Aplikace matematiky

Reiner Vanselow

Erweiterung des G-Stabilitätsbegriffes auf die Klasse der linearen Mehrschrittblockverfahren.

Aplikace matematiky, Vol. 28 (1983), No. 1, 9–20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103998`

ERWEITERUNG DES G-STABILITÄTSBEGRIFFES AUF DIE KLASSE DER LINEAREN MEHRSCHRITTBLOCKVERFAHREN

REINER VANSELOW

(Eingegangen am 21, März 1980)

1. EINLEITUNG

Wir betrachten im folgenden die Stabilitätseigenschaften gewisser numerischer Verfahren zur Behandlung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher DGL-Systeme der Form

$$(1.1) \qquad y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0 \in R^m,$$

mit $f : [0, T] \times R^m \to R^m$.

Ausgangspunkt ist zunächst die von Dahlquist eingeführte A-Stabilität (s. [1]). Sie liefert Aussagen über das Verhalten der Näherungslösung eines Verfahrens bei dessen Anwendung auf lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten.

In den letzten Jahren wurden Anstrengungen unternommen, durch gewisse Stabilitätsforderungen an das Verfahren auch Aussagen über das Verhalten der Näherungslösung für nichtlineare DGL-Systeme zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit wurde dazu von dem von Dahlquist eingeführten G-Stabilitätsbegriff für lineare Mehrschrittverfahren und One-leg Verfahren (s. [2] und [3]) ausgegangen. Ist nämlich ein One-leg Verfahren G-stabil, so kann man für allgemeine nichtlineare autonome DGL-Systeme, deren rechte Seite f mit einem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im R^m und der zugehörigen Norm $\|\cdot\|$ der Forderung

$$(1.2) \qquad \exists \mu \in R^1 : \langle u - v, f(u) - f(v) \rangle \leqq \mu \|u - v\|^2 \quad \text{für alle} \quad u, v \in R^m$$

genügt, ein günstiges Fehlerverhalten der Näherungen nachweisen. Dahlquist konnte unter sehr schwachen Voraussetzungen die Äquivalenz von A- und G-Stabilität für lineare Mehrschrittverfahren und One-leg Verfahren zeigen (s. [2]–[5], [10]).

Allerdings besitzen A-stabile lineare Mehrschrittverfahren und One-leg Verfahren höchstens die Konsistenzordnung 2. Dieser Nachteil wurde durch eine Verallgemeinerung der linearen Mehrschrittverfahren, die zu den linearen Mehrschrittblockverfahren führt, beseitigt, denn in dieser Klasse existieren A-stabile Verfahren mit einer beliebig hohen Konsistenzordnung (s. [6]–[9]). Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den G-Stabilitätsbegriff sinnvoll zu erweitern, um ihn auf eine spezielle Klasse von linearen Mehrschrittblockverfahren anwenden zu können, und Aussagen zur erweiterten G-Stabilität zu erhalten.

2. $\tilde{G}$-STABILITÄT BEI SPEZIELLEN LINEAREN MEHRSCHRITTBLOCKVERFAHREN

In diesem Abschnitt soll die $\tilde{G}$-Stabilität als Erweiterung der G-Stabilität definiert werden. Dazu ist es zunächst notwendig, kurz auf die Beschreibung von linearen Mehrschrittverfahren, One-leg Verfahren und linearen Mehrschrittblockverfahren sowie die G-Stabilität einzugehen.

Gegeben sein eine natürliche Zahl $k > 0$ und reelle Zahlen $\alpha_i, \beta_i, i = 0(1)\,k$, derart, daß die Polynome

$$\varrho(x) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i \quad \sigma(x) := \sum_{i=0}^{k} \beta_i x^i \tag{2.1}$$

teilerfremd sind. Zusätzlich gelte $\alpha_k \neq 0$ und $\sigma(1) \neq 0$. Ein lineares Mehrschrittverfahren (kurz 1MSV) läßt sich nun durch

$$\varrho(E)\, y_n := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(t_{n+i}, y_{n+i}) =: h\, \sigma(E) f_n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

das dazugehörige One-leg Verfahren durch

$$\begin{aligned} \varrho(E)\, y_n &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\, \sigma(1) f\left(\frac{1}{\sigma(1)} \sum_{i=0}^{k} \beta_i t_{n+i}, \frac{1}{\sigma(1)} \sum_{i=0}^{k} \beta_i y_{n+i}\right) = \\ &= h\, \sigma(1) f\left(\frac{1}{\sigma(1)}\, \sigma(E)\, t_n, \frac{1}{\sigma(1)}\, \sigma(E)\, y_n\right) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

beschreiben, wobei jeweils k Startwerte $y_0, \ldots, y_{k-1}$ gegeben sein müssen und $f_n := f(t_n, y_n)$ gesetzt wird.

Bemerkungen. In der hier angedeuteten Vorgehensweise zur Definition von 1MSV und One-leg Verfahren wurde von den Polynomen ϱ und σ ausgegangen. Dieses Herangehen wurde auf Grund der Bedeutung dieser Polynome für die G-Stabilität gewählt. Im allgemeinen wird bei der Definition der One-leg Verfahren von 1MSV ausgegangen, die Polynome $\varrho(x)$ und $\sigma(x)$ treten dort nur als Zwischenstufe auf. Bei dieser Vorgehensweise erweisen sich auch die an ϱ und σ gestellten Forderungen als natürlich.

Die Verfahren werden bei fester Schrittweite h jeweils eindeutig durch die Polynome $\varrho(x)$ und $\sigma(x)$ beschrieben. Sie werden deshalb auch als 1MSV (ϱ, σ) bzw. als One-leg Verfahren (ϱ, σ) bezeichnet.

Zur Vereinfachung der Schreibweise bei der Definition der zu betrachtenden Klasse der linearen Mehrschrittblockverfahren gelte für die Dimension des Problems in (1.1) $m = 1$.

Vorgegeben seien eine natürliche Zahl $k > 0$, die Blocklänge, und ein Parameter $s \in N$ mit $1 \leqq s \leqq k$. Gegeben seien weiterhin eine reelle $k \times k$-Matrix C und ein reeller k-dimensionaler Vektor d so, daß das lMSV, das durch eine beliebige Zeile in (2.4) definiert wird, die Konsistenzordnung k besitzt.

Der Algorithmus eines solchen Verfahrens läßt sich durch

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_n \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + hC \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ \vdots \\ f_{n+k} \end{bmatrix} + hf_n \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad n = 0, s, \ldots \tag{2.4}$$

beschreiben, wobei ein Startwert y_0 gegeben sei.

Wir sprechen im folgenden von einem linearen Mehrschrittblockverfahren (2.4) (kurz lMSBV (2.4)), wenn ein Verfahren der Gestalt (2.4) vorliegt und die oben an C und d gestellten Forderungen erfüllt sind.

Bemerkungen. Mit dem angegebenen Verfahren (2.4) werden jeweils aus einem Näherungswert y_n im Gitterpunkt t_n k neue Näherungswerte $y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ in den dazugehörigen Gitterpunkten $t_{n+1}, \ldots, t_{n+k}$ bestimmt. Der Parameter s ist ein Steuerparameter. Ist $s < k$, so werden die $(k - s)$ bereits berechneten Werte $y_{n+s+1}, \ldots, y_{n+k}$ nicht als Näherungen verwendet, stattdessen wird (2.4) mit y_{n+s} erneuert gestartet.

Verallgemeinerungen dieser Klasse von Verfahren sind z. B. in [6]–[9] beschrieben worden. Für $k = 1$ erhält man eine Teilklasse der bereits bekannten lMSV, nämlich die konsistenten Einschrittverfahren.

Der G-Stabilitätsbegriff für lMSV und One-leg Verfahren wird mit Hilfe der charakteristischen Polynome ϱ und σ eingeführt (s. (2.6)). Es ist deshalb für die angestrebte Erweiterung sinnvoll, zunächst einem lMSBV auf analoge Weise charakteristische Polynome zuzuordnen. Diese Begründung ist zwar nur formal, die Definition der Erweiterung der G-Stabilität über diese Polynome und die Aussage zur erweiterten G-Stabilität bestätigen dann allerdings dieses Vorgehen. Da jede Zeile des Verfahrens als lMSV aufgefaßt werden kann, geschieht die Zuordnung zeilenweise mit entsprechenden Polynomen $\varrho_i(x)$ und $\sigma_i(x)$, $i = 1(1)\,k$, durch

$$\begin{aligned} \varrho_i(x) &:= x^i - 1 \\ \sigma_i(x) &:= d_i + \sum_{j=0}^{k} c_{ij} x^j \quad \text{für} \quad i = 1(1)\,k\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

und das Verfahren ist bei fester Schrittweite h und vorgegebenem Parameter s eindeutig durch diese Polynome beschrieben.

Die definierte Verfahrensklasse ist für jedes k bei beliebigem Parameter s nicht leer, die Mannigfaltigkeit der Verfahren für ein festes k ist gerade der R^k. Ferner gibt es für jedes k mindestens ein A-stabiles Verfahren, so daß also in der betrachteten Klasse A-stabile Verfahren beliebig hoher Konsistenzordnung existieren (s. [6] – [11]).

Sei nun $X_j := (x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1})^\mathrm{T}$ mit reellen Zahlen x_i, $i = j(1)\, j + k - 1$.

Das 1MSV (ϱ, σ) und das One-leg Verfahren (ϱ, σ) heißen G-stabil, wenn es eine reell symmetrische, positiv definite $k \times k$-Matrix G gibt, so daß für alle reellen $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$ gilt

$$X_1^\mathrm{T} G X_1 - X_0^\mathrm{T} G X_0 \leqq 2\sigma(E)\, x_0\, \varrho(E)\, x_0 \tag{2.6}$$

Die praktische Bedeutung der G-Stabilität liegt vor allem auf dem Gebiet der globalen Fehlerabschätzung und der Untersuchung der Fehlerfortpflanzung.

Zwei Eigenschaften sind hervorzuheben, die den Augangspunkt für die Erweiterung bilden sollen und deren Übertragung angestrebt wird:

(i) Mit $\sigma(E)\, x_0\, \varrho(E)\, x_0$ ist in (2.6) ein Ausdruck gegeben, der sich bei der praktischen Anwendung auf Grund der Eigenschaft (1.2) der Funktion f und der Verfahrensvorschrift (2.3) des One-leg Verfahrens in jedem Schritt nach oben abschätzen läßt.

(ii) Mit $X_i^\mathrm{T} G X_i$ ist, da G positiv definit ist, eine Norm des k-dimensionalen Vektors X_i gegeben. Bei der praktischen Anwendung stellt X_i den Startvektor einer rekursiven Vorschrift im i-ten Schrift dar. Damit läßt sich, da wegen (i) die rechte Seite von (2.6) nach oben abgeschätzt werden kann, die Differenz der Normen der Startwerte zwischen $(i + 1)$-tem und i-tem Schritt abschätzen. Da es sich um Startvektoren handelt, ist ein sukzessives Abschätzen möglich.

Definition. *Das* 1MSBV (2.4) *mit der Blocklänge k und dem Parameter s mit $1 \leqq s \leqq k$ heißt $\tilde{G}$-stabil, wenn es nichtnegative Zahlen $a_i \in R^1$, $i = 1(1)\, k$, gibt, so daß für alle reellen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ gilt*

$$x_s^2 - x_0^2 \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i\, \sigma_i(E)\, x_0\, \varrho_i(E)\, x_0\,. \tag{2.7}$$

Bemerkungen. Mit der $\tilde{G}$-Stabilität bleiben die zwei angegebenen Eigenschaften der G-Stabilität erhalten. Damit sind beim Übergang vom 1MSBV zum One-leg Blockverfahren analoge Aussagen für die Fehlerfortpflanzung und die globale Fehlerabschätzung wie bei G-stabilen One-leg Verfahren zu erhalten.

Für den Fall $k = 1$ und damit notwendigerweise $s = 1$ fällt die $\tilde{G}$-Stabilität mit der G-Stabilität zusammen. Da der G-Stabilitätsbegriff aber nur für 1MSV und One-leg Verfahren definiert ist, kann die $\tilde{G}$-Stabilität nur für $k = 1$ mit der G-Stabilität verglichen werden. Damit stellt die $\tilde{G}$-Stabilität eine Erweiterung der G-Stabilität dar.

Die Untersuchung zur $\tilde{G}$-Stabilität basieren auf zwei bekannten Aussagen über 1MSBV.

Satz 1. *Jedes* 1MSV, *das durch eine Zeile des Verfahrens* (2.4) *mit vorgegebener Matrix* $C = (c_{ij})$ *und vorgegebenem Vektor* $d = (d_i)$ *definiert werden kann, besitzt die Konsistenzordnung* k *genau dann, wenn* C *und* d *die nachfolgenden Bedingungen erfüllen:*

$$(3.1)\qquad i = d_i + \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \quad \text{für} \quad i = 1(1)\,k$$

$$i^l = l \sum_{j=1}^{k} c_{ij} j^{l-1} \quad \text{für} \quad i = 1(1)\,k \quad \text{und} \quad l = 2(1)\,k.$$

Beweis. s. [7].

Satz 2. *Es sei* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)^{\mathrm{T}} \in R^k$ *mit reellen Zahlen* w_i, $i = 1\,(1)k$. *Jede Matrix* C *eines* 1MSBV (2.4) *kann durch entsprechende Wahl eines Vektors* w *in folgender Weise ermittelt werden:* C *ergibt sich als Summe der Matrixen* $C^0 = (c_{ij}^0)$ *und* $C^w = (c_{ij}^w)$ *mit*

$$(3.2)\qquad c_{ij}^0 = \frac{1}{g'(j)} \int_0^i \frac{g(s)}{s-j}\, \mathrm{d}s$$

$$c_{ij}^w = \frac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-j)!}\, w_i \quad \text{für} \quad i, 1(1)\,k$$

Dabei ist die Funktion g *durch* $g(s) = s(s-1)\ldots(s-k)$ *gegeben.*

Beweis. s. [11].

Nun zur $\tilde{G}$-Stabilität.

Satz 3. *Notwendig für die* $\tilde{G}$*-Stabilität eines* 1MSBV (2.4) *ist die Bedingung* $a_i = 0$, $i = 1(1)k$ *mit* $i \neq s$.

Beweis. Sei $i \in N$ mit $1 \leqq i \leqq k$ und $i \neq s$ beliebig gegeben. Die Werte x_j, $j = 0(1)\,k$, werden wie folgt gewählt:

$$(\mathrm{A})\qquad x_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j \neq i \\ \text{beliebig} & \text{für } j = i. \end{cases}$$

(Da (2.7) für beliebige x_j gelten soll, ist eine Wahl entsprechend (A) möglich.)

Wegen $i \geqq 1$ und $i \neq s$ folgt insbesondere $x_s = x_0 = 1$ und auf Grund der speziellen Gestalt der Polynome $\varrho_j(x)$ auch $\varrho_j(E)\,x_0 = 0$ für $j \neq i$ und $\varrho_i(E)\,x_0 = x_i - 1$. Damit geht (2.7) über in die notwendige Bedingung

$$(\mathrm{B})\qquad 0 \leqq a_i(x_i - 1)\,\sigma_i(E)\,x_0\,,$$

wobei in $\sigma_i(E)\,x_0$ die x_j nach (A) zu wählen sind. Aus (2.5) erhält man somit

$$\text{(C)} \qquad \sigma_i(E)\,x_0 = c_{ii}x_i + \Big(d_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} c_{ij}\Big)$$

Damit ergibt sich aus (B) und (C)

$$0 \leqq a_i(x_i - 1)\Big(c_{ii}x_i + \Big(d_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} c_{ij}\Big)\Big) =: a_i\, p_i(x_i)\,,$$

wobei diese Beziehung für alle reellen Zahlen x_i gelten muß.

1. Fall. $c_{ii} = 0$. Dann ist $p_i(x_i)$ eine lineare Funktion in x_i. Die Abschätzung gilt damit für alle reellen Zahlen x_i genau dann, wenn $a_i = 0$ ist.

2. Fall. $c_{ii} \neq 0$. Nun ist $p_i(x_i)$ eine reelle quadratische Funktion in x_i, von der bereits eine reelle Nullstelle, nämlich $x_i = 1$, bekannt ist. Damit gilt die Abschätzung für alle reellen Zahlen x_i genau dann, wenn $a_i = 0$ oder wenn $c_{ii} > 0$ und $x_i = 1$ doppelte Nullstelle von $p_i(x_i)$ ist.

Für den zweiten Faktor von $p_i(x_i)$ ergibt sich nach (3.1) an der Stelle $x_i = 1$ aber

$$c_{ii} + \Big(d_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} c_{ij}\Big) = d_i + \sum_{j=1}^{k} c_{ij} = i\,,$$

so daß $x_i = 1$ keine doppelte Nullstelle sein kann, folglich also $a_i = 0$ gelten muß.

Somit ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. – Die Aussage zur $\tilde{G}$-Stabilität für $k \geqq 3$ wird negativ sein (s. Satz 5). Es wäre jedoch denkbar, daß durch Abschwächung der Konsistenzforderungen die $\tilde{G}$-Stabilität erzwungen werden kann. Diese Blickrichtung soll im Auge behalten und deshalb der Satz 3 verallgemeinert werden (Der Beweis des Satzes 3 benutzt nur die spezielle Gestalt der Polynome $\varrho_i(x)$ und $\sigma_i(x)$ und die Bedingung

$$i = d_i + \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\,,$$

der Satz gilt damit allgemeiner):

Folgerung 1. *Es sei ein beliebiges Verfahren der Gestalt* (2.4) *gegeben. Zusätzlich besitze jedes* 1MSV, *das durch eine Zeile in* (2.4) *definiert wird, ausgenommen die s-te Zeile, die Konsistenzordnung* 1. *Dann gilt bereits für dieses Verfahren die Aussage des Satzes* 3.

Damit ist also gezeigt, daß für die $\tilde{G}$-Stabilität der betrachteten 1MSBV (2.4) $a_i = 0$, $i = 1(1)\,k$ mit $i \neq s$, gelten muß und somit (2.7) für diese Verfahren übergeht in

$$\text{(3.3)} \qquad x_s^2 - x_0^2 \leqq a_s\, \sigma_s(E)\, x_0\, \varrho_s(E)\, x_0$$

Satz 4. *Notwendig für die* $\tilde{G}$-*Stabilität eines* 1MSBV (2.4) *ist die Bedingung* $c_{sj} \neq 0$, $j = 1(1)\,k$ *mit* $j \neq s$.

Beweis. Der Beweis geht von der aus Satz 3 hergeleiteten notwendigen Bedingung (3.3) für die $\tilde{G}$-Stabilität aus. Mit der speziellen Gestalt der Polynome $\varrho_i(x)$ aus (2.5) folgt zunächst $\varrho_s(E)\,x_0 = x_s - x_0$, d.h. $\varrho_s(E)\,x_0$ ist unabhängig von allen x_i mit $i \neq 0$ und $i \neq s$

Angenommen, es gebe ein $j \neq s$ mit $1 \leqq j \leqq k$ und $c_{sj} \neq 0$. Aus der speziellen Gestalt der Polynome $\sigma_i(x)$ nach (2.5) folgt

$$\sigma_s(E)\,x_0 = \mathrm{d}_s x_0 + \sum_{j=1}^{k} c_{sj} x_j\,,$$

d.h. die Größe x_j kommt in $\sigma_s(E)\,x_0$ linear vor, ihr Koeffizient ist $c_{sj} \neq 0$. Werden nun alle Größen x_i, $i = 0(1)\,k$ mit $i \neq j$, konstant gehalten und der Grenzübergang $x_j \to +\infty$ bzw. $x_j \to -\infty$ betrachtet, so folgt sofort ein Widerspruch zum Erfülltsein von (3.3) für alle reellen $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt, die Behauptung des Satzes bewiesen.

Bemerkung. In den Beweis des Satzes 4 fließt nur die spezielle Gestalt der Polynome ϱ_s und σ_s ein, er gilt also allgemeiner:

Folgerung 2. *Es sei ein beliebiges Verfahren der Gestalt* (2.4) *gegeben. Zusätzlich besitze jedes* 1MSV, *das durch eine Zeile in* (2.4) *definiert wird, ausgenommen die s-te Zeile, die Konsistenzordnung* 1. *Dann gilt bereits für dieses Verfahren die Aussage des Satzes* 3 *und damit auch die des Satzes* 4.

Nach Satz 4 hat nun die s-te Zeile eines 1MSBV (2.4), das $\tilde{G}$-stabil ist, notwendigerweise die Gestalt

(3.4) $$y_{n+s} = y_n + h(c_{ss} f_{n+s} + d_s f_n)\,,$$

so daß y_{n+s} unabhängig von $y_{n+1}, \ldots, y_{n+s-1}, y_{n+s+1}, \ldots, y_{n+k}$ zu berechnen ist. Da y_{n+s} als Startwert für den nächsten Schritt gewählt wird, ist für den weiteren Verlauf der Rechnung mit dem 1MSBV (2.4) nur die Abarbeitung der s-ten Zeile, also (3.4), interessant. Alle anderen Zeilen des Verfahrens liefern Funktionswerte, die nicht als Startwerte benötigt werden $(y_{n+1}, \ldots, y_{n+s-1})$ oder die im weiteren nicht beachtet werden $(y_{n+s+1}, \ldots, y_{n+k})$.

Mit einem neuen Parameter $\hat{h}$, der sich durch $\hat{h} := sh$ ergibt, entspricht die Verfahrensvorschrift (3.4) damit einem 1MSV und die $\tilde{G}$-Stabilität des 1MSBV (2.4) gerade der G-Stabilität des 1MSV, das durch die s-te Zeilen von (2.4) definiert wird.

Insgesamt bedeutet das folgendes:
Es seien k und s vorgegeben und ein $\tilde{G}$-stabiles 1MSBV (2.4) gesucht. Notwendig und hinreichend für die $\tilde{G}$-Stabilität dieses Verfahrens ist die Gestalt (3.4) der s-ten Zeile und die G-Stabilität des 1MSV, das durch die s-te Zeile definiert wird. D.h. aber, daß die Berechnung des jeweiligen Wertes y_{n+s}, der Startwert des nächsten Schrittes ist, mit einem G-stabilen 1MSV der Gestalt (3.4), also direkt aus y_n, erfolgt. In der Berechnung der Werte $y_{n+1}, \ldots, y_{n+s-1}, y_{n+s+1}, \ldots, y_{n+k}$ besitzt das $\tilde{G}$-stabile

1MSBV (2.4) gewisse Freiheitsgrade, diese berechneten Werte fließen aber wegen (3.4) nicht in die weitere Rechnung ein. Man kann also sagen, daß es in der Klasse der 1MSBV (2.4) gegenüber den G-stabilen 1MSV keine wesentlich neuen Verfahren gibt, die $\tilde{G}$-stabil sind.

Mit der in Folgerung 2 angegeben Verfahrensklasse gelten die gleichen Überlegungen.

Satz 5. *Seien die Blocklänge k mit $k \geqq 3$ und der Parameter s mit $1 \leqq s \leqq k$ vorgegeben. Dann existiert kein* 1MSBV (2.4), *das $\tilde{G}$-stabil ist.*

Beweis. Der Beweis basiert auf den Aussagen der Sätze 3 und 4 sowie den danach angestellten Betrachtungen. Es wurde festgestellt, daß die $\tilde{G}$-Stabilität eines 1MSBV (2.4) gerade der G-Stabilität desjenigen 1MSV entspricht, das durch die s-te Zeile von (2.4) definiert wird. Dieses 1MSV ist nun wegen Satz 4 und damit (3.4) ein Einschrittverfahren, dessen Konsistenzordnung folglich nicht größer als 2 sein kann. Das steht aber im Widerspruch zur Konstruktion der 1MSBV (2.4), woraus die Behauptung des Satzes folgt.

Mit der Bemerkung zur A-Stabilität von 1MSBV (2.4) in der Einleitung ergibt sich damit

Folgerung 3. *In der Klasse der* 1MSBV (2.4) *besteht keine Äquivalenz zwischen A- und $\tilde{G}$-Stabilität.*

Der Beweisgedanke des Satzes 5 beruht darauf, daß für Einschrittverfahren die Konsistenzordnung nicht größer als 2 sein kann. Mit der Folgerung 2 ergibt sich damit

Folgerung 4. *Seien die Blocklänge k und der Parameter s mit $1 \leqq s \leqq k$ vorgegeben. Weiter sei ein beliebiges Verfahren der Gestalt* (2.4) *gegeben, wobei zusätzlich jedes* 1MSV, *was durch eine Zeile in* (2.4) *definiert wird, die Konsistenzordnung* 1 *besitze. Das* 1MSV, *das durch die s-te Zeile definiert wird, habe sogar die Konsistenzordnung* $p \geqq 3$. *Dann existiert in dieser Klasse von Verfahren kein $\tilde{G}$-stabiles.*

Nach Satz 5 und der Bemerkung zur Definition der $\tilde{G}$-Stabilität ist nun nur noch die $\tilde{G}$-Stabilität für 1 MSBV (2.4) mit $k = 2$ interessant. Sei deshalb im folgenden die Blocklänge $k = 2$ gewählt. Aus Satz 1 und Satz 2 folgt unmittelbar die allgemeine Gestalt

$$(3.5)\quad \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} (\frac{2}{3} + w_1) & (-\frac{1}{12} - \frac{1}{2}w_1) \\ (\frac{4}{3} + w_2) & (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}w_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix} + hf_n \begin{bmatrix} \frac{5}{12} - \frac{1}{2}w_1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}w_2 \end{bmatrix},$$

wobei $w_1, w_2 \in R^1$ frei wählbare Parameter sind. Genau dann, wenn $w_1 = 0$ bzw. $w_2 = 0$ ist, besitzt das 1MSV, das durch die erste bzw. zweite Gleichung definiert wird, sogar die Konsistenzordnung 3.

Satz 6. *Gegeben sei die Blocklänge $k = 2$.*

(i) *Sei* $s = 1$. *Das allgemeine* 1MSBV (3.5) *ist* $\tilde{G}$*-stabil genau dann, wenn* $w_1 = -\frac{1}{6}$ *ist. Der Wert* w_2 *ist beliebig, d.h. die Mannigfaltigkeit der für* $k = 2$, $s = 1$ $\tilde{G}$*-stabilen* 1MSBV *ist der* R^1.

(ii) *Sei* $s = 2$. *Das allgemeine* 1MSBV (3.5) *ist* $\tilde{G}$*-stabil genau dann, wenn* $w_2 = -\frac{4}{3}$ *ist. Der Wert* w_1 *ist beliebig, d.h. die Mannigfaltigkeit der für* $k = 2$, $s = 2$ $\tilde{G}$*-stabilen* 1MSBV *ist der* R^1.

Beweis. Der Beweis des Satzes beruht auf den Aussagen der Sätze 3 und 4.

Zu (i): Aus Satz 4 folgt unmittelbar als notwendige Bedingung $w_1 = -\frac{1}{6}$. Damit erhält man für die erste Zeile des Verfahrens

$$y_{n+1} = y_n + h/2(f_{n+1} + f_n)$$

Es gibt also $\varrho_1(x) = x - 1$ und $\sigma_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Damit folgt in (2.7)

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_0^2 &\leqq a_1(x_1 - x_0)\left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_0\right) \\ &= a_1/2(x_1^2 - x_0^2) \end{aligned}$$

und das Verfahren ist $\tilde{G}$-stabil, wie leicht durch die Wahl von $a_1 = 2$ gezeigt werden kann.

Zu (ii): Analog folgt hier $w_2 = -4/3$, $y_{n+2} = y_n + h(f_{n+2} + f_n)$ als zweite Zeile des Verfahrens und $\varrho_1(x) = -1 + x^2$ sowie $\sigma_1(x) = 1 + x^2$.
Mit $a_2 = 1$ folgt hier die $\tilde{G}$-Stabilität des Verfahrens.

Da jeweils die Parameter w_2 in (i) bzw. w_1 in (ii) beliebig gewählt werden können, folgt die Behauptung des Satzes.

4. SUCHE NACH EINER DER G-STABILITÄT ÄHNLICHEN ABSCHÄTZUNG

Bei der $\tilde{G}$-Stabilität von 1MSV und One-leg Verfahren spielen die Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \quad \text{und} \quad y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right)$$

eine besondere Rolle, da sie als einzige Einschrittverfahren in der Klasse der 1MSV und One-leg Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzen und sogar G-stabil sind. Die besondere Rolle dieser Verfahren kommt auch im Satz 6 zum Audruck (s. Beweis). Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegung sei folgender Gedankengang:

Aus einem G-stabilen Einschrittverfahren der Konsistenzordnung 2 läßt sich durch Hintereinanderausführung ein Blockverfahren konstruieren, in dem jede Zeile die Konsistenzordnung 2 besitzt. Offen sind dabei die folgenden Fragen:

A) Ist das so entstandene Verfahren in der Tat ein 1MSBV (2.4) bzw. ein aus einem 1MSBV (2.4) hervorgegangenes One-leg Blockverfahren?

B) Ist dieses Verfahren für $s = 2$ $\tilde{G}$-stabil?

C) Lassen sich auch bei nichtvorhandener $\tilde{G}$-Stabilität zu (2.7) ähnliche Abschätzungen angeben?

D) Wenn ja, welche praktische Bedeutung haben diese Abschätzungen?

Betrachten wir zunächst das 1MSV

$$y_{n+1} = y_n + h/2(f_{n+1} + f_n)\,. \tag{4.1}$$

Man erhält daraus für den nächsten Schritt

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h/2(f_{n+2} + f_{n+1}) = y_n + h/2(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)\,,$$

d. h. aber, die zweimalige Anwendung von (4.1) liefert die gleichen Werte wie das Blockverfahren

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix} + hf_n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

(4.2) ist ein 1MSBV (2.4), wie sich leicht aus (3.5) mit $w_1 = -\frac{1}{6}$ und $w_2 = -\frac{1}{3}$ ergibt, es ist aber nach Satz 6 für $s = 2$ nicht $\tilde{G}$-stabil.

Nun gilt auf Grund der G-Stabilität des Veıfahrens (4.1)

$$y_{n+1}^2 - y_n^2 \leqq 2\sigma(E)\, y_n\, \varrho(E)\, y_n\,, \tag{4.3}$$

woraus für das Verfahren (4.2) folgt

$$y_{n+2}^2 - y_n^2 \leqq 2(\sigma_1(E)\, y_n\, \varrho_1(E)\, y_n + \sigma_1(E)\, y_{n+1}\, \varrho_1(E)\, y_{n+1})\,. \tag{4.4}$$

Eine Abschätzung der rechten Seite nach oben durch Null mit Hilfe von (1.2) läßt sich hier nicht gewinnen, da die Zeilen von (4.2) jeweils 1MSV, aber keine One-leg Verfahren, sind. In praktischen Fällen kann die rechte Seite durchaus auch größer als Null sein, wie sich leicht mit einem Beispiel zeigen läßt. Nun betrachten wir das entsprechende One-leg Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right). \tag{4.5}$$

Man erhält hier für den nächsten Schritt

$$y_{n+2} = y_{n+1} + hf\left(\frac{y_{n+2} + y_{n+1}}{2}\right) =$$

$$= y_n + h\left(f\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) + f\left(\frac{y_{n+2} + y_{n+1}}{2}\right)\right),$$

d. h. aber, die zweimalige Anwendung von (4.5) liefert die gleichen Werte wie das Blockverfahren

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) \\ y_{n+2} &= y_n + h\left(f\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) + f\left(\frac{y_{n+2} + y_{n+1}}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Hier ist damit zwar eine Abschätzung möglich, die auf der Hintereinanderausführung des One-leg Verfahrens beruht, da aber im allgemeinen

$$f\left(\frac{y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n}{2}\right) \neq f\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) + f\left(\frac{y_{n+2} + y_{n+1}}{2}\right)$$

gilt, liegt das Verfahren (4.6) nicht in der betrachteten Verfahrenklasse der aus den 1MSBV (2.4) hervorgegangenen One-leg Blockverfahren.

Insgesamt ergibt sich damit in der Klasse der 1MSBV (2.4) bzw. der aus ihr hervorgegangenen One-leg Blockverfahren auf diesem Wege keine Aussage über das Fehlerverhalten der Näherung oder das Verhalten des globalen Fehlers.

Literatur

[1] *G. G. Dahlquist:* A special stability problem for linear multistep methods. BIT 3 (1963), 27—43.

[2] *G. G. Dahlquist:* On stability and error analysis for stiff non-linear problems, Part I. Report TRITA-NA-7508, 1975.

[3] *G. G. Dahlquist:* Error analysis for a class of methods for stiff non-linear initial value problems. Pro. Conf. Numerical Analysis, Dundee 1975, Springer Lecture Notes in Mathematics, 506 (1975), 60—74.

[4] *G. G. Dahlquist:* On the relation of *G*-stability to other stability concepts for linear multistep methods. Topics in Numerical Analysis III, 67—80, ed. J. H. Miller, Acad. Press, London, 1977.

[5] *G. G. Dahlquist:* *G*-stability is equivalent to *A*-stability. Report TRITA-NA-7805, 1978.

[6] *M. Práger, J. Taufer, E. Vitásek:* Overimplicit methods for the solution of evolution problems. Acta Universitatis Carolinae — Mathematica et Physica 1—2 (1974), 125—133.

[7] *M. Práger, J. Taufer, E. Vitásek:* Overimplicit multistep methods. Apl. mat. 18 (1973), 399—421.

[8] *H. A. Watts:* *A*-stable block implicit one-step methods. Sandia Laboratories, Albuquerque, Applied Mathematics, 1971.

[9] *H. A. Watts, L. F. Shampine:* *A*-stable block implicit one-step methods. BIT 12 (1972), 252—266.

[10] *R. Vanselow:* Stabilitäts- und Fehleruntersuchungen bei numerischen Verfahren zur Lösung steifer nichtlinearer Anfangswertprobleme. Diplomarbeit, TU Dresden, 1978/79.

[11] *R. Vanselow:* Explizite Konstruktion von linearen Mehrschrittblockverfahren. Apl. Mat. 28 (1983), 1—8.

Nachtrag. Ausgehend von der bekannten Beziehung zwischen impliziten RKV und 1MSBV könnten die hier gewonnenen Stabilitätsergebnisse auch über den in der nach Einreichung dieses Artikels erschienenen Arbeit

K. Burrage, J. C. Butcher: Non-linear stability of a general class of differential equation methods. BIT 20 (1980), 185—203.

gegebenen allgemeinen Zugang hergeleitet werden. Die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Resultate wurden auf einem den 1MSBV angepaßtem Wege direkt gewonnen.

Souhrn

ROZŠÍŘENÍ POJMU *G*-STABILITY NA TŘÍDU LINEÁRNÍCH SILNĚ IMPLICITNÍCH MNOHOKROKOVÝCH METOD

Reiner Vanselow

Článek se zabývá přenesením pojmu *G*-stability od Dahlquista, který je základem pro vyšetřování stability lineárních mnohokrokových metod k řešení nelineárních úloh s počáteční podmínkou, na třídu lineárních silně implicitních mnohokrokových metod. V článku je ukázáno, že silně implicitní metody, které jsou stabilní v tomto smyslu, mohou být nejvýše druhého konsistenčního řádu.

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Math. *Reiner Vanselow*, Sektion Mathematik der Technischen Universität, Mommsenstrasse 13, 8027 Dresden, DDR.