

Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über ein Überrelaxationsverfahren für p -zyklische lineare Gleichungssysteme

Aplikace matematiky, Vol. 28 (1983), No. 4, 249–261

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104035>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1983

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EIN OBERRELAXATIONSVERFAHREN FÜR p -ZYKLISCHE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen an 1. September 1982)

I

Es sei ein lineares algebraisches Gleichungssystem von der Form

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

gegeben, wo \mathbf{B} eine schwach p zyklische Blockmatrix von der Form

$$(2) \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{B}_{21}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{B}_{32}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{B}_{p,p-1}, & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

ist. Man schreibe die Matrix \mathbf{B} in der Form $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, wo \mathbf{L} bzw. \mathbf{U} eine untere bzw. obere Blockdreiecksmatrix ist. Das Oberrelaxationsverfahren ist dann durch die Formel

$$(3) \quad \mathbf{x}_{i+1} = (\alpha\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1)\mathbf{E} + \mathbf{U}] \mathbf{x}_i + (\alpha\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

definiert, wo α einen reellen Parameter bezeichnet (in der Literatur wird der Parameter meistens mit ω bezeichnet, wobei $\omega = 1/\alpha$ gilt – siehe z.B. [1]). Die Formel (3) kann man in der Form

$$(4) \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{x}_i + \mathbf{b}'(\alpha)$$

schreiben, wo

$$(5) \quad \mathbf{V}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{E}_1, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}_{21}, & \alpha\mathbf{E}_2, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & -\mathbf{B}_{32}, & \alpha\mathbf{E}_3, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & -\mathbf{B}_{p,p-1}, & \alpha\mathbf{E}_p \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{E}_1, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{O}, & (\alpha - 1) \mathbf{E}_2, & \dots, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & (\alpha - 1) \mathbf{E}_p \end{pmatrix}$$

und

$$(6) \quad \mathbf{b}'(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{E}_1, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}_{21}, & \alpha \mathbf{E}_2, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & -\mathbf{B}_{32}, & \alpha \mathbf{E}_3, & \dots, & \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \mathbf{O}, & \dots, & -\mathbf{B}_{p,p-1}, & \alpha \mathbf{E}_p \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{b}$$

gilt (die Dimensionen der Einheitsmatrizen $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p$ entsprechen dabei der Blockzerlegung der Matrix \mathbf{B}).

Man stellt leicht fest, dass die Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$ ein Spezialfall der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p)$ aus der Arbeit [2] ist, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \dots = \beta_p = -1$ gilt. Die betrachtete Iterationsmethode ist also ein Spezialfall des mehrparametrischen, in der Arbeit [2] untersuchten, Iterationsverfahrens. Aus dem Satz 1 der Arbeit [2] folgt sofort folgender Satz:

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$, $\lambda \neq 0$. Dann ist jede von Null verschiedene Zahl μ , die die Beziehung*

$$(7) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p \lambda^{p-1}$$

erfüllt, ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} . Fall umgekehrt $\mu \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} ist, dann ist jede Wurzel λ der Gleichung (7) ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$.

Der Satz 1 drückt also die gegenseitige Beziehung zwischen von Null verschiedenen Eigenwerten der Matrizen \mathbf{B} und $\mathbf{V}(\alpha)$ aus.

Die gegenseitige Beziehung zwischen den Eigenwerten λ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$ und den Wurzeln λ der Gleichung (7) drückt der folgende Satz 2 aus.

Satz 2. I. *Es sei μ ein beliebiger Eigenwert der Matrix \mathbf{B} ($\mu \neq 0$ oder $\mu = 0$) und λ sei ein Wurzel der Gleichung (7). Dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$;*

II. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$. Dann existiert ein solcher Eigenwert μ ($\mu \neq 0$ oder $\mu = 0$) der Matrix \mathbf{B} , dass λ eine Wurzel der Gleichung (7) ist.*

Die Behauptung dieses Satzes folgt leicht aus dem Satz 2 der Arbeit [2]. Die Behauptung I für $\mu \neq 0$ und II folgt trivial. Es genügt also die Behauptung I für den Fall $\mu = 0$ zu beweisen. Aus der Behauptung Ib der Arbeit [2] folgt die folgende Behauptung: Es sei λ eine Wurzel der Gleichung (7) aus der Arbeit [2] und wenn wenigstens eine der Zahlen $1 + \beta_i - \lambda\beta_i$ gleich Null ist, dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p)$. Da $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_p = -1$, ist

$1 + \beta_1 - \lambda\beta_1 = 1$ und $1 + \beta_i - \lambda\beta_i = \lambda$, $i = 2, \dots, p$. Falls also $\lambda = 0$ eine Wurzel der Gleichung (7) ist, ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$. Man bemerke noch, dass $\lambda = 0$ eine Wurzel der Gleichung (7) nur für $\alpha = 1$ ist. Es folgt ferner aus der Behauptung Ic des Satzes 2 aus der Arbeit [2], dass im Fall, wenn für die Wurzel der Gleichung (7) aus der Arbeit [2] $1 + \beta_i - \lambda\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p$ gilt (d.h. $\lambda \neq 0$ ist), $1 - \alpha + \lambda\alpha = 0$ gelten muss; λ ist also genau dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$, wenn wenigstens einer der Diagonalblöcke der Matrix \mathbf{B}^p singularär ist. Diese Forderung ist trivial erfüllt, da die Matrix \mathbf{B} singularär ist (sie hat nämlich den Eigenwert $\mu = 0$).

Folgende Betrachtungen befassen sich mit der Optimierung des Oberrelaxationsverfahrens (siehe (4), (5), (6)) für den Fall, wenn alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^p reell sind oder wenn der, im Absolutbetrag maximaler Eigenwert der Matrix \mathbf{B}^p positiv ist und die übrigen Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^p in einem gewissen, nach der Realachse symmetrischen Gebiet, enthalten sind. Es ist klar, dass eine solche Lage von Eigenwerten höchstwahrscheinlich bei Systemen (1) mit einer nichtnegativen, schwach p -zyklischen Matrix \mathbf{B} , in die Betrachtung kommen kann.

II

Man bezeichne mit μ_i die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} und man setze zuerst voraus, dass die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^p , $p \geq 2$ (d.h. die Zahlen μ_i^p) insgesamt reell sind und $-1 < \mu_i^p < 1$ gilt. Es seien m und M solche Eigenwerte, dass $0 < M < 1$, $0 \leq m$ ist und

$$(8) \quad -m^p \leq \mu_i \leq \max \mu_i^p = M^p$$

gilt (solange $\mu_i^p > 0$ für alle i ist, lege man $m = 0$). Es gilt dann folgender Satz:

Satz 3.I. *Es sei $m \leq (p - 2)M/p$. Dann gilt für den Spektralradius $\varrho(\mathbf{V}(\alpha))$ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$ die Beziehung*

$$(9) \quad \min_{\alpha} \varrho(\mathbf{V}(\alpha)) = \varrho(\mathbf{V}(\alpha_0)) = k_0,$$

wo k_0 eine einzige, im Intervall $0 < k < 1$ liegende, Wurzel der Gleichung

$$(10) \quad Mk - p \sqrt[p]{k} + (p - 1)M = 0$$

ist und

$$(11) \quad \alpha_0 = (p - 1)/(p - 1 + k_0), \quad 0 < \alpha_0 < 1$$

gilt.

II. *Es sei $(p - 2)M/p < m \leq M$. Dann gilt (9), wo k_0 eine einzige, im Intervall $0 < k < 1$ liegende, Wurzel der Gleichung*

$$(12) \quad (M - m)k - 2 \sqrt[p]{k} + (M + m) = 0$$

ist und

$$(13) \quad \alpha_0 = (1 - Mk_0^{(p-1)/p}) / (1 - k_0) = (1 + mk_0^{(p-1)/p}) / (1 + k_0), \quad 0 < \alpha_0 < 1$$

gilt.

Bemerkung 1. Im Falle, wenn die Matrix \mathbf{B} schwach 2-zyklische ist ($p = 2$), folgt sofort aus den Ungleichungen $0 \leq m$ und $m \leq (p-2)/p = 0$ die Gleichung $m = 0$ und für die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^2 gelten infolge (8) die Ungleichungen $0 \leq \mu_i^2 \leq M^2$, $i = 1, 2, \dots$. Aus dem Satz 3, Behauptung I, folgt dann sofort, dass k_0 eine Wurzel der Gleichung $Mk - 2\sqrt{k} + M = 0$ ist, so dass $k_0 = (1 - \sqrt{(1 - M^2)}) / (1 + \sqrt{(1 - M^2)})$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$ ist; dieses stellt das bekannte Ergebnis für die Methode SOR dar (vgl. z.B. [1]).

Falls für $p = 2$ die Ungleichungen $0 = (p-2)M/p < m < M$ gelten, d.h. für die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^2 sind angesichts (8) die Ungleichungen $-m^2 \leq \mu_i^2 < M^2$ erfüllt, folgt dann aus dem Satz 3, die Behauptung II, dass k_0 eine einzige, im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ liegende Wurzel der Gleichung $(M - m)k - 2\sqrt{k} + (M + m) = 0$ ist, d.h. dass $k_0 = (1 - \sqrt{(1 - (M^2 - m^2))}) / (M - m)$ und $\alpha_0 = (1 - M\sqrt{k_0}) / (1 - k_0)$ gilt. Das Oberrelaxationsverfahren konvergiert also auch in diesem Fall mindestens so schnell, wie das Gauss-Seidelsche-Verfahren; gleich schnell ist die Konvergenz bei beiden Verfahren für $m = M$ (wenn $k_0 = M^2$ gilt).

Bemerkung 2. Zu der Abschätzung des approximativen Wertes für die, im Intervall $0 < k_0 < 1$ liegende Wurzel k_0 (d.h. für den Spektralradius der Matrix $\mathbf{V}(\alpha)$), kann man die Formel

$$k_0 \doteq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p M^p$$

benutzen; eine wesentlich genauere Annäherung gibt die Formel

$$k_0 \doteq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p M^p \left[\frac{(p-1)^p M^p - p^p}{p(p-1)^{p-1} M^p - p^p} \right]^p.$$

Ähnlicherweise bekommt man für den approximativen Wert der, im Intervall $0 < k_0 < 1$ liegenden Wurzel der Gleichung (12) die Formel

$$k_0 \doteq \left(\frac{M+m}{2}\right)^p$$

oder die genauere Formel

$$k_0 \doteq \left(\frac{M+m}{2}\right)^p \left[\frac{(p-1)(M-m)(M+m)^{p-1} - 2^p}{p(M-m)(M+m)^{p-1} - 2^p} \right]^p.$$

Alle Formeln folgen sofort nach der Anwendung des Newtonschen Verfahrens für die Gleichungen (10), (12), wo man $K = \sqrt[p]{k}$ legt und als Anfangsannäherung den Wert $K_0 = 0$ nimmt.

Bemerkung 3. Es folgt aus dem Satz 3, Behauptung I, dass der optimale Spektralradius k_0 von der Zahl m nicht abhängt. Die Zahl k_0 wird also nicht durch die Tatsache beeinflusst, ob die Matrix \mathbf{B} singular oder nichtsingular ist.

Beweis des Satzes 3. Wenn man $\mu^3 = \tau$ legt, folgt für $\lambda \neq 0$ aus (7) die Beziehung

$$(14) \quad \tau = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p}{\lambda^{p-1}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

die eine Abbildung der komplexen Ebene λ in die komplexe Ebene τ darstellt. Man untersuche jetzt das Bild der Kreislinien mit dem Radius k in der Ebene λ . Für $\lambda = k\varepsilon$, wo ε eine Komplexeinheit ist, folgt dann

$$\begin{aligned} \tau = x + iy &= (1 - \alpha + k\varepsilon\alpha)^p / k^{p-1}\varepsilon^{p-1} = \left[\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (1 - \alpha)^{p-i} k^i \varepsilon^i \alpha^i \right] / k^{p-1}\varepsilon^{p-1} = \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (1 - \alpha)^{p-i} \alpha^i k^{i-p+1} \varepsilon^{i-p+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p}{i} (1 - \alpha)^{p-i} \alpha^i k^{i-p+1} \varepsilon^{i-p+1} + \binom{p}{p-1} (1 - \alpha) \alpha^{p-1} + \binom{p}{p} \alpha^p k \varepsilon = \\ &= \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p}{i} (1 - \alpha)^{p-i} \alpha^i k^{i-p+1} [\cos(p-1-i)\varphi - i \sin(p-1-i)\varphi] + \\ &+ \binom{p}{p-1} (1 - \alpha) \alpha^{p-1} + \binom{p}{p} \alpha^p k (\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Es ist also

$$(15) \quad x(\varphi) = \frac{\binom{p}{0} (1 - \alpha)^p}{k^{p-1}} \cos(p-1)\varphi + \frac{\binom{p}{1} (1 - \alpha)^{p-1} \alpha}{k^{p-2}} \cos(p-2)\varphi + \dots$$

$$\dots + \frac{\binom{p}{p-2} (1 - \alpha)^2 \alpha^{p-2}}{k} \cos \varphi + \binom{p}{p-1} (1 - \alpha) \alpha^{p-1} + \binom{p}{p} \alpha^p k \cos \varphi,$$

$$(16) \quad y(\varphi) = - \frac{\binom{p}{0} (1 - \alpha)^p}{k^{p-1}} \sin(p-1)\varphi - \frac{\binom{p}{1} (1 - \alpha)^{p-1} \alpha}{k^{p-2}} \sin(p-2)\varphi + \dots$$

$$\dots - \frac{\binom{p}{p-2} (1 - \alpha)^2 \alpha^{p-2}}{k} \sin \varphi + \binom{p}{p} \alpha^p k \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Die Kreislinie $\lambda = k\varepsilon$ bildet sich auf eine geschlossene, nach der x -Achse symmetrische, Kurve (15), (16) ab, die in der Ebene τ liegt. Diese Kurve schneidet offensichtlich

die x -Achse für $\varphi = 0$ im Punkte

$$x_{\max}(k) = (1 - \alpha + k\alpha)^p / k^{p-1}$$

und für $\varphi = \pi$ im Punkte

$$x_{\min}(k) = (1 - \alpha - k\alpha)^p / k^{p-1} \quad (p \text{ ungerade}) \quad \text{oder}$$

$$x_{\min}(k) = -(1 - \alpha - k\alpha)^p / k^{p-1} \quad (p \text{ gerade}).$$

Man beweist jetzt, dass mit wachsendem k $x_{\min}(k)$ bzw. $x_{\max}(k)$ ab- bzw. zunimmt. Für ungerade p ist

$$\frac{d}{dk} x_{\min}(k) = \frac{d}{dk} \frac{(1 - \alpha - k\alpha)^p}{k^{p-1}} = \frac{(1 - \alpha - k\alpha)^{p-1} k^{p-2}}{k^{2(p-1)}} [-k\alpha - (p-1)(1-\alpha)].$$

Der Ausdruck $-k\alpha - (p-1)(1-\alpha)$ ist offensichtlich negativ. Der Ausdruck $(1 - \alpha - k\alpha)^{p-1}$ ist positiv, da p ungerade ist und $1 - \alpha - k\alpha \neq 0$ gilt. Es ist also

$$\frac{d}{dk} x_{\min}(k) < 0,$$

so dass $x_{\min}(k)$ mit wachsendem k abnehmend ist.

Für gerade p ist

$$\frac{d}{dk} x_{\min}(k) = \frac{d}{dk} \left(- \frac{(1 - \alpha - k\alpha)^p}{k^{p-1}} \right) = - \frac{(1 - \alpha - k\alpha)^{p-1} k^{p-2}}{k^{2(p-1)}} \cdot [-k\alpha - (p-1)(1-\alpha)].$$

Der Ausdruck $-k\alpha - (p-1)(1-\alpha)$ ist offensichtlich negativ und auch der Ausdruck $1 - \alpha - k\alpha$ ist negativ für $k \geq (p-1)(1-\alpha)/\alpha$, $p > 2$. Es gilt $1 - \alpha - k\alpha = 0$ nur für $k = (p-1)(1-\alpha)/\alpha$, wo $p = 2$ ist. Die Zahl $x_{\min}(k)$ ist auch in diesem Fall eine abnehmende Funktion von k .

Es gilt ferner

$$\frac{d}{dk} x_{\max}(k) = \frac{d}{dk} \frac{(1 - \alpha + k\alpha)^p}{k^{p-1}} = \frac{(1 - \alpha + k\alpha)^{p-1} k^{p-2}}{k^{2(p-1)}} \cdot [k\alpha - (p-1)(1-\alpha)].$$

Der Ausdruck $k\alpha - (p-1)(1-\alpha)$ ist angesichts der Ungleichung $k \leq (p-1) \cdot (1-\alpha)/\alpha$ offensichtlich nichtnegativ. Der Ausdruck $(1 - \alpha + k\alpha)^{p-1}$ ist positiv, da p ungerade ist und $1 - \alpha + k\alpha > 0$ gilt. Die Zahl $x_{\max}(k)$ wächst also mit wachsenden k .

Wir beweisen schliesslich, dass die Kurve (15), (16) ausgenommen $x_{\min}(k)$ und $x_{\max}(k)$ keine andere Durchschnittspunkte mit der x -Achse haben kann. Da $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ ist, gilt $\sin \varphi \neq 0$ und aus der Gleichung (16) folgt die Gleichung

$$(17) \quad \frac{(1-\alpha)^p \sin(p-1)\varphi}{k^{p-1} \sin \varphi} + \binom{p}{1} \frac{(1-\alpha)^{p-1} \alpha \sin(p-2)\varphi}{k^{p-2} \sin \varphi} + \\ + \binom{p}{2} \frac{(1-\alpha)^{p-2} \alpha^2 \sin(p-3)\varphi}{k^{p-3} \sin \varphi} + \dots + \binom{p}{p-2} \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{p-2}}{k} = k\alpha^p.$$

Wenn man die linke Seite der Gleichung mit $L(\varphi)$ und die rechte Seite mit $P(\varphi)$ bezeichnet, gelten schrittweise folgende Ungleichungen (es ist $\tilde{k} = (p-1)(1-\alpha)/\alpha$):

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| &\leq \frac{(1-\alpha)^p}{k^{p-1}} \left| \frac{\sin(p-1)\varphi}{\sin \varphi} \right| + \binom{p}{1} \frac{(1-\alpha)^{p-1} \alpha}{k^{p-2}} \left| \frac{\sin(p-2)\varphi}{\sin \varphi} \right| + \\ &+ \binom{p}{2} \frac{(1-\alpha)^{p-2} \alpha^2}{k^{p-3}} \left| \frac{\sin(p-3)\varphi}{\sin \varphi} \right| + \dots + \binom{p}{p-2} \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{p-2}}{k} < \\ &< \frac{(1-\alpha)^p}{k^{p-1}} (p-1) + \binom{p}{1} \frac{(1-\alpha)^{p-1} \alpha}{k^{p-2}} (p-2) + \binom{p}{2} \frac{(1-\alpha)^{p-2} \alpha^2}{k^{p-3}} (p-3) + \dots \\ &\dots + \binom{p}{p-2} \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{p-2}}{k} \leq \frac{(1-\alpha)^p}{\tilde{k}^{p-1}} (p-1) + \binom{p}{1} \frac{(1-\alpha)^{p-1} \alpha}{\tilde{k}^{p-2}} (p-2) + \\ &+ \binom{p}{2} \frac{(1-\alpha)^{p-2} \alpha^2}{\tilde{k}^{p-3}} (p-3) + \dots + \binom{p}{p-2} \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{p-2}}{\tilde{k}} = \\ &= \frac{(1-\alpha) \alpha^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[(p-1)^0 \binom{p}{0} (p-1) + (p-1) \binom{p}{1} (p-2) + \right. \\ &+ (p-1)^2 \binom{p}{2} (p-3) + \dots + (p-1)^{p-2} \binom{p}{p-2} (p-(p-1)) \left. \right] = \\ &= \frac{(1-\alpha) \alpha^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p}{i} (p-i)^i (p-1-i) = \frac{(1-\alpha) \alpha^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} (p-1)^p = \\ &= (1-\alpha) \alpha^{p-1} (p-1) = \frac{(p-1)(1-\alpha)}{\alpha} \alpha^p = \tilde{k} \alpha^p \leq k \alpha^p = P(\alpha). \end{aligned}$$

Da also $|L(\varphi)| < P(\varphi)$ und um so mehr $L(\varphi) < P(\varphi)$ für alle $\varphi \in (0, \pi)$ gilt, besitzt die Gleichung (17) in diesem Intervall keine Wurzel. Bei obigem Beweis haben wir die Ungleichung $\sin n\varphi/\sin \varphi < n$ benutzt, welche für alle $\varphi \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass dem System von Kreislinien $|\lambda| = k$, $k \geq (p-1) \cdot (1-\alpha)/\alpha$, ein System der Kurven (15), (16) entspricht; diese Kurven haben dabei keine gemeinsame Durchschnittspunkte und enthalten alle die Kurve

$$(18) \quad x(\varphi) = \frac{(1-\alpha) \alpha^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[\binom{p}{0} \cos(p-1)\varphi + \binom{p}{1} (p-1) \cos(p-2)\varphi + \dots + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} \cos \varphi + \binom{p}{p-1} (p-1)^{p-1} + \binom{p}{p} (p-1)^p \cos \varphi \Big], \\
(19) \quad y(\varphi) &= \frac{(1-\alpha)\alpha^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[-\binom{p}{0} \sin(p-1)\varphi - \binom{p}{1} (p-1) \sin(p-2)\varphi - \dots \right. \\
& \quad \left. \dots - \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} \sin \varphi + \binom{p}{p} (p-1)^p \sin \varphi \right], 0 \leq \varphi < 2\pi.
\end{aligned}$$

Der Aussenseite des Kreises $|\lambda| \leq k$, wo $k \geq (p-1)(1-\alpha)/\alpha$ entspricht also die Aussenseite eines, durch die Kurve (15), (16) in der Ebene τ begrenzten Gebietes. Wir bemerken, dass die Kurve (18), (19) den Anfangspunkt enthält, da $x_{\min}(k_0) \leq \leq 0 < x_{\max}(k_0)$ ist (der Beweis von diesen Ungleichungen ist trivial). Wenn also keine von den reellen Eigenwerten der Matrix \mathbf{B}^p aussen der Kurve (15), (16) (d.h. aussen des Intervalls $\langle x_{\min}(k), x_{\max}(k) \rangle$) liegt, kann keiner der entsprechenden Eigenwerten λ ausser des Kreises $|\lambda| \leq k$ liegen.

Man setze jetzt voraus, dass $0 \leq m \leq (p-2)M/p$ (siehe den Satz 3.I.). Dann gelten für die Eigenwerte μ_i der Matrix \mathbf{B}^p angesichts (8) die Ungleichungen

$$-\left(\frac{p-2}{p}\right)^p M^p \leq -m^p \leq \mu_i^p \leq M^p.$$

Wir müssen jetzt solche Zahlen $0 < \alpha < 1$, $0 < k < 1$ finden, dass die Ungleichungen

$$(20) \quad x_{\min}(k) \leq -m^p \leq M^p \leq x_{\max}(k),$$

$$(21) \quad k \geq (p-1)(1-\alpha)/\alpha$$

gleichzeitig gelten und k minimal ist.

Man betrachte zuerst die Ungleichung

$$M^p \leq x_{\max}(k).$$

Nach einfachen Umformungen bekommt man äquivalente Gleichungen

$$\begin{aligned}
M^p &\leq (1-\alpha+k\alpha)^p/k^{p-1}, \\
Mk^{(p-1)/p} &\leq 1-\alpha+k\alpha, \\
(22) \quad \alpha &\leq [1 - Mk^{(p-1)/p}]/(1-k).
\end{aligned}$$

Der Graph von der Funktion $(1 - Mk^{(p-1)/p})/(1 - k)$ ist mit (A) bezeichnet (vgl. Abb. 1).

Man betrachte jetzt die Ungleichung

$$x_{\min}(k) \leq -m^p.$$

Für gerade p gilt also

$$-(1 - \alpha - k\alpha)^p / k^{p-1} \leq -m^p,$$

$$(1 - \alpha - k\alpha)^p \geq m^p k^{p-1}.$$

Da $1 - \alpha - k\alpha \leq 0$ gilt, ist

$$k\alpha - 1 + \alpha \geq mk^{(p-1)/p},$$

$$(23) \quad \alpha \geq (1 + mk^{(p-1)/p}) / (1 + k).$$

Der Graph der Funktion $(1 + mk^{(p-1)/p}) / (1 + k)$ ist in Abb. 1 mit (B) bezeichnet. Für ungerade Zahlen p gilt schrittweise

$$(1 - \alpha - k\alpha)^p / k^{p-1} \leq -m^p,$$

$$1 - \alpha - k\alpha \leq -mk^{(p-1)/p},$$

$$(23) \quad \alpha \geq (1 + mk^{(p-1)/p}) / (1 + k);$$

dieses ist die gleiche Ungleichung, wie im Falle der geraden Zahlen p .

Aus der Ungleichung (21) folgt sofort die äquivalente Ungleichung

$$(24) \quad \alpha \geq (p - 1) / (p - 1 + k).$$

Der Graph der Funktion $(p - 1) / (p - 1 + k)$ ist in Abb. 1 mit (C) bezeichnet.

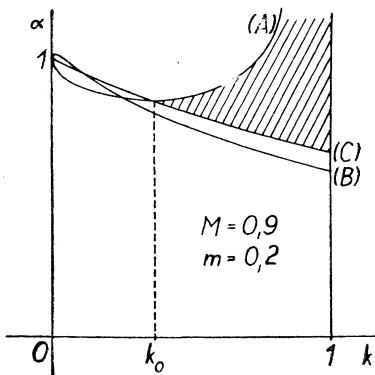


Abb. 1.

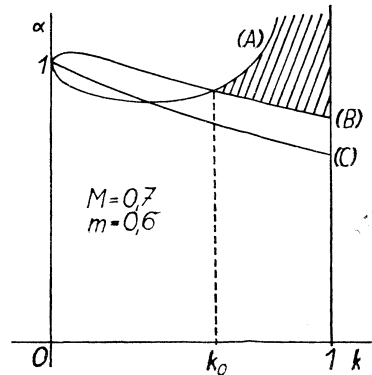


Abb. 2.

Das durch die Ungleichungen (22), (23), (24) begrenzte Gebiet ist in Abb. 1 schraffiert. Die minimale Zahl k , d.h. die Zahl k_0 , bekommt man für $0 \leq m \leq (p - 2) M/p$ als den Durchschnittspunkt der Kurven (A) und (C) (für $m = (p - 2) M/p$ schneiden sich alle drei Kurven in einem einzigen Punkte). Die Zahl k_0 bekommt man also als eine Wurzel der Gleichung

$$(1 - Mk^{(p-1)/p}) / (1 - k) = (p - 1) / (p - 1 + k),$$

woraus wir nach einer Umformung die Gleichung

$$Mk^{(2p-1)/p} - kp + M(p-1)k^{(p-1)/p} = 0$$

bekommen. Da $k \neq 0$ ist, folgt sofort davon die Gleichung (10). Die Funktion f an der linken Seite der Gleichung (10) ist eine fallende Funktion im Intervall $0 \leq k \leq 1$, wobei $f(0) = (p-1)M > 0$, $f(1) = p(M-1) < 0$ gilt, so dass eine einzige Wurzel k_0 im Intervall $(0, 1)$ existiert. Dadurch ist die Behauptung I des Satzes 3 bewiesen.

Um die Behauptung II des Satzes 3 zu beweisen, werden wir voraussetzen, dass $(p-2)M/p < m \leq M$ gilt. Dann gelten angesichts (8) für die Eigenwerte μ_i^p der Matrix \mathbf{B}^p die Ungleichungen $-m^p < \mu_i^p < M^p$, wo $-m^p < [(p-2)/p]^p M^p$ ist. Wir wollen jetzt solche Zahlen $0 < \alpha < 1$, $0 < k < 1$ finden, dass gleichzeitig die Ungleichungen (22), (23), (24) gelten und k minimal ist. Für die Kurven (A), (B), (C) tritt eine der in Abb. 2 dargestellten Situationen zu. Das, durch die Ungleichungen (22), (23), (24) definierte Gebiet ist in Abb. 2 schraffiert. Die minimale Zahl k_0 ist für $(p-2)M/p < m \leq M$ als der Durchschnittspunkt der Kurven (A), (B) festgelegt, d.h. die Zahl k_0 ist eine Wurzel der Gleichung

$$(1 - Mk^{(p-1)/p})/(1 - k) = (1 + mk^{(p-1)/p})/(1 + k);$$

davon bekommt man sofort nach einer Umformung die Gleichung (12). Die linke Seite der Gleichung (12) ist im Intervall $0 \leq k \leq 1$ eine fallende Funktion f von k ; es gilt dabei $f(0) = (M + m) > 0$, $f(1) = 2(M - 1) < 0$, so dass eine einzige Wurzel k_0 im Intervall $(0, 1)$ existiert. Dadurch ist die Behauptung II des Satzes 3 bewiesen.

III

Jetzt werden wir uns mit dem Fall befassen, wenn die Matrix \mathbf{B}^p einen positiven Eigenwert M^p ($M > 0$) besitzt, welcher dem Spektralradius gleich ist, und alle anderen Eigenwerte μ^p in einem gewissen, nach der Reellachse symmetrischen Gebiet ausgebreitet sind. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 4. *Es sei $p \geq 3$, k_0 sei eine einzige, im Intervall $0 < k < 1$ liegende Wurzel der Gleichung*

$$(10) \quad Mk - p^p \sqrt[k]{k} + (p-1)M = 0$$

und sei $\alpha_0 = (p-1)/(p-1+k_0)$. Wir setzen weiter voraus, dass die restliche Eigenwerte $\mu^p = x + iy$ der Matrix \mathbf{B}^p im Inneren oder auf der Gränze der Kurve

$$(25) \quad x(\varphi) = \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[\binom{p}{0} \cos(p-1)\varphi + \binom{p}{1} (p-1) \cos(p-2)\varphi + \dots + \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} \cos \varphi + \binom{p}{p-1} (p-1)^{p-1} + \binom{p}{p} (p-1)^p \cos \varphi \right],$$

$$(26) \quad y(\varphi) = \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[- \binom{p}{0} \sin(p-1)\varphi - \binom{p}{1} (p-1) \sin(p-2)\varphi - \dots - \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} \sin\varphi + \binom{p}{p} (p-1)^p \sin\varphi \right], \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

liegen. Dann gilt $\min_{\alpha} \varrho(\mathbf{V}(\alpha)) = \varrho(\mathbf{V}(\alpha_0)) = k_0$.

Beweis. Es sei $0 < k_0 < 1$ eine Wurzel der Gleichung (10). Aus $\alpha_0 = (p-1)/(p-1+k_0)$ folgt die Beziehung $k_0 = (p-1)(1-\alpha_0)/\alpha_0$. Wenn man jetzt in (15), (16) $\alpha = \alpha_0$, $k = k_0$ legt, bekommt man sofort (25), (26). Es ist also klar, dass die Kurve (25), (26) ein Bild der Kreislinie $|\lambda| = k_0 = (p-1)(1-\alpha_0)/\alpha_0$ bei der Abbildung (14) darstellt. Diese Kurve schneidet die x-Achse, wie bekannt ist, in zwei Punkten, welche den Parametern $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ entsprechen. Für $\varphi = 0$ ist $y(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1} (p-1) + \dots + \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{p}{p-1} (p-1)^{p-1} + \binom{p}{p} (p-1)^p \right] = \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} (1 + p - 1)^p = \\ &= \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1} p^p}{(p-1)^{p-1}}. \end{aligned}$$

Da $\alpha_0 = (p-1)/(p-1+k_0)$ ist, gilt ferner

$$x(0) = k_0 p^p / (p-1+k_0).$$

Da k_0 eine Wurzel der Gleichung (10) ist, gilt $Mk_0 - p^p \sqrt{k_0} + (p-1)M = 0$ oder

$$(27) \quad p^p k_0 = M^p (p-1+k_0)$$

und auch

$$(28) \quad x(0) = M^p (p-1+k_0) / (p-1+k_0) = M^p.$$

Einen ähnlichen Fortgang benutzt man für $\varphi = \pi$. Es gilt $y(\pi) = 0$. Für ungerade p gilt

$$\begin{aligned} x(\pi) &= \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[\binom{p}{0} - \binom{p}{1} (p-1) + \dots - \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{p}{p-1} (p-1)^{p-1} - \binom{p}{p} (p-1)^p \right] = \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} [1 - (p-1)]^p = \\ &= - \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} (p-2)^p. \end{aligned}$$

Für gerade p gilt

$$\begin{aligned} x(\pi) &= \frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \left[-\binom{p}{0} + \binom{p}{1}(p-1) - \dots - \binom{p}{p-2}(p-1)^{p-2} + \right. \\ &+ \left. \binom{p}{p-1}(p-1)^{p-1} - \binom{p}{p}(p-1)^p \right] = -\frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} [1 - (p-1)]^p = \\ &= -\frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} (2-p)^p = -\frac{(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} (p-2)^p. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist also $x(\pi) = -(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1} (p-2)^p / (p-1)^{p-1} < 0$.

Für $\alpha_0 = (p-1)/(p-1+k_0)$ bekommt man jetzt

$$x(\pi) = -k_0(p-2)^p / (p-1+k_0) = -k_0(p-2)^p p^p / (p-1+k_0) p^p.$$

Aus (27) folgt ferner

$$(29) \quad x(\pi) = -[(p-2)/p]^p M^p.$$

Die Kurve (25), (26) schneidet also die x -Achse in den Punkten $-[(p-2)/p]^p M^p$, M^p . Wenn nun alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^p in Inneren oder auf der Kurve (25), (26) liegen (die reelle Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^p liegen also ähnlich wie bei dem Satz 3, Behauptung I, im Intervall $\langle -[(p-2)/p]^p M^p, M^p \rangle$), liegen alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_0)$ im Kreis $|\lambda| \leq k_0$, wodurch der Satz 4 bewiesen ist.

Bemerkung 4. Es wäre an dieser Stelle sinnlos den Fall $p=2$ zu betrachten, da die Gleichung (26) für jedes $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ die Form $y=0$ (für $p=2$ kann man also nur den Fall der reellen Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^2 betrachten).

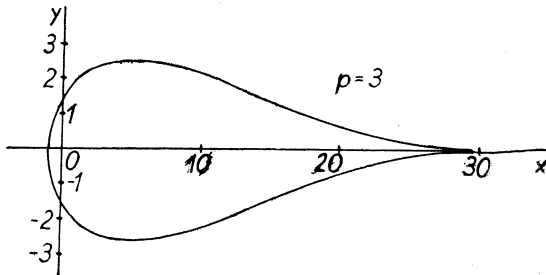


Abb. 3.

Zur Illustration ist die Kurve

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \binom{p}{0} \cos(p-1)\varphi + \binom{p}{1}(p-1) \cos(p-2)\varphi + \dots \\ &\dots + \binom{p}{p-2}(p-1)^{p-2} \cos \varphi + \binom{p}{p-1}(p-1)^{p-1} + \binom{p}{p}(p-1)^p \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$y(\varphi) = -\binom{p}{0} \sin(p-1)\varphi - \binom{p}{1} (p-1) \sin(p-2)\varphi - \dots$$

$$\dots - \binom{p}{p-2} (p-1)^{p-2} \sin\varphi + \binom{p}{p} (p-1)^p \sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

für den Fall $p = 3$ auf der Abb. 3 dargestellt (die Koordinaten $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ für die Punkte der Kurve (25), (26) bekommt man nach Multiplizierung durch Konstante $(1 - \alpha_0) \alpha_0^{p-1} / (p-1)^{p-1}$).

Literaturverzeichnis

- [1] R. S. Varga: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.
 [2] M. Šisler: Über ein mehrparametrisches Iterationsverfahren für p -zyklische lineare Gleichungssysteme. Apl. mat. 28 (1983), 44–54.

Souhrn

O SUPERRELAXAČNÍ METODĚ PRO p -CYKLIČKÉ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

V práci je udán optimální parametr pro superrelaxační metodu pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $p \geq 2$. Uvažuje se jak případ reálných vlastních čísel matice \mathbf{B}^p , tak i případ, kdy v absolutní hodnotě největší vlastní číslo matice \mathbf{B}^p je reálné a ostatní vlastní čísla leží v jisté oblasti symetrické podle reálné osy.

Anschrift des Verfassers: Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.