Karel Drábek; Zdeněk Pírko

Äquiforme Analogien in der Kinematik der konjugierten Profile

Aplikace matematiky, Vol. 29 (1984), No. 4, 258–271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104094

ÄQUIFORME ANALOGIEN IN DER KINEMATIK DER KONJUGIERTEN PROFILE[1])

KAREL DRÁBEK, ZDENĚK PÍRKO

(Eingegangen am 10. Juli 1983)

1. EINLEITUNG

Aus der Eigenschaften der komplanaren Bewegung des unveränderlichen Systems (der sog. $\mathscr{K}$-Bewegung) den Gangebene (Σ) in der Rastebene (S) erinnern wir an folgendes:

In gewöhnlicher $\mathscr{K}$-Bewegung hat jeder feste Punkt der Gangebene seine Bahnkurve in der Rastebene. Noch allgemeiner, jede feste Kurve der Gangebene hat ihre Hüllkurve (Hüllbahnkurve) in der Rastebene; das Paar so zugeordneter Kurven bezeichnen wir üblicherweise als Paar der konjugierten Profile in der $\mathscr{K}$-Bewegung. Die Wichtigkeit des Studiums von solchen Paaren wird durch die Aufgabe, welche sie in der technischen Kinematik spielen (Theorie der ebenen Stirnräder, Theorie der Nocken, siehe [11], [14], [18]) gegeben.

Für die Geometrie der konjugierten Profile ist im Hinblick zu den Betrachtungen, welche die ersten Ableitungen verlangen, der bedeutendste Satz über die zweierleie Erzeugung der Hüllbahnkurve und der erweiterte Satz von Chasles über die Normalen zu den Kurven der Paare in ihren augenblicklichen Berührungspunkten, welche durch den augenblicklichen Drehmittelpunkt durchgehen.

Die ausführlicheren Eigenschaften, von allem die des höheren als des ersten Ranges, sind dem Wesen nach elementare Folgerungen der Tatsache, dass die Korrespondenz der konjugierten Profile eine spezielle Berührungstransformation ist, siehe z. B. [1], [12], [16], [19], [20]. In der Literatur sind die rechnerischen Betrachtungen von der Wahl des lokalen Koordinatensystems abhängig; den Betrachtungen invarianter (koordinatenunabhängiger) Natur wird nicht besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Gerade mit der Frage des invarianten Zutrittes hängt eng die Frage der Bestimmung

[1]) Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit wurde von K. Drábek unter dem Titel „Äquiforme Analogie der H. R. Müllerschen Gleichungen" an der III. Kinematik-Tagung (Mai 1980, Oberwolfach, BRD) vorgetragen.

der Bewegung durch konjugierte Paare zusammen; es ist bekannt, dass die $\mathscr{K}$-Bewegung durch zwei solche Paare (invariant) bestimmt wird (siehe [9], [13]).

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage der konjugierten Profile für die näherste Verallgemeineriung formuliert (und auch beantwortet), nämlich für die Kinematik des ähnlich-veränderlichen Systems (d.h. für äquiforme Kinematik). Bei der Lösung dieser allgemeineren Frage wird die Reihenfolge, welche für die gewöhnliche (kongruente) Kinematik oben aufgestellt wurde, eingehalten. Zu den benutzten Begriffen und zu der eingeführten Symbolik siehe z. B. [5], [8] und [17].

2. ZWEIERLEIE ERZEUGUNG DER HÜLLBAHNKURVE

Die äquiforme Bewegung ($\mathscr{E}$-Bewegung) repräsentieren wir durch die Gleichung

$$\mathscr{E}(\Sigma/S): z = m + \zeta n \,, \tag{1}$$

wo $m = m(\vartheta)$, $n = n(\vartheta) = l\Theta$, $l = l(\vartheta) > 0$, $\Theta = \exp \mathrm{j}\vartheta$ komplexe Funktionen sind, welche im gebrauchten Mass auf dem gemeinsamen Definitionsintervalle $\mathrm{I}(\vartheta)$ definiert und regulär sind. Während dieser Bewegung (1) soll die Gangebene (Σ) die Kurve

$$\Gamma : \Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \,, \quad (\Phi = \bar{\Phi}) \,,$$

führen, wobei die Kurve ω-parametrisierbar ist, d.h. man kann sie in der Form

$$\zeta = \varphi(\omega)$$

ausdrücken (wo ω der äquiforme Bogen, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\tau$ der Kontingenzwinkel auf der Kurve Γ ist). Diese Kurve bezeichnen wir als das *Σ-Profil* in der Bewegung (1).[2])

Die Koinzidenz des Σ-Profiles in der Ebene (S) und in der Phase $\vartheta \in \mathrm{I}(\vartheta)$

$$z = m + \varphi n = z(\omega, \vartheta)$$

---

[2]) Den Parametrisationsprozess deuten wir wenigstens kurz an: Aus der impliziten Gleichung

$$F(z, \bar{z}) = 0 \,, \quad (F = \bar{F})$$

folgt

$$\operatorname{tg} \omega = -\mathrm{j}(\mathrm{d}z : \mathrm{d}\bar{z} - 1) : (\mathrm{d}z : \mathrm{d}\bar{z} + 1) \,,$$

wo ω (der Tangentenwinkel) schon der äquiforme Bogen ist und

$$\mathrm{d}z : d\bar{z} = -F_{\bar{z}} : F_z \,, \quad (F_z = \partial F : \partial z, F_{\bar{z}} = \partial F : \partial \bar{z})$$

ist. Diese Beziehung führt zusammen mit der Gleichung $F = 0$ (bei der brauchbaren Regularität) zu der gesuchten ω-Parametrisation $z = f(\omega)$.

Im speziellen Fall der Wahl der Kurve Γ kann sich der Parametrisationsprozess vereinfachen, bzw. verliert den Sinn. Es handelt sich da besonders um die geradlinigen, bzw. kreisförmigen Profile; siehe [6], [4].

hat auf $I(\vartheta)$ die Hüllkurve C, die sgn. *S-Hüllkurve* in der Bewegung (1), welche durch die Koinzidenzgleichung und durch die Gleichung

$$[z_\vartheta, z_\omega] = 0\,, \quad \text{oder} \quad [m_\vartheta + \varphi n_\vartheta, \varphi_\omega n] = 0$$

bestimmt wird, wo die Indizes die Veränderliche bedeuten, nach deren abgeleitet wurde.

Aus den Bedingungen für die S-Hüllkurve folgt entweder $\omega = \omega(\vartheta)$ oder $\vartheta = \vartheta(\omega)$ und also entweder

$$C(\vartheta) : z = m(\vartheta) + \varphi(\omega(\vartheta))\, n(\vartheta) = z(\vartheta)$$

oder

$$C(\omega) : z = m(\vartheta(\omega)) + \varphi(\omega)\, n(\vartheta(\omega)) = z(\omega)\,.$$

In diesen Ausdrucksweisen der Hüllkurve und ihrer Interpretationen haben wir die $\mathscr{E}$-Analogie der zwei Erzeugungen der Hüllbahnkurve.

3. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR DIE KONJUGIERTEN PROFILE

Im weiteren wird unser Ausgangspunkt in dem ϑ-parametrisierten Σ-Profil (weiter nur Profil)

$$\Gamma(\vartheta) : \zeta = \varphi(\omega)\,(\vartheta)) = \zeta(\vartheta)$$

und in der zugehörigen S-Hüllkurve (weiter nur Hüllkurve)

$$C(\vartheta) : z = m(\vartheta) + \varphi(\omega\,(\vartheta))\, n(\vartheta) = z(\vartheta)$$

sein.

Wir sagen, dass $\Gamma(\vartheta)$, $C(\vartheta)$ „das konjugierte Paar“ in der Bewegung (1) auf $I(\vartheta)$ bilden, kurz: Γ, C sind auf $I(\vartheta)$ $\mathscr{E}$-konjugiert.

In der gegebenen Bewegung (1), d. h. bei den gegebenen kinematischen Parameter m, n, können die Funktionen $\zeta(\vartheta)$, $z(\vartheta)$, die im oben eingeführten Sinn konjugiert sind, nicht unabhängig sein.

Es gilt nämlich in der betrachteten Phase $\vartheta \in I(\vartheta)$ die Lagebedingung

$$z(\vartheta) = m(\vartheta) + \zeta(\vartheta)\, n(\vartheta)\,, \tag{2}$$

aus welcher

$$z' - n\zeta' = m' + \zeta n'$$

folgt (die Striche bedeuten die Ableitungen nach ϑ).

Nach der Einführung des 1-Poles $({}^1\zeta)$ der Bewegung (1) durch die Gleichung

$${}^1\zeta = -m' : n' \tag{3}$$

(siehe z. B. [13], S. 135–136) erhalten wir aus der vorangehenden Gleichung

$$z' - n\zeta' = n'(\zeta - {}^1\zeta)\,; \tag{4}$$

diese Gleichung überschreiben wir in die Form

$$(5) \qquad (z' : \zeta'\Theta - l)\,\zeta' = (l' + \mathrm{j}l)\,(\zeta - {}^1\zeta)\,.$$

Es gilt weiter die Berührungsbedingung (Fig. 1)

$$(6) \qquad \tau_S - \tau_\Sigma = \vartheta\,,$$

wo τ_S, bzw. τ_Σ der Tangentenwinkel (der äquiforme Bogen) auf C, bzw. Γ ist. Aus der Gleichung (6) folgt

$$z' : \zeta'\Theta = (\exp \mathrm{j}\tau_S)\,\mathrm{d}s : (\exp \mathrm{j}\tau_\Sigma)\,\mathrm{d}\sigma(\exp \mathrm{j}\vartheta) = \mathrm{d}s : \mathrm{d}\sigma\,.$$

Wenn wir die sog. *Rollgleitzahl*

$$h = \mathrm{d}s : \mathrm{d}\sigma = h(\vartheta)$$

einführen, dann erwirbt (5) die Form

$$(7) \qquad (h - l)\,\zeta' - (l' + \mathrm{j}l)\,(\zeta - {}^1\zeta) = 0\,,$$

welche man auch in der Form

$$(8) \qquad {}^1\zeta = \zeta - (h - l)\,\zeta' : (l' + \mathrm{j}l)$$

schreiben kann.

Aus der Koinzidenz des Poles $({}^1\zeta)$ mit dem Pol $({}^1z)$ folgt

$$(3^*) \qquad {}^1z = m + {}^1\zeta n\,;$$

die Gleichung (4) geht dann in

$$(4^*) \qquad n(z' - n\zeta') = n'(z - {}^1z)$$

über und aus ihr haben wir die Gleichung

$$(7^*) \qquad l(h - l)\,z' - h(l' + \mathrm{j}l)\,(z - {}^1z) = 0\,,$$

welche wir in der Form

$$(8^*) \qquad {}^1z = z - l(h - l)\,z' : (l' + \mathrm{j}l)\,h$$

schreiben können.

In den Gleichungen (7), (7*) erhalten wir so die $\mathscr{E}$-Analogie der H. R. Müllerschen Gleichungen, welche in [15] für die $\mathscr{K}$-Bewegung abgeleitet wurden.[3])

---

[3]) Aus der Gleichung (6) folgt weiter

$$(\mathrm{d}\tau_S : \mathrm{d}s)\,(\mathrm{d}s : \mathrm{d}\vartheta) = (\mathrm{d}\tau_\Sigma : \mathrm{d}\sigma)\,(\mathrm{d}\sigma : \mathrm{d}\vartheta) + 1$$

und also (weil $\mathrm{d}\tau_S : \mathrm{d}s = k$, $\mathrm{d}\tau_\Sigma : \mathrm{d}\sigma = \varkappa$, wo k, bzw. $\varkappa$ die euklidische Krümmung der Kurve C, bzw. Γ bezeichnet)

$$(hk - \varkappa)\,\sigma' = 1 \quad \text{oder} \quad (hk - \varkappa)s' = h$$

Über die Gleichungen (7) und (7*) sprechen wir als über die Grundgleichungen für die konjugierten Profile C, Γ.

Es zeigt sich leicht, dass wir dieselben Gleichungen [d. h. (7) und (7*)] bei dem Übergang zu der inversen Bewegung erhalten, wenn die Kurven Γ, C ihre Rollen tauschen. Diese beiden Gleichungen sind also ihre gegenseitigen Folgerungen. Es genügt also sich bloss auf eine von ihnen zu beschränken, z. B. auf die Gleichung (7), bzw. (7*).

Bemerkung 1. Wenn $h = l$ auf $\mathrm{I}(\vartheta)$ ist, dann folgt aus (7), (7*), dass $\zeta = {}^1\zeta$, $z = {}^1z$ auf $\mathrm{I}(\vartheta)$ ist, d. h.: *Für die Polkurven und nur für sie, ist die Rollgleitzahl h gleich dem Drehungsmodul l; das Paar der konjugierten Profile für $h = l$ bildet das Paar der Polkurven.* Diesen speziellen Fall schliessen wir bei den folgenden Betrachtungen aus.

3.1. Bestimmung der konjugierten Profile in der gegebenen Bewegung

In der Gleichung (7) treten insgesamt sechs reelle Funktionen

$$l,\ \mathrm{Re}\,{}^1\zeta = {}^1\zeta_1,\ \mathrm{Im}\,{}^1\zeta = {}^1\zeta_2\ ;\quad h,\ \mathrm{Re}\,\zeta = \zeta_1,\ \mathrm{Im}\,\zeta = \zeta_2$$

des Parameters ϑ auf, welche man in zwei Gruppen verteilen kann:

a) Die erste Gruppe l, ${}^1\zeta$ hängt nur von der tragenden Bewegung ab und die Bewegung ist durch sie auch bestimmt,

b) die zweite Gruppe h, ζ hängt nur von den Profilen ab und gibt den euklidischen Bogen σ, bzw. s des Profils Γ, bzw. C (nicht aber diese Kurve C selbst, denn diese hängt schon von den Parametern der Bewegung ab).

Diese sechs (reele) Funktionen werden durch die komplexe Beziehung (7) gebunden und man kann also vier von ihnen beliebig wählen.

Ist die $\mathscr{E}$-Bewegung gegeben (und zwar entweder durch die Parameter m, l oder l, ${}^1\zeta$), dann stellt in der Klasse der gegebenen Rollgleitzahl h die Gleichung (7) die lineare Differentialgleichung ersten Ranges für ζ dar, welche wir in der Form

$$\zeta' - (l' + jl)(\zeta - {}^1\zeta) : (h - l) = 0 \tag{7a}$$

schreiben.

Dann kann man die Gleichungen (8), (8*) in der Form

$${}^1\zeta = \zeta - (h - l)\,\zeta_\sigma : [l_\sigma + jl(hk - \varkappa)]\,,$$
$${}^1z = z - l(h - l)\,z_s : h[l_s + jl(k - \varkappa : h)]\,,$$

wo die Indizes die Veränderliche bedeuten, nach welcher die Ableitung durchgeführt wurde, schreiben.

So geschriebene Gleichung sind die $\mathscr{E}$-Analogie der H. R. Müllerschen Gleichungen (15) aus der Arbeit [15].

Alle Profile $\zeta(\vartheta)$ erhalten wir durch die Quadratur [einfachheitshalber setzen wir $A = (l' + \mathrm{j}l) : (h - l) = A(\vartheta)$]

$$\zeta = \exp \int A \, \mathrm{d}\vartheta (\gamma - \int A^1 \zeta \exp (-\int A \, \mathrm{d}\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta) .$$

Die Hüllkurven $z(\vartheta)$ folgen durch die Lösung der linearen Differentialgleichung (7*) für z, welche wir in der Form

(7a*) $$z' - h(l' + \mathrm{j}l)(z - {}^1z) : l(h - l) = 0$$

schreiben, als Integralkurven dieser Gleichung in der Form

$$z = \exp \int (hA \, \mathrm{d}\vartheta : l)(c - \int (hA^1 z : l) \exp (-\int hA \, \mathrm{d}\vartheta : l) \, \mathrm{d}\vartheta) .$$

Bei der Wahl $\zeta_1 = \operatorname{Re} \zeta$, bzw. $\zeta_2 = \operatorname{Im} \zeta$ folgt aus der reellen Beziehung

(9) $$(h - l) = (l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1\zeta) : \zeta'$$

der Ausdruck

$$(l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1\zeta)\bar{\zeta}' = (l' - \mathrm{j}l)(\bar{\zeta} - {}^1\bar{\zeta})\zeta'$$

ud daraus die nichtlineare Differentialgleichung ersten Ranges für ζ_2, bzw. ζ_1 in der Form

(10) $$(l'\zeta_1' + l\zeta_2')(\zeta_2 - {}^1\zeta_2) + (l\zeta_1' - l'\zeta_2')(\zeta_1 - {}^1\zeta_1) = 0 .$$

Die Lösung $\zeta_2 = \zeta_2(\vartheta)$, bzw. $\zeta_1 = \zeta_1(\vartheta)$ der Gleichung (10) mit dem gewählten $\zeta_1 = \zeta_1(\vartheta)$, bzw. $\zeta_2 = \zeta_2(\vartheta)$ bestimmt schon das Profil $\zeta = \zeta(\vartheta)$, aus der Gleichung (9) folgt dann h und mit so gefundenem h erhalten wir das Profil $z = z(\vartheta)$ wie oben.

3.2. Bestimmung der Bewegung aus dem Profiltripel

Bei gegebenem Profil ζ und gegebener Rollgleitzahl h ist (7) eine komplexe Beziehung für die drei (reellen) kinematischen Funktionen l, $\operatorname{Re} {}^1\zeta = {}^1\zeta_1$, $\operatorname{Im} {}^1\zeta$ und mann kann also eine von ihnen wählen.

In der Klasse des gegebenen Drehungsmoduls l führt die Bestimmung der Bewegung auf die Quadraturen, denn aus der Gleichung (3) für den 1-Pol (${}^1\zeta$) und aus der Gleichung (8) folgt (bis auf eine beliebige additive Konstante)

$$m = \int ((h - l)\zeta' : (l' + \mathrm{j}l) - \zeta)(l\Theta)' \, \mathrm{d}\vartheta .$$

Bei der Wahl ${}^1\zeta_1 = \operatorname{Re} {}^1\zeta$, bzw. ${}^1\zeta_2 = \operatorname{Im} {}^1\zeta$ folgt aus (9) das Paar der reellen Beziehungen

$$l'{}^1\zeta_1 - l^1\zeta_2 + (h - l)\zeta_1' - l'\zeta_1 + l\zeta_2 = 0 ,$$
$$l^1\zeta_1 + l'{}^1\zeta_2 + (h - l)\zeta_2' - l\zeta_1 - l'\zeta_2 = 0$$

und nach der Elimination von ${}^1\zeta_2$, bzw. ${}^1\zeta_1$ erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$(l^2 + l'^2)({}^1\zeta_1 - \zeta_1) + (h - l)(l'\zeta_1' + l\zeta_2') = 0\,, \tag{11}$$

bzw.

$$(l^2 + l'^2)({}^1\zeta_2 - \zeta_2) + (h - l)(l'\zeta_2' - l\zeta_1') = 0\,. \tag{12}$$

Die nichtlineare Differentialgleichung ersten Ranges (11), bzw. (12) (für ${}^1\zeta_1 \neq \zeta_1$, bzw. ${}^1\zeta_2 \neq \zeta_2$) für den Drehungsmodul l vereinfacht sich im Falle ${}^1\zeta_1 = \zeta_1$ (aber ${}^1\zeta_2 \neq \zeta_2$), bzw. für ${}^1\zeta_2 = \zeta_2$ (aber ${}^1\zeta_1 \neq \zeta_1$) auf die lineare Differentialgleichung ersten Ranges für l

$$l'\zeta_1' + l\zeta_2' = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad l'\zeta_2' - l\zeta_1' = 0$$

mit der Lösung (C ist eine beliebige komplexe Konstante)

$$l = \exp\left(C - \int(\zeta_2' : \zeta_1')\,\mathrm{d}\vartheta\right), \quad \text{bzw.} \quad l = \exp\left(C + \int(\zeta_1' : \zeta_2')\,\mathrm{d}\vartheta\right).$$

3.3. Gemischte Aufgaben

Wir beachten nur die einfachsten Fälle der gemischten Wahl der Parameter:

a) Bei der Wahl ${}^1\zeta$, ζ folgt aus der Gleichung (10)

$$l' : l = [\zeta_1'(\zeta_1 - {}^1\zeta_1) + \zeta_2'(\zeta_2 - {}^1\zeta_2)] : [\zeta_2'(\zeta_1 - {}^1\zeta_1) - \zeta_1'(\zeta_2 - {}^1\zeta_2)]$$

die Differentialgleichung aller Drehungsmodule; mit dieser Lösung l finden wir dann h aus der Gleichung (7).

b) Bei der Wahl beider Profile ζ, z ($\zeta \neq z$ auf $\mathrm{I}(\vartheta)$ ist schon die Rollgleitzahl h bestimmt $[h = \mathrm{d}s : \mathrm{d}\sigma = \sqrt{(z'\bar{z}') : (\zeta'\bar{\zeta}')}]$. In der Gleichung (7) ist einer der kinematischen Parameter wählbar. Der einfachste Fall tritt bei dem gegebenen Drehungsmodul l ein, denn dann aus (8) folgt die 1-Polkurve ${}^1\zeta$ und davon ergibt sich nachher für die Übertragung m (bis auf die additive Konstante)

$$m = -\int {}^1\zeta(l\Theta)'\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Bemerkung 2. Wenn wir speziell $\zeta = z$ auf $\mathrm{I}(\vartheta)$ wählen, dann ist $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\sigma \Leftrightarrow h = 1$; die Grundgleichungen (7), (7*) erhalten die Form

$$(1 - l)\,\zeta' - (l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1\zeta) = 0\,,$$
$$l(1 - l)\,z' - (l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1z) = 0$$

und in der Klasse der Bewegungen mit dem gegebenen Drehugsmodul l erhalten wir die Polkurven

$${}^1\zeta = \zeta - (1 - l)\,\zeta' : (l' + \mathrm{j}l)\,; \quad {}^1z = \zeta - l(1 - l)\,\zeta' : (l' + \mathrm{j}l)$$

und für die Übertragung m ist dann

$$m = {}^1z - {}^1\zeta n = \zeta(1 - n) - \zeta'(1 - l)(l - n)(l' + jl) .$$

Bemerkung 3. Für die $\mathscr{E}$-Rotationen (d.h. für die Bewegungen, für welche $m = 0$ auf $I(\vartheta)$) ist ${}^1\zeta = {}^1z = 0$ auf $I(\vartheta)$ und die Gleichungen (7), (7*) sind homogen:

$$\zeta' - (l' + jl)\,\zeta : (h - l) = 0 ; \quad z' - h(l' + jl)\,z : l(h - l) = 0 .$$

Die Profile mit der gegebenen Rollgleitzahl erhalten wir als die Intergralkurven der ersten Gleichung in der Form

$$\zeta = \gamma \exp \int (l' + jl)\,\mathrm{d}\vartheta : (h - l) ,$$

$\gamma \neq 0$ (eine beliebige komplexe Konstante) und ihre Hüllkurven als die Integralkurven der zweiten Gleichung in der Form

$$z = c \exp \int h(l' + jl)\,\mathrm{d}\vartheta : l(h - l) ,$$

$c \neq 0$ (eine beliebige komplexe Konstante).

4. $\mathscr{E}$-ANALOGIE DES SATZES ÜBER DIE NORMALE DER KONJUGIERTEN PROFILE UND DES SATZES ÜBER DIE ÄQUIVALENZ MIT DEM ROLLEN

In dem charakteristischen Punkt (ζ) hat das Profil und die Hüllkurve eine gemeinsame Normale

$$[\Xi - \zeta, j\zeta'] = 0 ,$$

wo nach (7a) unter der Voraussetzung $h \neq l$, $\zeta \neq {}^1\zeta$ auf $I(\vartheta)$ (d. h. im Falle wenn die Polkurven als das konjugierte Paar ausgeschlossen werden)

$$[\Xi - \zeta, \mathrm{j}(l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1\zeta)] = 0$$

ist. Für die Verbindungsgerade des Punktes (ζ) mit dem 1-Pol $({}^1\zeta)$ gilt die Gleichung

$$[\Xi - \zeta, \Xi - {}^1\zeta] = 0 ,$$

oder

$$[\Xi, \zeta - {}^1\zeta] + [\zeta, {}^1\zeta] = 0 .$$

Die komplexe Richtung der ersten, bzw. der zweiten aus diesen Geraden ist

$$\exp \mathrm{j}\gamma_1 = \mathrm{j}(l' + \mathrm{j}l)(\zeta - {}^1\zeta) : \mathrm{mod}\,(l' + jl)\,\mathrm{mod}\,(\zeta - {}^1\zeta) ,$$

bzw.

$$\exp \mathrm{j}\gamma_2 = (\zeta - {}^1\zeta) : \mathrm{mod}\,(\zeta - {}^1\zeta)$$

und für ihren Winkel erhalten wir

$$\exp \mathrm{j}(\gamma_2 - \gamma_1) = (\mathrm{mod}\,(l' + \mathrm{j}l)) : \mathrm{j}(l' + \mathrm{j}l) = -(l + \mathrm{j}l') : \sqrt{(l^2 + l'^2)}$$

und also ist

$$\mathrm{tg}\,(\gamma_2 - \gamma_1) = l' : l\,,$$

unabhängig von der Übertragung m der tragenden Bewegung und der Rollgleitzahl h der Profile (siehe wieder Fig. 1):

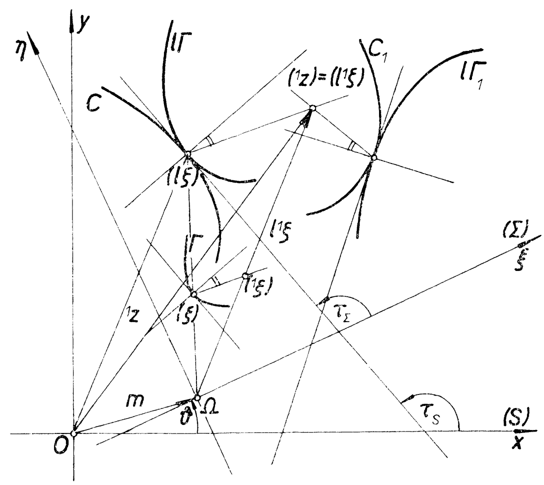

Abb. 1.

Die Normale in dem charakteristischen Punkt der Profile schliesst mit der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem 1-*Pol denselben Winkel ein wie die Normale der Punktbahnkurve.*

Für die $\mathscr{K}$-Bewegung (d. h. für $l = 1$) ist $\gamma_1 = \gamma_2$ und die Normale in dem charakteristischen Punkt der Profile geht durch den Pol. Der vorangehende Satz gibt die $\mathscr{E}$-Analogie des Satzes über die Normale der konjugierten Profile in der betrachteten $\mathscr{E}$-Bewegung.

Für den Tangentenwinkel τ_S, bzw. τ_Σ der (gemeinsamen) Tangente in dem charakteristischen Punkt (ζ) zu den konjugierten Profilen C, Γ mit der ersten Achse des Systems S, bzw. Σ gilt in der Bewegung (1) die Beziehung (6), aus welcher

$$\mathrm{d}\tau_S : \mathrm{d}s - \mathrm{d}\tau_\Sigma : \mathrm{d}s = \mathrm{d}\vartheta : \mathrm{d}s\,, \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}\tau_S : \mathrm{d}\sigma - \mathrm{d}\tau_\Sigma : \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\vartheta : \mathrm{d}\sigma$$

(s, bezw. σ ist der euklidische Bogen auf C, bzw. Γ) folgt.

Mit Benutzung

$$k = \mathrm{d}\tau_S : \mathrm{d}s\,, \quad \varkappa = \mathrm{d}\tau_\Sigma : \mathrm{d}\sigma$$

(k, bzw. $\varkappa$ ist die euklidische Krümmung auf C, bzw. Γ) und

$$h = \mathrm{d}s : \mathrm{d}\sigma\,, \quad \text{bzw.} \quad \chi = 1 : h$$

ist

$$k - \chi\varkappa = \mathrm{d}\vartheta : \mathrm{d}s\,, \quad \text{bzw.} \quad hk - \varkappa = \mathrm{d}\vartheta : \mathrm{d}\sigma\,;$$

nach der Einführung der Geschwindigkeit $s^{\bullet}$, bzw. $\sigma^{\bullet}$ (der Punkt bezeichnet die Ableitungen nach der Zeit) des charakteristischen Punktes auf dem Profil C, bzw. Γ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \vartheta^{\bullet}$ der Ebene (Σ) zu der Ebene (S) ist dann unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems

$$\omega = (k - \chi\varkappa)\, s^{\bullet} = (hk - \varkappa)\, \sigma^{\bullet}\,,$$

was die $\mathscr{E}$-Analogie der Grundgleichung des Rollens für die $\mathscr{K}$-Bewegung darstellt.[4])

5 BESTIMMUNG DER $\mathscr{E}$-BEWEGUNG DURCH DIE KONJUGIERTEN PAARE

In der gegebenen $\mathscr{E}$-Bewegung (d. h. bei gegebenen m, n) wird durch das Profil $\zeta = \varphi(\omega)$ schon die Hüllkurve $z(\vartheta)$ mit der Gleichung

$$z(\vartheta) = m(\vartheta) + \varphi(\omega(\vartheta))\, n(\vartheta)$$

bestimmt, wo $\omega = \omega(\vartheta)$ die Lösung der Gleichung

$$[m_\vartheta + \varphi(\omega)\, n_\vartheta, \varphi_\omega n] = 0$$

ist.

Soll die Hüllkurve die gegebene Kurve $z = f(\vartheta)$ sein, wo ϑ der Winkelparameter (geometrischer Parameter) ist, gibt

$$f(\vartheta) = m(\vartheta) + \varphi(\omega(\vartheta))\, n(\vartheta)$$

eine komplexe Bedingung für die kinematischen Parameter $m(\vartheta)$, $n(\vartheta)$ der tragenden Bewegung; nach der Elimination des Drehungsmoduls l aus dieser und zu ihr konjugierter Gleichung erhalten wir eine (reelle) Bedingung nur für $m(\vartheta)$ in der Form

$$[f - m, \varphi(\omega(\vartheta)) \exp \mathrm{j}\vartheta] = 0\,.$$

Wir zeigen, dass *das konjugierte Paar in der $\mathscr{E}$-Bewegung eine (reelle) Bedingung auf die (reellen) kinematischen Parameter stellt.*

Das konjugierte Paar soll (in Abhängigkeit von dem Koordinatensystemen Σ, S) implizit in der Form

$$\Gamma : \Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = 0\,, \quad \Phi = \bar{\Phi}\,; \quad C : F(z, \bar{z}) = 0\,, \quad F = \bar{F}$$

---

[4]) In dieser Analogie kümmern wir uns nicht um die Orientation der gemeinsamen Normale des Profils und der Hüllkurve in dem charakteristischen Punkt und also auch nicht um die Fragen der „konvexen, bzw. konkaven Phase" u. dgl., auf die man bei dem $\mathscr{K}$-Rollen Rücksicht nehmen muss.

gegeben sein. Wir setzen voraus, dass man für beide Kurven die ω-Parametrisation durchführen kann (zu diesem Prozess siehe Bem.[2])) so dass wir das Paar

$$\zeta = \zeta(\omega_\Sigma)\,, \quad z = z(\omega_S)$$

erhalten (ω_Σ, bzw. ω_S ist der äquiforme Bogen auf Γ, bzw. C, wobei für sie die Gleichung (6) gilt). Aus der Lagebedingung folgt dann

$$z(\omega_S) = m(\vartheta) + \zeta(\omega_\Sigma)\, l(\vartheta)\, \Theta\,,$$

oder im Hinblick zu (6) (siehe noch einmal Fig. 1) ist

$$\operatorname{Re} z(\omega_\Sigma + \vartheta) = \operatorname{Re} m(\vartheta) + (\operatorname{Re} \zeta(\omega_\Sigma) \cos \vartheta - \operatorname{Im} \zeta(\omega_\Sigma) \sin \vartheta)\, l(\vartheta)\,,$$
$$\operatorname{Im} z(\omega_\Sigma + \vartheta) = \operatorname{Im} m(\vartheta) + (\operatorname{Re} \zeta(\omega_\Sigma) \sin \vartheta + \operatorname{Im} \zeta(\omega_\Sigma) \cos \vartheta)\, l(\vartheta)\,.$$

Dieses sind reelle Beziehungen zwischen

$$\omega_\Sigma, l, \vartheta \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} m\,, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im} m$$

und es ist also, allgemein,

$$\omega_\Sigma = f(\operatorname{Re} m, l, \vartheta)$$

und zugleich

$$\omega_\Sigma = g(\operatorname{Im} m, l, \vartheta)$$

so, dass

$$f - g = 0$$

die reelle Beziehung zwischen $\operatorname{Re} m$, $\operatorname{Im} m$, l, ϑ bestimmt.

Durch drei (verschiedene) ω-parametrisierte konjugierte Paare

$$\Gamma_i : \Phi_i = 0 \Rightarrow \zeta_i = \zeta_i(\omega_{i\Sigma}) \qquad C_i : F_i = 0 \Rightarrow z_i = z_i(\omega_{iS})$$
$$(\omega_{iS} - \omega_{i\Sigma} = \vartheta;\ i = 1, 2, 3)$$

sind, wieder allgemein, drei (reelle) Beziehungen

$$f_i(\operatorname{Re} m, l, \vartheta) - g_i(\operatorname{Im} m, l, \vartheta) = 0$$

bestimmt und damit, auch allgemein, drei (reelle) kinematische Parameter $\operatorname{Re} m(\vartheta)$, $\operatorname{Im} m(\vartheta)$, $l(\vartheta)$, so, dass gilt:

Im nullten Rang (d. h. *elementar*) *wird die $\mathscr{E}$-Bewegung durch drei Paare der konjugierten Profile bestimmt.*[5])

Bemerkung 4. Der Satz über die Bestimmung der $\mathscr{E}$-Bewegung durch drei Paare der konjugierten Profile verliert seinen Sinn für den Fall, wenn mindestens eine

[5]) Das ist eine (evidente) Analogie des Satzes über die Bestimmung der $\mathscr{K}$-Bewegung durch zwei Paare der konjugierten Profile, siehe auch [13], S. 138—140.

Kurve aus den Paaren Γ_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) sich auf eine Gerade (d. h. auf eine $\mathscr{E}$-minimale Kurve) oder auf einen Punkt reduziert. Ein solches Beispiel des konjugierten Paares gibt z. B. eine lineare Inzidenzbindung oder eine inverse Bindung zu ihr; das Beispiel der singulären Bestimmung bilden drei Bindungen von dieser Art, d. h. die $\mathscr{E}_3$-, bzw. $\mathscr{E}_3^{-1}$-Bewegung (siehe dazu [7]).

Den singulären (d. h. der Definition nicht entsprechenden) Fällen weichen wir aus und zugleich verallgemeinern wir die Bestimmungsfrage, wenn wir vom Anfang voraussetzen werden, dass das konjugierte Paar koordinatenunabhängig gegeben wird und zwar entweder $\mathscr{K}$-invariant

$$\Gamma : \varkappa = \varkappa(\sigma) \, ; \quad C : k = k(s)$$

(σ, bzw. s ist der euklidische Bogen und $\varkappa$, bzw. k die euklidische Krümmung auf Γ, bzw. C), oder $\mathscr{E}$-invariant

$$\Gamma : \Omega_\Sigma = \Omega_\Sigma(\omega_\Sigma); \, C : \Omega_S = \Omega_S(\omega_S)$$

($\omega_\Sigma = \tau_\Sigma$, bzw. $\omega_S = \tau_S$ ist der äquiforme Bogen und Ω_Σ, bzw. Ω_S ist die äquiforme Krümmung auf Γ, bzw. C). Wir kommen natürlich zu demselben Ergebnis wie es oben angeführt wird ((siehe [3], [9]).

6. SCHLUSSBEMERKUNG

Man sieht, dass bei der Verallgemeinerung des Begriffes der Punktbahnkurve in der Kinematik des ähnlich veränderlichen Systems (in der $\mathscr{E}$-Kinematik) durch den Begriff der konjugierten Profile noch ein weiterer kinematischer Parameter (der Drehungsmodul) hinzukommt. In dieser Verallgemeinerung erscheint die Grösse, welche invariant die gegenseitige Beziehung zwischen dem Profil und seiner Hüllkurve charakterisiert und zwar die sog. Rollgleitzahl als Funktion, welche in der ersten Ordnung die Wahl des Profils, bzw. der Hüllkurve charakterisiert.

In der äquiformen Kinematik der konjugierten Profile unterscheidet gerade der Drehungsmodul ähnliche Gleichungen, zu welchen es bei den konjugierten Profilen in der Kinematik des unveränderlichen Systems (in der $\mathscr{K}$-Kinematik) kommt. Diese Grundgleichungen werden in der gewöhnlichen Kinematik (und wir tun es so in unserer Arbeit auch für ihre Verallgemeinerung) als H. R. Müllersche Gleichungen bezeichnet.

Wir haben die einfachsten Aufgaben, die mit diesen Gleichungen verbunden werden, aufgezeigt und schon diese Auswahl bietet den Ausblick auf reiche Möglichkeiten weiterer Verallgemeinerungen.

Literatur

[1] *W. Blaschke, H. R. Müller:* Ebene Kinematik. München, Oldenbourg 1956. Kap. I, S. S. 44—46.

[2] *O. Bottema:* Zur Kinematik des Rollgleitens. Archiv d. Mathematik VI (1955), 25—28.

[3] *K. Drábek:* Eine Bemerkung zum Paar der konjugierten Profile in der äquiformen Bevegung. Strojnícky časopis, im Druck.

[4] *K. Drábek:* Obálky kruhových profilů v rovinném ekviformním pohybu (Hüllkurven der kreisförmigen Profile in der ebenen äquiformen Bewegung). Sborník III. konference o teorii strojů a mechanismů, Liberec 1980, 1—7.

[5] *K. Drábek, J. Chudý:* Beitrag zur $\mathcal{E}$-Kinematik in der Ebene: Hüllkurven der $\mathcal{E}$-Bewegung. Acta Polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 16 (IV, 3, 1976), 87—96.

[6] *K. Drábek, J. Chudý:* Obálky přímkových profilů v rovinném ekviformním pohybu (Hüllkurven der geradlinigen Profile in der ebenen äquiformen Bewegung). Sborník III. konference o teorii strojů a mechanismů, Liberec 1980, 9—18.

[7] *K. Drábek, J. Chudý, Z. Jankovský, Z. Pírko, J. Somer:* Lineární incidenční vazby v ekviformním rovinném pohybu II: $\mathcal{E}_3$-pohyb (Lineare Inzidenzbindungen in der äquiformen ebenen Bewegung II : $\mathcal{E}_3$-Bewegung). Strojnícky časopis 30 (1979), Nr. 5, 515—522.

[8] *K. Drábek, Z. Pírko* Beitrag zur $\mathcal{E}$-Kinemrtik der Ebene: Äquivalenzsatz; äquiforme Trochoiden. Aplikace matematiky 26 (1981), 365—376.

[9] *K. Drábek, Z. Pírko:* Eine Bemerkung zum Paar konjugierter Profile in kongruenter Bewegung. Strojnícky časopis, im Druck.

[10] *G. Grüss:* Zur Kinematik des Rollgleitens. Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 31 (1951), 97—103.

[11] *J. Chakraborty, S. G. Dhande:* Kinematics and geometry of planar and spatial cam mecanisms. New Delhi — Bangalore 1977.

[12] *F. Charvát, Z. Pírko:* Korespondenční princip v kinematice sdružených profilů (Korrespondenzprinzip in der Kinematik der konjugierten Profile). Výzkumná zpráva státního vědeckého úkolu I-1-22/a. Praha 1966, 44 S.

[13] *M. Krause, A. Carl:* Analysis der ebenen Bewegung. Berlin—Leipzig 1920.

[14] *F. L. Litvin:* Теория зубчатых зацеплений (Theorie der Stirnränder). Moskva 1968, 2. Ausg.

[15] *H. R. Müller:* Zur Kinematik des Rollgleitens. Archiv d. Mathematik IV (1953), 239—248.

[16] *Z. Pírko:* K teorii konjugovaných profilů (Zur Theorie der konjugierten Profile). Sborník vědeckých prací konference kateder mechaniky, pružnosti a pevnosti v Brně 1965, Brno 1966, 26—30.

[17] *Z. Pírko:* Úvod do kinematické geometrie v rovině (Einführung in die kinematische Geometrie in der Ebene). Praha 1968.

[18] *B. Procházka:* Vybrané statě z deskriptivní geometrie (Ausgewählte Kapitel aus der darstellenden Geometrie), IV. Bd., Praha 1916.

[19] *F. Schilling:* Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation. Erste Abhandlung. Zeitschrift f. Math. u. Physik 54 (1906), Heft 3, 281—317.

[20] *F. Schilling:* Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation. Zweite Abhandlung. Zeitschrift f. Math. u. Physik, Heft 4, 337—364.

Souhrn

EKVIFORMNÍ ANALOGIE V KINEMATICE KONJUGOVANÝCH PROFILŮ

KAREL DRÁBEK, ZDENĚK PÍRKO

V práci je především nalezena ekviformní analogie k dvojímu vytvoření obalové trajektorie a její využití k odvození H. R. Müllerových rovnic. Ze vztahu mezi veličinami v jedné z těchto rovnic jsou řešeny tři typy úloh: přímá, inverzní a smíšená. Dále je odvozena analogie ke Cauchyově větě o úhlu společné normály sdružených profilů a spojnice jejich dotykového bodu s 1-pólem v dané fázi a věta o určenosti pohybu třemi dvojicemi sdružených profilů.

Anschrift der Verfasser: Doc. RNDr. *Karel Drábek*, CSc., Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6-Dejvice; Prof. RNDr. *Zdeněk Pírko*, DrSc., Sokolovská 74, 130 00 Praha 3-Karlín.