Aplikace matematiky

Zdeněk Jankovský

Möbiussche Bewegungen der Ebene mit mehrfach durchlaufenen Bahnkurven

Aplikace matematiky, Vol. 30 (1985), No. 4, 297–306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104153

SVAZEK 30 (1985) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 4

MÖBIUSSCHE BEWEGUNGEN DER EBENE MIT MEHRFACH DURCHLAUFENEN BAHNKURVEN

ZDENĚK JANKOVSKÝ

(Eingegangen am 11. September 1984)

1. EINLEITUNG

Es sei R, bzw. K der Köper der reellen, bzw. der komplexen Zahlen. Die Möbiussche Bewegung ($\mathcal{M}$-Bewegung) $\mathcal{M}(\Sigma/S)$ der gegebenen Möbiusschen Gangebene (Σ) in der koinzident gelegten $\mathcal{M}$-Rastebene (S) wird analytisch durch das 1-parametrige System der linearen gebrochenen Transformationen

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{M}(\Sigma/S)(t)\colon z = \frac{\alpha(t)\,\zeta + \beta(t)}{\gamma(t)\,\zeta + \delta(t)}; \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma \text{ auf } \mathcal{I},$$

dargestellt, wo $\mathcal{I} \subset R$ ein Intervall ist, $(\zeta) \in (\Sigma)$, $(z) \in (S)$; $\zeta, z \in K \cup \{\infty\}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^1(\mathcal{I})$, $(C^1(\mathcal{I})$ der lineare Raum aller stetig differenzierbaren komplexen Funktionen der reellen Veränderlichen t ist). $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nennen wir die kinematischen Parameter (näher s. [1]).

Es sei $\{(\zeta_i)\}_{i=0}^{\infty}$ eine Punktfolge in der $\mathcal{M}$-Gangebene (Σ), $(\zeta_i) \neq (\zeta_j)$ für $i \neq j$. Suchen wir eine spezielle Klasse von $\mathcal{M}$-Bewegungen der Ebene, die so gegeben werden, daß die Punktfolge $\{(\zeta_i)\}$ in gleichen Zeitintervallen $T > 0$ dieselbe Bahnkurve durchläuft (vgl. [2], [8], [9]).

Bemerkung. Wenn wir diese Bahnkurve fest als geometrische Kurve (k) vorschreiben, bekommen wir die Aufgabe: die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den gegebenen (k)-Bindungen zu finden (s. [3]). Wenn alle Punkte der gegebenen Kurve $(k) \subset (\Sigma)$ die Kurve $('k) \subset (S)$, $('k) = \mathcal{M}(k)$ auf $\mathcal{I}$, durchlaufen, handelt es sich um die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (k)-Automorphismus (s. [4]).

In unserem Fall wird keine Kurve (k) a priori vorgegeben. Es handelt sich analytisch um die Aufgabe: die Klasse der $\mathcal{M}$-Bewegungen, die den Bedingungen

$$\text{(2)} \qquad z_i(t + T) = z_{i-1}(t)\,; \quad i = 1, 2, 3, \ldots; \quad t \in R\,,$$

genügen, zu finden.

2. ZUR BESTIMMUNG DER $\mathscr{M}$-BEWEGUNGEN MIT MEHRFACH DURCHLAUFENEN BAHNKURVEN

Aus der Bedingungen (2) und (1) bekommen wir die Differenzengleichungen

$$\frac{\alpha(t + T)\,\zeta_i + \beta(t + T)}{\gamma(t + T)\,\zeta_i + \delta(t + T)} = \frac{\alpha(t)\,\zeta_{i-1} + \beta(t)}{\gamma(t)\,\zeta_{i-1} + \delta(t)} \tag{3}$$

für die kinematischen Parameter. (3) ist im allgemeinen ein System von nichtlinearen Differenzengleichungen. (3) kann man in der Form

$$\begin{aligned}\zeta_i\zeta_{i-1}[\alpha(t + T)\,.\,\gamma(t)] + \zeta_i[\alpha(t + T)\,.\,\delta(t)] + \zeta_{i-1}[\beta(t + T)\,.\,\gamma(t)] +\\ + [\beta(t + T)\,.\,\delta(t)] = \zeta_i\zeta_{i-1}[\alpha(t)\,.\,\gamma(t + T)] + \zeta_i[\gamma(t + T)\,.\,\beta(t)] +\\ + \zeta_{i-1}[\alpha(t)\,.\,\delta(t + T)] + [\beta(t)\,.\,\delta(t + T)]\end{aligned} \tag{4}$$

schreiben. Aus (4) für allgemeine Punktfolge $\{(\zeta_i)\}$ folgt:

$$\begin{aligned}\alpha(t + T)\,.\,\gamma(t) &= \alpha(t)\,.\,\gamma(t + T)\\ \alpha(t + T)\,.\,\delta(t) &= \beta(t)\,.\,\gamma(t + T)\\ \beta(t + T)\,.\,\gamma(t) &= \alpha(t)\,.\,\delta(t + T)\\ \beta(t + T)\,.\,\delta(t) &= \beta(t)\,.\,\delta(t + T)\end{aligned} \tag{5}$$

(5) gilt $\Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ auf $\mathscr{I}$, was im Widerspruch mit (1) ist und wir bekommen keine $\mathscr{M}$-Bewegung. (3) kann man jedoch z. B. so erfüllen, daß

$$\begin{aligned}\alpha(t + T)\,\zeta_i + \beta(t + T) &= \alpha(t)\,\zeta_{i-1} + \beta(t)\\ \gamma(t + T)\,\zeta_i + \delta(t + T) &= \gamma(t)\,\zeta_{i-1} + \delta(t)\end{aligned} \tag{6}$$

gilt.

Wir werden uns weiter nur mit dem System (6) beschäftigen. $\mathscr{M}$-Bewegungen, die (6) genügen, bezeichnen wir als $\mathscr{M}_T$-B e w e g u n g e n. Wenn wir die kinematischen Parameter in diesem Fall feststellen wollen, brauchen wir 4 unabhängige Differenzengleichungen. Nehmen wir also z. B. das System (6) für i und für $(i + 1)$; wir bekommen:

$$\begin{aligned}\alpha(t + T)\,\zeta_i \quad + \beta(t + T) &= \alpha(t)\,\zeta_{i-1} + \beta(t)\\ \alpha(t + T)\,\zeta_{i+1} + \beta(t + T) &= \alpha(t)\,\zeta_i \quad + \beta(t)\\ \gamma(t + T)\,\zeta_i \quad + \delta(t + T) &= \gamma(t)\,\zeta_{i-1} + \delta(t)\\ \gamma(t + T)\,\zeta_{i+1} + \delta(t + T) &= \gamma(t)\,\zeta_i \quad + \delta(t)\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Zur Bestimmung der $\mathscr{M}_T$-Bewegung brauchen wir nur 2 Bedingungen (2), d. h. eine Punktfolge von nur 3 Punkten, z. B. (ζ_{i-1}), (ζ_i), (ζ_{i+1}). Die übrigen Bedingungen müssen abhängig sein (sie müssen zu denselben kinematischen Parametern führen);

diese Eigenschaft führt zu den Bedingungen auf die Konfiguration der Punkte der Punktfolge $\{(\zeta_i)\}$, s. Absatz 3. Aus (7) folgt

$$(8) \qquad \begin{aligned} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \, . \, \alpha(t + T) + (\zeta_{i-1} - \zeta_i) \, . \, \alpha(t) = 0 \\ (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \, . \, \gamma(t + T) + (\zeta_{i-1} - \zeta_i) \, . \, \gamma(t) = 0 \end{aligned}$$

(8) sind zwei gleichartige lineare homogene Differenzengleichungen für die Bestimmung der kinematischen Parameter $\alpha(t)$, $\gamma(t)$.

Lösen wir also die lineare homogene Differenzengleichung

$$(9) \qquad (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \, . \, \alpha(t + T) = (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \, . \, \alpha(t) \, .$$

(9) kann man in der Form

$$(10) \qquad \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} = \frac{|\alpha(t)|}{|\alpha(t + T)|} \exp \left[j(\arg \alpha(t) - \arg \alpha(t + T)) \right] , \quad j^2 = -1 \, ,$$

schreiben. Aus (10) folgt

$$(11) \qquad \frac{|\alpha(t + T)|}{|\alpha(t)|} = \frac{|\zeta_i - \zeta_{i-1}|}{|\zeta_{i+1} - \zeta_i|} = k > 0 \, , \quad k \in R \, , \quad \text{Konst.}$$

Die Lösung der Gleichung (11) kann man in der Form

$$(12) \qquad |\alpha(t)| = f_T(t) \, . \, k^{t/T}$$

(f_T ist eine beliebige nichtnegative, stetig differenzierbare, T-periodische Funktion) schreiben. Weiter folgt aus (10):

$$(13) \qquad \arg(\alpha(t + T)) - \arg(\alpha(t)) = \arg \left(\frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \right) = \varkappa \, ,$$

$\varkappa \in R$, Konst. (13) ist eine lineare im allgemeinen nichthomogene Differenzengleichung 1. Ranges mit konstanten Koeffizienten; ihre Lösungen kann man in der Form

$$(14) \qquad \arg(\alpha(t)) = \vartheta_T(t) + \frac{\varkappa}{T} t$$

schreiben, wo $\vartheta_T(t)$ eine beliebige reelle, stetig differenzierbare, T-periodische Funktion ist.

$$\alpha(t) = f_T(t) \, . \, k^{t/T} \, . \exp \left[j \left(\vartheta_T(t) + \frac{\varkappa}{T} t \right) \right]$$

ist also eine stetig differenzierbare komplexe T-periodische Funktion der reellen Veränderlichen t. Analogisch bekommen wir:

$$\gamma(t) = {}^1 f_T(t) \, . \, k^{t/T} \, . \exp \left[j \left({}^1 \vartheta_T(t) + \frac{\varkappa}{T} t \right) \right] ,$$

wo ${}^1f_T$, ${}^1\vartheta_T$ beliebige reelle, stetig differenzierbare, T-periodische Funktionen sind (${}^1f_T$ nichtnegativ).

Für die kinematischen Parameter β, δ bekommen wir aus (7) zwei gleichartige lineare nichthomogene Differenzengleichungen 1. Ranges:

$$\begin{aligned} (15) \qquad \beta(t+T) - \beta(t) &= \alpha(t)\,\zeta_{i-1} - \alpha(t+T)\,\zeta_i \\ \delta(t+T) - \delta(t) &= \gamma(t)\,\zeta_{i-1} - \gamma(t+T)\,\zeta_i \end{aligned}$$

Für die Lösung (15_1) folgt aus (9):

$$\alpha(t+T) = \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_{i+1} - \zeta_i}\,\alpha(t)\,;$$

(15_1) kann man also in der Form

$$\beta(t+T) - \beta(t) = C\,.\,\alpha(t)\,,$$

wo

$$C = \frac{\zeta_{i-1}\zeta_{i+1} - \zeta_i^2}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} = \text{Konst.}\,,$$

schreiben.

(16) ist homogen, bzw. nichthomogen $\Leftrightarrow C = 0$, bzw. $C \neq 0$. Transformieren wir das Koordinatensystem in (Σ)

$$\mathscr{M}\colon \Sigma \to \Sigma^*\colon \zeta^* = \frac{c_1\zeta + c_2}{c_3\zeta + c_4}\,; \quad c_1c_4 \neq c_2c_3\,; \quad c_i \in K\,,$$

so, daß

$$C^* = \frac{\zeta^*_{i-1}\zeta^*_{i+1} - \zeta_i^{*2}}{\zeta^*_{i+1} - \zeta^*_i} = 0$$

ist. Man kann zeigen, daß eine $\mathscr{M}$-Transformation mit dieser Eigenschaft nur die Translation

$$\zeta^* = \zeta - h$$

sein kann. Konstruieren wir

$$C^* = \frac{\zeta_{i-1}\zeta_{i+1} - \zeta_i^2 + h(2\zeta_i - \zeta_{i-1} - \zeta_{i+1})}{\zeta_{i+1} - \zeta_i}\,;$$

$$C^* = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\zeta_i^2 - \zeta_{i-1}\zeta_{i+1}}{2\zeta_i - \zeta_{i-1} - \zeta_{i+1}}\,; \quad 2\zeta_i - \zeta_{i-1} - \zeta_{i+1} \neq 0\,.$$

Daraus und aus (9), (10), (11) und (13) folgt

$$C^* = 0 \Leftrightarrow k\exp(j\varkappa) \neq 1 \quad (C^* \neq 0 \Leftrightarrow k\exp(j\varkappa) = 1)\,.$$

1) Ist $C = 0$ (bzw. $C^* = 0$), dann kann man (16) in der Form

$$\beta(t+T) - \beta(t) = 0$$

schreiben; ihre allgemeine Lösung ist $\beta(t) = \beta_T(t)$, wo β_T eine beliebige, stetig differenzierbare, T-periodische komplexe Funktion der reellen Veränderlichen t ist. Analogisch bekommen wir $\delta(t) = \delta_T(t)$. Die gesuchte $\mathscr{M}_T$-Bewegung in diesem Fall hat die Darstellung

$$z = \frac{{}'\alpha_T(t)\, k^{t/T} \exp\left(j \dfrac{\varkappa}{T} t\right) \zeta + {}'\beta_T(t)}{k^{t/T} \exp\left(j \dfrac{\varkappa}{T} t\right) \zeta + {}'\delta_T(t)}, \quad j^2 = -1, \tag{17}$$

wo ${}'\alpha_T$, ${}'\beta_T$, ${}'\delta_T$ beliebige stetig differenzierbare, T-periodische komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t mit der Eigenschaft ${}'\alpha_T {}'\delta_T \neq {}'\beta_T$ auf $\mathscr{I}$ sind.

2) Ist $C \neq 0$ (bzw. $C^* \neq 0$), dann ist $k = 1$, $\varkappa = 2n\pi$, n eine ganze Zahl,

$$\alpha(t) = f_T(t) \exp\left[j\left(\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T}\right)\right],$$

$$\gamma(t) = {}^1f_T(t) \exp\left[j\left({}^1\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T}\right)\right]$$

und die Gleichung (16) kann man in der Form

$$\beta(t + T) - \beta(t) = Cf(t) \exp\left[j\left(\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T}\right)\right] \tag{18}$$

schreiben.

Die Lösung dieser Gleichung

$$\beta(t) = \beta_T(t) + \hat{\beta}(t)$$

setzt sich aus der allgemeinen Lösung β_T der adjungierten homogenen Gleichung und aus der partikularen Lösung $\hat{\beta}$ der Gleichung (18) zusammen. $\hat{\beta}$ kann man in der Form

$$\hat{\beta}(t) = At f_T(t) \exp\left[j\left(\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T}\right)\right] \tag{19}$$

feststellen. Aus (19) und (18) bekommen wir:

$$A = \frac{C}{T} \neq 0\,.$$

Die Lösung der Gleichung (18) ist

$$\beta(t) = \beta_T(t) + \frac{C}{T} t f_T(t) \exp\left[j\left(\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T}\right)\right].$$

Analogisch

$$\delta(t) = \delta_T(t) + \frac{C}{T} t \, {}^1f_T(t) \exp\left[j \left({}^1\vartheta_T(t) + 2n\pi \frac{t}{T} \right) \right].$$

Die gesuchte $\mathscr{M}_T$-Bewegung in diesem Fall hat die Darstellung

$$(20) \qquad z = \frac{\alpha_T \left(\zeta + \frac{C}{T} t \right) + \beta_T}{\gamma_T \left(\zeta + \frac{C}{T} t \right) + \delta_T},$$

wo α_T, β_T, γ_T, δ_T beliebige stetig differenzierbare, T-periodische komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t mit der Eigenschaft $\alpha_T \,.\, \delta_T \neq \beta_T \,.\, \delta_T$ auf $\mathscr{I}$ sind.

3. KONFIGURATIONSFRAGEN DER $\mathscr{M}_T$-BEWEGUNGEN

Zur Bestimmung der $\mathscr{M}_T$-Bewegungen haben wir (7) gebraucht, d. h. nur zwei Bedingungen (2), also eine Punktfolge von nur 3 Punkten $\{(\zeta_{i-1}), (\zeta_i), (\zeta_{i+1})\}$. Die $\mathscr{M}_T$-Bewegungen müssen alle Bedingungen (2) erfüllen; d. h. es muß für alle $i =$ $= 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} = k \exp(j\varkappa)$$

gelten (dies folgt aus (10), (11) und (13)). Wir unterscheiden (s. Absatz 2) zwei Fälle:

$$(21) \qquad 1)\ k \exp(j\varkappa) \neq 1$$

$$2)\ k \exp(j\varkappa) = 1\,.$$

Im Falle (21_1) liegen alle Punkte $\{(\zeta_i)\}$ auf einer logarithmischen Spirale ($k \neq 1$), bzw. auf einem Kreis ($k = 1$); im Falle (21_2) liegen alle Punkte $\{(\zeta_i)\}$ auf einer Geraden (vgl. [2]).

Definition 1. *Die $\mathscr{M}_T$-Bewegungen im Falle (21_1) nennen wir $\mathscr{M}_T$-Bewegungen mit Polygonaltrasse, im Falle (21_2) nennen wir sie $\mathscr{M}_T$-Bewegungen mit geradliniger Trasse.*

Befassen wir uns weiter mit der Frage, ob auch andere Bahnkurven mehrfach durchlaufen werden. Lösen wir diese Frage

1) für die $\mathscr{M}_T$-Bewegungen mit Polygonaltrasse:

Die Darstellung der Bahnkurve eines beliebigen erzeugenden Punktes (η_0) bekommen wir in der Form (17) für $\zeta = \eta_0$; nach der Zeit $T(t \to t + T)$ bekommen wir:

$$z = \frac{`\alpha_T(t) \,.\, k^{t/T} \,.\, \exp\left(j \frac{\varkappa}{T} t\right) .\, k \exp(j\varkappa)\, \eta_0 + `\beta_T(t)}{k^{t/T} \exp\left(j \frac{\varkappa}{T} t\right) .\, k \exp(j\varkappa)\, \eta_0 + `\delta_T(t)} \,.$$

Der Punkt $\eta_1 = k \exp(j\varkappa)\, \eta_0$; $\eta_1 \neq \eta_0$ für $\eta_0 \neq 0, \infty$, durchläuft also nach der Zeit T dieselbe Bahnkurve wie η_0. Weiter bekommen wir die Punkte η_2, η_3 usw. und es ist

$$\eta_i = \eta_{i-1} k \exp(j\varkappa)\,; \quad \eta_{i+1} = \eta_i k \exp(j\varkappa)\,.$$

Daraus folgt

$$\eta_{i+1} \,.\, \eta_{i-1} \,.\, k \,.\, \exp(j\varkappa) = \eta_i^2 \,.\, k \,.\, \exp(j\varkappa)\,,$$

d. h.

(22) $$\eta_{i+1} \,.\, \eta_{i-1} - \eta_i^2 = 0$$

(22) ist eine rekurrente Beziehung für die Folge der Punkte, die dieselbe Bahnkurve durchlaufen. (22) $\Leftrightarrow C = 0$.

Die Punkte $(\eta_0) = (0)$, bzw. $(\eta_0) = (\infty)$ durchlaufen bei der $\mathscr{M}_T$-Bewegung (17) ihre Bahnkurven

$$z = \frac{`\beta_T(t)}{`\delta_T(t)}\,, \quad \text{bzw.} \quad z = `\alpha_T(t)$$

als einzige erzeugende Punkte. Daraus folgt

Satz 1. *In den $\mathscr{M}_T$-Bewegungen (17) mit Polygonaltrasse gehört jeder erzeugende Punkt $(\eta_0) \in (\Sigma)$, $(\eta_0) \neq (0), (\infty)$, zu einer bestimmten Polygonaltrasse. Die Punkte dieser Polygonaltrasse $\{(\eta_i)\}$ genügen der Beziehung (22).*

2) für die $\mathscr{M}_T$-Bewegungen mit geradliniger Trasse:

Die Darstellung der Bahnkurve eines beliebigen erzeugenden Punktes (η_0) bekommen wir in der Forme (20) für $\zeta = \eta_0$; nach der Zeit $T(t \to t + T)$ bekommen wir:

$$z = \frac{\alpha_T \left(\eta_0 + C + \frac{C}{T} t\right) + \beta_T}{\gamma_T \left(\eta_0 + C + \frac{C}{T} t\right) + \delta_T} \,.$$

Der Punkt $\eta_1 = \eta_0 + C$; $\eta_1 \neq \eta_0$ $(C \neq 0)$, durchläuft also nach der Zeit T dieselbe Bahnkurve wir η_0. Weiter bekommen wir

$$\eta_2 = \eta_0 + 2C, \ldots, \quad \eta_n = \eta_0 + nC\,,$$

also eine geradlinige Trasse. Daraus folgt

Satz 2. *In den $\mathscr{M}_T$-Bewegungen (20) mit geradliniger Trasse gehört jeder erzeugende Punkt $(\eta_0) \in (\Sigma)$, $(\eta_0) \neq (\infty)$, zu einer bestimmten geradlinigen Trasse;*

für diese Punkte gilt:

$$\eta_i = \eta_0 + iC\,, \quad C \neq 0\,, \quad \text{Konst}\,.$$

Alle geradlinigen Trassen liegen auf zueinander parallelen Geraden mit dem gemeinsamen Richtungsvektor $C \in K$.

Transformieren wir das Koordinatensystem in der Gangebene (Σ): $\mathcal{M}\colon \Sigma \to {}'\Sigma$. Daraus und aus S1 und S2 folgt

Satz 3. *In den $\mathcal{M}_T$-Bewegungen mit Polygonaltrasse liegen alle Trassen auf den Doppelspiralen mit zwei gemeinsamen asymptotischen Punkten $\mathcal{M}(0)$, $\mathcal{M}(\infty)$, $(k \neq 1)$, bzw. sie liegen auf den Kreisen des elliptischen Büschels der Kreise mit den Grundpunkten $\mathcal{M}(0)$, $\mathcal{M}(\infty)$, $(k = 1)$. Die Punkte $\mathcal{M}(0)$, $\mathcal{M}(\infty)$ gehören keiner Trasse an. In den $\mathcal{M}_T$-Bewegungen mit geradliniger Trasse liegen alle Trassen auf den Kreisen des parabolischen Büschels der Kreise mit dem Grundpunkt $\mathcal{M}(\infty)$ und für die Punkte einer Trasse ist das Doppelverhältnis*

$$(\zeta_{i-1}, \zeta_i, \zeta_{i+1}, \zeta_{i+2}) = \tfrac{4}{3}\,; \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

konstant. Der Punkt $\mathcal{M}(\infty)$ gehört keiner Trasse an.

4. POLBAHNEN DER $\mathcal{M}_T$-BEWEGUNGEN

Die Gangpolbahn, bzw. die Rastpolbahn der $\mathcal{M}$-Bewegung (1) kann man in der Form

$$(23)\quad {}^1\zeta_{1,2} = \frac{\alpha\dot\delta - \dot\alpha\delta + \beta\dot\gamma - \dot\beta\gamma \pm \sqrt{((\dot\alpha\delta + \dot\beta\gamma - \alpha\dot\delta - \beta\dot\gamma)^2 - 4(\dot\alpha\gamma - \alpha\dot\gamma)\,.\,(\dot\beta\delta - \beta\dot\delta))}}{2(\dot\alpha\gamma - \alpha\dot\gamma)}$$

bzw.

$$(24)\qquad {}^1z_{1,2} = \frac{-q_1 \pm \sqrt{(q_1^2 - 4q_0q_2)}}{2q_2}$$

schreiben, wo

$$q_0 = \frac{\beta\dot\alpha - \alpha\dot\beta}{\beta\gamma - \alpha\delta}\,; \quad q_1 = \frac{\alpha\dot\delta - \delta\dot\alpha + \gamma\dot\beta - \beta\dot\gamma}{\beta\gamma - \alpha\delta}\,; \quad q_2 = \frac{\delta\dot\gamma - \gamma\dot\delta}{\beta\gamma - \alpha\delta}$$

ist. (s. [5]).

1) Im Falle einer $\mathcal{M}_T$-Bewegung (17) mit Polygonaltrasse sind die kinematischen Parameter:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \alpha(t) &= {}'\alpha_T(t)\, k^{t/T}\,.\,\exp\left(j\,\frac{\varkappa}{T}\,t\right), \quad \beta(t) = {}'\beta_T(t)\,,\\ \gamma(t) &= k^{t/T} \exp\left(j\,\frac{\varkappa}{T}\,t\right), \quad \delta(t) = {}'\delta_T(t)\,. \end{aligned}$$

Für die kinematischen 1-Parameter q_0, q_1, q_2 bekommen wir in diesem Fall

$$q_0 = \frac{`\beta_T`\dot{\alpha}_T - `\dot{\alpha}_T`\dot{\beta}_T + \frac{\mu}{T}`\alpha_T}{`\beta_T - `\delta_T`\alpha_T};$$

$$q_1 = \frac{`\alpha_T`\dot{\delta}_T - `\delta_T`\dot{\alpha}_T + `\dot{\beta}_T - \frac{\mu}{T}(`\alpha_T`\delta_T + `\beta_T)}{`\beta_T - `\delta_T`\alpha_T};$$

$$q_2 = \frac{\frac{\mu}{T}`\delta_T - `\dot{\delta}_T}{`\beta_T - `\delta_T`\alpha_T},$$

wo $\mu = (\ln k + j\varkappa)$. Alle kinematischen 1-Parameter sind also T-periodische Funktionen und aus (24) folgt

$$^1z_{1,2}(t + T) = {}^1z_{1,2}(t)\,. \tag{26}$$

Aus (23) und (25) folgt für die Gangpolbahn der $\mathcal{M}_T$-Bewegung (17):

$$^1\zeta_{1,2}(t + T) = {}^1\zeta_{1,2}(t) \cdot \frac{1}{k} \exp(-j\varkappa)\,.$$

2) Im Falle der $\mathcal{M}_T$-Bewegung (20) mit geradliniger Trasse sind die kinematischen 1-Parameter auch T-periodische Funktionen. Daraus und aus (24) folgt für diese $\mathcal{M}_T$-Bewegungen auch die Beziehung (26). Daraus folgt für beide Fälle:

Satz 4. *Jede von beiden Rastpolbahnen der $\mathcal{M}_T$-Bewegung ist eine geschlossene Kurve. Die Rastpole durchlaufen sie in der $\mathcal{M}_T$-Bewegung periodisch mit der Periode T.*

Bemerkung. Die Geschlossenheit der Rastpolbahnen ist Geschlossenheit in der $\mathcal{M}$-Ebene.

Literatur

[1] *Z. Jankovský:* Zu einigen Fragen der kinematischen Ebenegeometrie auf der $\mathcal{M}$-Gruppe. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 7 (IV, 3) 1978, 43—51 (tschechisch).

[2] *J. Somer:* Äquiforme Bewegungen der Ebene mit mehrfach durchlaufenen Bahnkurven. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 10 (IV, 1) 1983, 39—47 (tschechisch).

[3] *Z. Jankovský:* Zu den inzidenten Bindungen der Möbiusschen Bewegung in der Ebene. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 6 (IV, 1) 1984, 5—17 (tschechisch).

[4] *Z. Jankovský:* $\mathcal{M}$-Bewegungen mit (U)-Automorphismen. In: Čas. pěst. mat. 101 (1976), č. 2, 140—152.

[5] *Z. Jankovský:* Zu Möbiusschen Feldern der i-Geschwindigkeiten. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 17 (IV, 2) 1980, 91—105 (tschechisch).

[6] *J. Somer:* Bewegungen mit verallgemeinerter Zirkulation. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze (IV, 2) 1966, 73—81.

[7] *J. Somer:* Geschlossene projektive Bewegungen und ihre Verallgemeinerung. In: Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze (IV, 3) 1974, 69—78 (tschechisch).

[8] *H. R. Müller:* Bewegungsvorgänge mit mehrfach durchlaufenen Bahnkurven. In: Monatshefte f. Mathematik 67 (1963), 326—334.

[9] *H. R. Müller:* Kinematik. Berlin, 1963, 95—97.

Souhrn

ROVINNÉ MÖBIOVY POHYBY S VÍCEKRÁTE PROBÍHANÝMI TRAJEKTORIEMI

ZDENĚK JANKOVSKÝ

V článku je studována speciální třída rovinných Möbiových pohybů daných tak, že jistá posloupnost bodů $\{(\zeta i)\}$ probíhá ve stejných časových intervalech tutéž trajektorii.

Určení těchto pohybů vede k řešení obecně nelineární soustavy diferenčních rovnic. V článku je probrána podtřída $\{\mathscr{M}_T\}$ těchto pohybů určená speciální soustavou lineárních diferenčních rovnic, jejichž řešení je řešením i dané obecné nelineární soustavy. Řešení lineární soustavy vede ke dvěma typům $\mathscr{M}_T$-pohybů. Je ukázáno, že nelze vybrat posloupnost $\{(\zeta i)\}$ vytvořujících bodů libovolně a jsou nalezeny konfigurační podmínky. V závěru je studován problém polhodií a je ukázáno, že obě pevné polhodie jsou uzavřené křivky v $\mathscr{M}$-rovině.

Anschrift des Verfassers: Doc. Dr. *Zdeněk Jankovský,* CSc., FEL ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6.