g) \tag{33}$$

und sind tatsächlich von t unabhängig. Das Bündel G der z-parallelen Geraden $g \subset \Sigma$ wird *kongruent* auf das z'parallele Bündel der Mittengeraden $m'(g)$ abgebildet. Der Abstand der Erzeugenden der Bahnregelflächen von den entsprechenden Mittengeraden berechnet sich zu $\hat{\varphi}$ und ist damit von der Wahl der Geraden $g \subset G$ *unabhängig*.

Da d_1' und d_3' in (32) noch freie Funktionen sind, liegt sogar *ein dreiparametriger Bewegungsvorgang* Σ/Σ' vor, bei dem die Geraden g des Bündels $G \subset \Sigma$ stets von den Mittengeraden $m'(g) \subset \Sigma'$ konstanten dualen Abstand behalten. Da der eine Parameter d_1' aber die Bündelgeraden $g \subset G$ nur in sich selbst verschiebt, wird jede Gerade $g \subset G$ bei Σ/Σ' jene *Geradenkongruenz* im Rastsystem Σ' durchlaufen, die durch konstanten dualen Abstand von $m'(g)$ gekenzeichnet ist. Die Geraden $g \subset G$ beschreiben damit bei Σ/Σ' die Geraden einer *dualen Geradenkugel mit Mittengerade* $m'(g)$.

Der zugehörige sphärische Bewegungsvorgang $\Sigma^*/\Sigma^{*\prime}$ ist aber bloß *ein Zwanglauf*! Für die *Achsenkegel dieses Zwanglaufes* finden wir die Richtungsvektoren[7])

$$\mathbf{m}' = \begin{pmatrix} \sin t \sin \varphi \\ -\cos t \sin \varphi \\ 1 + \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \sin t \sin \varphi \\ \cos t \sin \varphi \\ 1 + \cos \varphi \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Die Achsenkegel sind somit *kongruente Drehkegel* mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2)(1 + \cos \varphi)^2 &= z'^2 \sin^2 \varphi \\ (x^2 + y^2)(1 + \cos \varphi)^2 &= z^2 \sin^2 \varphi\,; \end{aligned} \tag{35}$$

$\Sigma^*/\Sigma^{*\prime}$ ist also eine *symmetrische Drehkegelrollung*. Wir fassen zusammen in

---

[6]) Die duale Darstellung dieser Bewegungsgleichungen benötigen wir hier nicht; sie wäre leicht aus der Formel (7) mit (32) zu gewinnen.

[7]) Siehe [4, S. 155].

Satz 2. *Die räumlichen Zwangläufe Σ/Σ' des euklidischen Raumes, bei denen alle Geraden g einer im Gangsystem festen Kongruenz $G \subset \Sigma$ Bahnregelflächen $\Phi'(g)$ überstreichen, deren Erzeugenden von gewissen rastfesten Mittengeraden $m'(g)$ konstanten dualen Abstand besitzen, sind entweder duale Bricard-Bewegungen oder Schiebungsvorgänge mit auf Drehzylindern verlaufenden Bahnen oder jene Bewegungsvorgänge, die in der Normalform* (32) *erfaßt werden. In den beiden letzten Fällen besteht die Geradenkongruenz G aus allen zu einer festen Geraden g_0 in Σ parallelen Geraden. Die Abbildung der Bündelgeraden $g \parallel g_0 \subset \Sigma$ auf die entsprechenden Mittengeraden $m'(g)$ ist eine euklidische Kongruenzabbildung.*

4. Im Fall B ist der sphärische Bewegungsanteil stets eine symmetrische Drehkegelrollung. Es ist daher interessant, alle Zwangläufe (32) zu bestimmen, die *symmetrische Schrotungen* sind[8]).

Ein Zwanglauf Σ/Σ' mit Lagen $\Sigma'(t)$ des Gangsystems im Rastsystem Σ' wird genau dann als *symmetrische Schrotung* angesprochen, wenn es in Σ' ein festes System $\tilde{\Sigma}'$ gibt, für das die Bewegung $\tilde{\Sigma}' \to \Sigma'(t)$ eine Drehung um eine Achse $a'(t)$ mit Drehwinkel π ist. Die Drehachsen $a'(t)$ erfüllen für einen symmetrischen Zwanglauf Σ/Σ' eine *Regelfläche* $\tilde{\Gamma}' \subset \tilde{\Sigma}'$, die wir als *Grundfläche der symmetrischen Schrotung* bezeichnen. Wenn wir das Rastsystem Σ' um die y'-Achse um π drehen, ensteht ein System $\tilde{\Sigma}'$, in dem der Bewegungsvorgang (32) die Gestalt

$$(36)\qquad \tilde{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} -\cos^2 t + \sin^2 t\cos\varphi & \sin t\cos t(1+\cos\varphi) & -\sin t\sin\varphi \\ \sin t\cos t(1+\cos\varphi) & -\sin^2 t + \cos^2 t\cos\varphi & -\cos t\sin\varphi \\ -\sin t\sin\varphi & -\cos t\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -d_1' \\ \dfrac{\hat{\varphi} - d_1'\cos t}{\sin t} \\ -d_3' \end{pmatrix}$$

annimmt. Nun ist wegen $Spur(A(t)) = -1$ und [4, 4 f.] der Drehwinkel der Bewegung $\tilde{\Sigma}' \to \Sigma'(t)$ gleich π; die Achse $a'(t)$ besitzt den Richtungsvektor

$$(37)\qquad \mathbf{a}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \end{pmatrix}.$$

Der Bewegungsvorgang (36) ist mit [4,317 f.] genau dann symmetrisch, wenn

$$(38)\qquad \mathbf{a}'(t)\,.\begin{pmatrix} -d_1' \\ \dfrac{\hat{\varphi} - d_1'\cos t}{\sin t} \\ -d_3' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_3' = \frac{(d_1' - \cos\varphi)\sin\varphi}{\sin t(1-\cos\varphi)}$$

8) Bezüglich der symmetrischen Schrotungen vergleiche man J. Krames [8]—[13] und [4, 317 f.].

gilt. Die Drehachsen $a'(t)$ enthalten die Punkte $\frac{1}{2}(-d'_1, (\hat{\varphi} - d'_1 \cos t)/\sin t, -d'_3)^t$ mit d'_3 aus (38). Die *Plückerkoordinaten* dieser Geraden berechnen sich zu

$$(39) \qquad p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = -2 \sin t \sin^2 t :$$
$$: -2 \sin \varphi \sin t \cos t : 2 \sin t(1 - \cos \varphi) : [\hat{\varphi}(2 - \sin^2 t(1 + \cos \varphi)) - 2d'_1 \cos t] :$$
$$: [2d'_1 - \hat{\varphi} \cos t(1 + \cos \varphi)] \sin t : \hat{\varphi} \sin \varphi \sin t .$$

Faßt man t und d'_1 als voneinander unabhängige Parameter eines zweiparametrigen symmetrischen Bewegungsvorganges auf, so erfüllen die Geraden $a'(t, d'_1)$ eine *Geradenkongruenz* $\tilde{K}'$, für die wir nach kurzer Rechnung die Gleichungen

$$(40) \qquad B' \ldots 2p_{12}(1 - \cos \varphi) = \hat{\varphi} p_{03} \sin \varphi \quad \text{und}$$
$$C' \ldots (p_{01}^2 + p_{20}^2)(1 - \cos \varphi)^2 = p_{03}^2 \sin^2 \varphi$$

finden, $\tilde{K}'$ liegt demnach im Schnitt eines linearen Geradenkomplexes B' mit dem quadratischen Komplex C' und besteht aus allen jenen Geraden von B', die gegen die $\tilde{z}'$-Achse konstant geneigt sind. Als *Brennflächen* von $\tilde{K}'$ stellen sich einerseits die *Fernkurve des Drehkegels*

$$(41) \qquad (1 - \cos \varphi)^2 (\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2) = \tilde{y}'^2 \sin^2 \varphi$$

als *singuläre Brennlinie* und der *Drehzylinder*

$$(42) \qquad \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 = \frac{\hat{\varphi}^2}{4}$$

ein. Als *Grundregelfläche* $\tilde{\Gamma}'$ unserer symmetrischen Schrotung dürfen wir daher *jede Böschungsregelfläche* wählen, die den Richtdrehkegel (41) und die Zentraltorse (42) besitzt. Die *Zentraltangentenfläche* $\tilde{\Pi}'$ von $\tilde{\Gamma}'$ ist damit ebenfalls eine *Böschungsregelfläche* (allerdings mit dem Richtdrehkegel (35)), deren Zentraltorse ebenfalls mit dem Drehzylinder (42) übereinstimmt. Da $\tilde{\Pi}'$ bei einer symmetrischen Schrotung bekanntlich (vgl. J. Krames [8]) mit dem *Rastaxoid* des Zwanglaufs übereinstimmt, sind auch *Gang- und Rastaxoid*[9]) so wie die Grundregelfläche $\tilde{\Gamma}'$ *Regelflächen, deren Erzeugenden von der z- bzw. $\tilde{z}'$Achse konstanten dualen Abstand besitzen.*

Die dualen Bricard-Beweungen[10]) sind genau dann symmetrisch, wenn es sich um Umschwungbewegungen handelt. Nun ist aber jede Umschwungbewegung eine symmetrische Schrotung; die Grundregelfläche ist ein *gerades Konoid*, dessen eigentliche Leitgerade in die Umschwungachse fällt. Wir haben damit den

Satz 3. *Die symmetrischen Schrotungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes, bei denen alle Geraden g einer gangfesten Geradenkongruenz G Bahnregelflächen überstreichen, deren Erzeugenden von gewissen rastfesten Mitten-*

---

[9]) Die beiden sind ja kongruent.

[10]) Sie entstehen nach [15] durch Überlagerung einer OLDHAM-Bewegung in einer Ebene π' (zwei Kreise vom Radius $2R$ und R mit $R \in \mathfrak{R}$ rollen aufeinander) mit einer zu π' orthogonalen Schiebung. Symmetrische Bewegungsvorgänge stellen sich hier also nur für $R = 0$ ein.

geraden $m'(g)$ konstanten dualen Abstand behalten, besitzen entweder eine Regelfläche $\tilde{\Gamma}'$ mit derselben Eigenschaft oder ein gerades Konoid als Grundregelfläche. Im ersten Fall sind Gang- und Rastaxoid kongruente Regelflächen, deren Erzeugenden ihrerseits von festen Mittengeraden m und $\tilde{m}'$ festen dualen Abstand besitzen. Alle zu m parallelen Geraden des Gangsystems führen auf die gewünschten Bahnregelflächen; alle ihre Mittengeraden sind zu $\tilde{m}'$ parallel. Genau im zweiten Fall werden sämtliche Geraden des Gangsystems auf Bahnregelflächen mit obiger Eigenschaft geführt.

Bemerkung 1. Die Grundregelfläche $\tilde{\Gamma}'$ ist bei $\hat{\varphi} \neq 0$ genau dann *eine Torse*, wenn es sich um eine *Schraubtorse* handelt. Die zugehörige symmetrische Schrotung entsteht dann durch *Abrollen einer Regelschraubfläche Π auf einem dazu kongruenten Exemplar $\tilde{\Pi}'$.*

Bemerkung 2. Wenn wir als Grundregelfläche $\tilde{\Gamma}'$ ein *Drehhyperboloid* wählen, erhalten wir als Achsenflächen zwei kongruente Drehhyperboloide. Die zugehörige symmetrische Schrotung ist ein Spezialfall der bereits von J. Krames [12] untersuchten symmetrischen Schrotungen mit einem einschaliges Hyperboloid als Grundregelfläche. Bemerkenswert ist, daß in unserem Fall jede zur Drehachse des Gangdrehhyperboloides parallele Gerade des Gangsystems Σ eine Böschungsregelfläche in $\tilde{\Sigma}'$ überstreicht, deren Zentraltorse Drehzylinder mit zur Drehachse des Rastdrehhyperboloids paralleler Achse ist.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Beyer:* Technische Raumkinematik. Springer, Berlin 1963.

[2] *W. Blaschke:* Kinematik und Quaternionen. VEB Verlag d. Wiss., Berlin 1960.

[3] *E. Borel:* Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. Mém. savants étrangers Paris (2) 33, 1—128 (1908).

[4] *O. Bottema, B. Roth:* Theoretical kinematics. North-Holland Series, Amsterdam (1979).

[5] *R. Bricard:* Mémoire sur les déplacements à trajectories sphériques. J. Ec. Polyt. (2) 11, 1—93 (1906).

[6] *M. Disteli:* Über das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der kinematischen Geometrie des Raumes. Zeitschr. Math. Phys. 62, 261—309 (1914).

[7] *A. Karger, J. Novák:* Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach, New York 1985.

[8] *J. Krames:* Über die Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I). Monatsh. Math. 45, 394—406 (1937).

[9] *J. Krames:* Zur Bricardschen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (Über symmetrische Schrotungen II). Monatsh. Math. 45, 407—417 (1937).

[10] *J. Krames:* Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen III). Monatsh. Math. 46, 38—50 (1937).

[11] *J. Krames:* Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen IV). Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. 146, 145—158 (1937).

[12] *J. Krames:* Zur Geometrie des Bennettschen Mechanismus (Über symmetrische Schrotungen V). Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. 146, 159—173 (1937).
[13] *J. Krames:* Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen VI). Monatsh. Math. 146, 172—195 (1937).
[14] *O. Röschel:* Räumliche Zwangläufe mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven I. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. 193, 471—484 (1984).
[15] *O. Röschel:* Duale Bricard-Bewegungen. Anz. Sb. österr. Akad. Wiss. 124, 85—89 (1987).
[16] *E. Study:* Die Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903.
[17] *J. Tölke:* Zur Strahlkinematik I. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. 182, 177—202 (1974).
[18] *W. Wunderlich:* Ebene Kinematik. Bibliographisches Institut, Mannheim (1970).

Souhrn

PŘÍSPĚVEK KE KINEMATICE PŘÍMKOVÉHO PROSTORU

OTTO RÖSCHEL

V článku jsou nalezeny všechny jednoparametrické pohyby 3-dimensionálního euklidovského prostoru, při kterých každá přímka z dvou- nebo tříparametrického systému přímek hybné soustavy opisuje přímkovou plochu, jejíž tvořící přímka má konstantní duální vzdálenost od dané přímky pevné soustavy.

V 3-parametrickém případě je ukázáno, že se jedná o duální Bricardův pohyb nebo o speciální cylindrický pohyb, zatímco v 2-parametrickém případě jsou to navíc ještě pohyby, jejichž sférická část je symetrický cyklický pohyb. Ve zkoumané třídě pohybů jsou pak charakterizovány symetrické pohyby. Přitom se ukazuje, že Kramesova základní plocha uvažovaných cylindrických pohybů je buďto přímý konoid nebo přímková plocha, jejíž tvořící přímka má konstantní duální vzdálenost od dané přímky.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О КИНЕМАТИКЕ ЛИНЕЙЧАТОГО ПРОСТРАНСТВА

OTTO RÖSCHEL

В статье найдены все однопараметрические движения 3-мерного евклидова пространства, у которых каждая прямая из дву- или трехпараметрической системы прямых подвижного пространства порождает поверхность, образующая прямая которой имеет постоянное дуальное расстояние от данной прямой неподвижного пространства.

В 3-параметричеком случае показывается, что эти движения являются дуальными движениями Брикарда или специальными цилиндрическими движениями. В двупараметричеком случае имеются еще движения, сферическая часть которых есть симметрическое циклическое движение. В рассматриваемом классе движений потом характеризованы симметрические движения. При этом показывается, что основная линейчатая поверхность Крамеса этих цилиндрических движений есть или прямой коноид или поверхность, у которой образующая прямая имеет постоянное дуальное расстояние от данной прямой.

Anschrift des Autors: Doz. Dr. *Otto Röschel*, Institut für Geometrie TU Graz, Kopernikus-, gasse 24, A-8010 Graz, Austria.