RECENZE

Hua Loo Keng, Wang Yuan: APPLICATIONS OF NUMBER THEORY TO NUMERICAL ANALYSIS. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York a Science Press, Beijing, 1981, 241 str.

Upravený překlad z čínského originálu, který se nám dostává do ruky, je věnován disciplíně, která vznikla v padesátých letech při hledání efektivních metod pro výpočet vícerozměrných integrálů. Při standardním postupu, kdy vícerozměrná síť je kartézským součinem jednorozměrných sítí, počet potřebných uzlů s dimenzí prostoru prudce roste. Při použití metod Monte Carlo nelze pak vhodně využít hladkosti integrované funkce. Číselně-teoretické metody dávají chyby, které jsou nezávislé na dimenzi prostoru, ale klesají s hladkostí funkce. Náš čtenář je s touto problematikou obeznámen z knihy N. M. Korobova z r. 1963. Obsah knihy čínských autorů, kteří sami k rozvoji zmíněného oboru vydatně přispěli, na tyto idey těsně navazuje.

Kniha má 10 kapitol, z nichž první čtyři jsou věnovány číselně-teoretickým základům další teorie. Probírá se zde klasická teorie algebraických čísel, simultánní Diofantické aproximace a po zavedení základního pojmu rozložení množiny bodů v jednotkové krychli se pro odhady nerovnoměrnosti tohoto rozložení (discrepancy) užívá odhadů trigonometrických součtů, výsledků teorie vícerozměrných kongruencí a pro dolní odhady i racionálních aproximací. Konstrukce různých sítí a odhad jejich diskrepance se provádí v kap. 4.

Kapitola 5. přináší odhad chyb kvadraturních vzorců pro s-rozměrné funkce s variací konečnou, včetně odhadu zdola a přehled kvadarturních vzorců. Typickým příkladem je síť uzlů $(\{a_1k/p\}, \{a_2k/p\}, \ldots, \{a_sk/p\})$, $k = 1, 2, \ldots, p$, p je prvočíslo a $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ vhodný bod, s tím, že integrál je aproximován aritmetickým průměrem hodnot v uzlech. V kapitole 6 jsou studovány vztahy mezi třídami periodických funkcí $H_s(C)$, $Q_s(C)$ a $E_s(C)$ a provádí se periodizace funkcí tak, aby integrál z funkcí jisté třídy byl roven integrálu funkce periodické. Integrace periodických funkcí je obsahem kapitoly 7. Kapitola 8. uvádí odhady pro kvadraturní vzorce a odhady počtu potřebných operací pro výpočet konkrétních typů sítí. Jsou zde též uvedeny některé numerické příklady i srovnání s klasickou Gaussovou kvadraturou. Kapitola 9. je věnována interpolaci funkcí a kapitola 10. řešení integrálních rovnic Fredholmova a Volterrova typu a parciálních diferenciálních rovnic, a to rovnice pro vedení tepla a Laplaceovy rovnice. Dodatek přináší tabulky bodů, z nichž se sítě generují, až do dimenze prostoru 18.

Kniha zahrnuje výsledky dosažené až do začátku sedmdesátých let i některé originální výsledky Výklad je původní, je dobře logicky uspořádán, ale přesto bude studium knihy vyžadovat od čtenáře stálou pozornost. Jde především o netriviální problematiku, kde se předpokládá znalost nejen elementární teorie čísel, ale i některých jejích dalších výsledků a kde je užitečná i jistá zkušenost v numerické matematice. Dále pak je výklad autorů velmi úsporný, většina obsahu jsou složité vzorce a spojovací text je velmi stručný. Každá kapitola má stručné bibliografické poznámky, ale jinak jsou poznámky a komentáře vzácné. Metody, které jsou v knize studovány, jsou slibné a z hlediska potřeb početní praxe by bylo vhodné, aby se někdo u nás touto problematikou zabýval. Recenzovaná kniha k tomu může být dobrým pramenem.

Milan Práger

Josef Král: INTEGRAL OPERATORS IN POTENTIAL THEORY. Lecture Notes in Mathematics 823, Springer-Verlag, Berlin, 1980, stran 171, cena DM 21,50.

Studium okrajových úloh parciálních diferenciálních rovnic, na něž vede řada problémů fyziky, geodézie, biologie, chemie apod., má historii sahající do 18. století. I když byla rozvinuta řada metod řešení již v 19. století, teprve v jeho poslední čtvrtině se objevují první snahy o rigorózní důkazy existenčních vět.

Připomeneme velmi zhruba jeden z důležitých přístupů k řešení těchto úloh, tzv. metodu integrálních rovnic. Řešení úlohy se hledá ve tvaru potenciálu odvozeného od fundamentálního řešení vyšetřované rovnice. Přitom se při řešení Dirichletovy úlohy volí zpravidla potenciál dvojvrstvy a při řešení úloh, v nichž se vyskytuje normální derivace, potenciál jednoduché vrstvy. Pomocí tzv. „vět o skoku“ se úlohy převedou na integrální rovnice pro neznámou hustotu uvažovaného potenciálu; jde o metodu nepřímou, neboť se nejprve hledá pomocná funkce (hustota) a pomocí ní dostaneme hledané řešení ve tvaru příslušného potentiálu.

V obecném povědomí nespecialistů je tato metoda ponejvíce spojována s historií parciálních diferenciálních rovnic nebo s historií funkcionální analýzy. Je užitečné připomenout některé její přednosti. Při jejím užití především krásně vyniká dualita mezi Dirichletovou a Neumanovou úlohou. Dává též integrální reprezentaci řešení, která umožňuje zkoumat jeho další vlastnosti a dává možnost numerického řešení — v posledních letech se objevila řada prací, které ukázaly, že dost rozšířená představa obtíží se singulární rovnicí není zcela oprávněná. Za nevýhodu této metody se pokládá (též neoprávněně) to, že ji lze aplikovat pouze v případě, kdy hranice vyšetřované množiny, pro kterou se úloha řeší, je hladká. Tento názor je poplatný mj. i populárním učebnicím funkcionální analýzy (Riesz - Nagy, 1952), parciálních diferenciálních rovnic (Epstein, 1962) či metod matematické fyziky (např. Courant - Hilbert, 1962).

Kořeny metody integrálních rovnic sahají na konec minulého století a jsou spjaty se jmény C. Neumanna, H. Poincarého, A. M. Ljapunova a I. Fredholma. Ukazuje se, že analytické vlastnosti jádra příslušného integrálního operátoru silně závisí na geometrických vlastnostech hranice vyšetřované oblasti. Zhruba řečeno: čím horší hranice, tím nepříjemnější jádro. Dostatečná hladkost (např. hölderovská normála) vede na případ, kdy integrální operátor (nebo alespoň některá jeho mocnina) je kompaktní. Pro „dostatečně hladké“ hranice je metoda integrálních rovnic velmi podrobně rozpracována a je vyložena ve většině učebnic matematické fyziky. O oblastech s nehladkými hranicemi existovalo do roku 1960 jen relativně málo prací — uveďme některé z významnějších: Neumann 1877, Korn 1902, Zaremba 1904, Carleman 1916, Radon 1919, Magnaradze 1939.

Významných výsledků, v řadě případů definitivních, dosáhl v této problematice J. Král, jehož recenzovaná publikace obsahuje ucelený výklad příslušné teorie. Jsou zde shrnuty výsledky dosažené zhruba v posledních 15 letech (některé nebyly jinde publikovány), týkající se moderního přístupu k řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici. Je zde tak v podstatě završen dlouholetý program, explicitně vyjádřený v knize J. Plemelje: Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911: „. . . eines der wichtigsten Ziele der Modernen Potentialtheorie. . . die Aufstellung möglichst allgemeiner und weitgehender Bedingungen, denen die Berandung eines Gebietes genügen muß, um die Gültigkeit gewisser Lösungsmethoden für die Randwertaufgaben zu sichern die sich für reguläre Berandungen mit Hilfe der linearen Integralgleichungen in einfachster Weise begründen lassen. . .“

Všimněme si blíže obsahu knížky (pro zajímavost označujeme jinde nepublikované výsledky hvězdičkou). Úvodní část seznamuje čtenáře s podstatou metody. V § 1 je podrobně studována slabá normální derivace potenciálů, která je adekvátní náhražkou klasické („bodové“) normální derivace. Výhodou tohoto pojmu je, že je definován pro zcela obecné hranice a má přitom přirozený fyzikální význam. Slabá normální derivace je distribuce obecně nereprezentovatelná nábojem a tak — s ohledem na Neumannovu úlohu — je nutno vyjasnit, za jakých předpokladů, formulovaných pokud možno v geometrických termínech, se dá tato slabá normální derivace ztotožnit s nábojem. Příslušné nutné a postačující podmínky lze vyjádřit pomocí geometrické veličiny $v(x)$ vystihující komplikovanost hranice vyšetřované množiny. Poněkud podrobněji: označíme-li tuto množinu G, je $v(x)$ průměrná hodnota počtu podstatných nárazů na G všech paprsků vycházejících z bodu x. Slabá normální derivace je reprezentovatelná nábojem, právě když je funkce v omezená na hranici množiny G. Na konci tohoto grafu je dokázáno (*), že se lze bez újmy obecnosti zabývat takovými množinami G, které nemají „štěrbiny" či „zářezy".

Potenciály dvojvrstvy jsou studovány v § 2. Opět vzniká problém, neboť pro obecné množiny není klasický potenciál dvojvrstvy definován. Pomocí veličiny v jsou nalezeny v podstatě nejobecnější množiny, pro které lze definovat zobecněný potenciál dvojvrstvy. Tento potenciál má za zmíněných podmínek téměř klasické vyjádření, je nutné normálu chápat jakožto aproximativní normálu ve Federerově smyslu a integrovat přes tzv. redukovanou hranici. Je zde též dokázána příslušná věta o skoku, z níž je pro ilustraci originálním a elegantním způsobem odvozen Poissonův integrál. Je zde zaveden operátor W, jehož duální operátor splývá s operátorem normální derivace a jsou vyšetřeny jeho vlastnosti. Též je odvozen vzoreček pro normu operátoru $W - aI$ a je dokázána Plemeljova věta (*).

V § 3 nalezne čtenář výsledky o kontraktivitě Neumannova operátoru, opět v definitivní formě; některé se zde objevují poprvé. Tato partie má úzkou souvislost s přibližnými metodami pro rovnice matematické fyziky a byla částečně motivována nedávnými výsledky Kleinmana a Wendlanda.

Další paragraf je věnován vyšetření aplikability Fredholmovy metody na řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy. Je nalezena optimální vzdálenost vyšetřovaných operátorů od podprostoru operátorů kompaktních, jsou studovány jejich spektrální vlastnosti a je zde dokázáno i tvrzení o jisté regularitě řešení homogenní rovnice.

V § 5 je originálním způsobem (*) dokázáno, že aplikabilita Fredholmovy metody má za následek konečnost počtu komponent vyšetřované množiny. Tento paragraf též obsahuje závažná tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení okrajových úloh plynoucí z předchozího zkoumání.

Závěrečná část obsahuje komentář, poznámky a podrobně dokumentované citace. Celá knížka je psána velmi srozumitelně, i když u čtentáře předpokládá jistou zběhlost v zacházení s aparátem teorie míry, distribucemi, Riesz-Schauderovou teorií apod. Vyložené výsledky našly již použití i při vyšetřování okrajových úloh pro analytické funkce, při vyšetřování úhlových limit potenciálů i integrálů Cauchyova typu, při studiu rovnice pro vedení tepla a obecných rovnic s proměnnými koeficienty apod.

Ivan Netuka, Jiří Veselý

Josef Matušů: ORTOGONÁLNÍ SYSTÉMY. (Matematika pro vysoké školy technické, seš. XXVII.) SNTL Praha 1982, 91 stran, 7.— Kčs.

Obsah sešitu je rozdělen do 3 kapitol. V prvé autor na 38 stranách uvádí základní pojmy a věty z teorie prostorů funkcí a lineární funkcionální analýzy. Čtenář se zde seznámí i s pojmem konvoluce funkcí a pěkným úvodem do Mikusińského operátorového počtu, který příliš nesouvisí s rozvíjeným hlavním tématem sešitu.

Druhá kapitola v rozsahu 19 stran je věnována některým fundamentálním výsledkům z teorie abstraktních Hilbertových prostorů, zejména ortogonálním a ortonormálním systémům. V třetí kapitole (22 stran) jsou výsledky předcházející kapitoly konkretizovány v prostorech funkcí, zvláště v prostoru L_2. Jsou zde mj. zavedeny systémy trigonometrický, Fourierův, Haarův, Rademacherův, Walshův a systémy ortogonálních polynomů. O různých kriteriích konvergence pro Fourierovy trigonometrické řady, které pravděpodobně čtenáři tanou na mysli především jako nejtypičtější příklad ortogonálních řad, se nedozvíme prakticky nic, neboť této látce má být věnován zvláštní sešit knižnice MVŠT.

Sešit je bezesporu psán s velkým porozuměním pro jasnost výkladu. Výklad je však značně abstraktní a nevím, zda tato skutečnost nebude při čtení zdrojem potíží většině absolventů vysokých škol technických. Jistě však po ní s chutí sáhne leckterý posluchač i absolvent matematicko-fyzikálních či přírodovědeckých fakult.

Otto Vejvoda