Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Beitrag zu mehrparametrigen Iterationsverfahren

Aplikace matematiky, Vol. 27 (1982), No. 4, 277–284

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103972`

BEITRAG ZU MEHRPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHREN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen 20. Januar 1981)

In der letzten Zeit wird immer mehr Aufmerksamkeit den sog. mehrparametrigen Iterationsverfahren gewidmet, insbesondere im Zusammenhang der Methode von konjugierten Gradienten und verschiedenen modernen Abänderungen dieser Methode In dieser Arbeit wird ein gewisses von drei Parametern abhängiges Iterationsverfahren und verschiedene einfachere Varianten dieses Verfahrens untersucht. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird mit der Konvergenzgeschwindigkeit des optimalen Oberrelaxationsverfahrens verglichen.

Es sei ein lineares algebraisches Gleichingssystem von n Gleichung mit n Unbekannten von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{1}$$

gegeben, wo $\mathbf{B}$ eine Blockmatrix

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_p & \mathbf{U} \\ \hline \mathbf{L} & \mathbf{O}_q \end{array}\right) \tag{2}$$

ist und $\mathbf{O}_p$, bzw. $\mathbf{O}_q$ die Nullmatrizen von Typus $p \times p$, bzw. $q \times q$, $p + q = n$, bezeichnet.

Man definiere ein dreiparametriges Iterationsverfahren mit den Parametren $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ wie folgt:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, \mathbf{x}_i + \mathbf{b}' , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

wo

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}_p, & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{L}, & \alpha_2 \mathbf{E}_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1)\, \mathbf{E}_p, & \mathbf{U} \\ (\beta + 1)\, \mathbf{L}, & (\alpha_2 - 1)\, \mathbf{E}_q \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}_p, & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{L}, & \alpha_2 \mathbf{E}_q \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{b} \tag{5}$$

ist und wo $\mathbf{E}_p$, bzw. $\mathbf{E}_q$ die Einheitsmatrix vom Typus $p \times p$, bzw. $q \times q$ bezeichnet.

Man stellt leicht fest, dass für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ das durch die Beziehungen (3), (4), (5) definiertes Iterationsverfahren mit dem in den Arbeiten [2], [3], [4] untersuchten zweiparametrigen Iterationsverfahren für eine schwach 2-zyklisches System (2), identisch ist. Man bemerke noch, dass die untersuchte Methode ein Spezialfall der allgemeinen dreiparametrigen, von O. Hübner ([1]) definierten, Methode darstellt. In [1] ist ein allgemeines nichtstationäres Iterationsverfahren der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{H}_i \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{L}, & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1} + \begin{pmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{x}_i + \mathbf{b} - \mathbf{x}_i \right\}$$

mit $\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} v_i \mathbf{E}_p, & \mathbf{O} \\ u_i \mathbf{L}, & w_i \mathbf{E}_q \end{pmatrix}$ definiert. Falls man $v_i = 1/\alpha_1$, $w_i = 1/\alpha_2$, $u_i = -\dfrac{\beta + 1}{\alpha_1 \alpha_2}$, legt, bekommt man nach leichten Umformung die Formeln (3), (4), (5).

Nun beweisen wir folgengen Satz, der den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Jacobimatrix $\mathbf{B}$ und denen der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ beschreibt:

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$, $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$. Dann ist jede von Null verschiedene, Zahl μ, die die Beziehung*

$$(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)(1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2) = \mu^2(1 + \beta - \lambda\beta) \tag{6}$$

erfüllt, ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Falls im Gegenteil $\mu \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, dann ist jede Wurzel λ der Gleichung (6) ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.

Beweis. I. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$. Dann existiert so ein Eigenvektor $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, dass

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{7}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}_p, & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{L}, & \alpha_2 \mathbf{E}_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1)\,\mathbf{E}_p, & \mathbf{U} \\ (\beta + 1)\,\mathbf{L}, & (\alpha_2 - 1)\,\mathbf{E}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

gilt. Aus (8) folgen schrittweise die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1)\,\mathbf{E}_p, & \mathbf{U} \\ (\beta + 1)\,\mathbf{L}, & (\alpha_2 - 1)\,\mathbf{E}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}_p, & \mathbf{O} \\ \beta \mathbf{L}, & \alpha_2 \mathbf{E}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 - 1)\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{U}\mathbf{x}_2 = \lambda\alpha_1 \mathbf{x}_1, \\ (\beta + 1)\,\mathbf{L}\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 - 1)\,\mathbf{x}_2 = \lambda\beta\mathbf{L}\mathbf{x}_1 + \lambda\alpha_2\mathbf{x}_2, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\,\mathbf{x}_1\,, \\ (1 + \beta - \lambda\beta)\,\mathbf{L}\mathbf{x}_1 = (1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2)\,\mathbf{x}_2\,. \end{cases} \tag{11}$$

Aus der Voraussetzung $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ folgt $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$ und es gilt also

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\,\mathbf{x}_1\,, \\ \mathbf{L}\mathbf{x}_1 = \dfrac{1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2}{1 + \beta - \lambda\beta}\,\mathbf{x}_2\,. \end{cases}$$

Man setze voraus, dass die Zahl $\mu \neq 0$ der Beziehung (6) genügt; man definiere dann den Vektor $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ wie folgt:

$$(13) \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 = k\mathbf{y}_2$$

$$(14) \qquad k = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)/\mu$$

ist. Aus (12) folgt

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{y}_2 = \dfrac{1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1}{k}\,\mathbf{y}_1\,, \\ \mathbf{L}\mathbf{y}_1 = \dfrac{1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2}{1 + \beta - \lambda\beta}\,k\mathbf{y}_2 \end{cases}$$

oder

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{y}_2 = \mu\mathbf{y}_1\,, \\ \mathbf{L}\mathbf{y}_1 = \dfrac{(1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2)(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)}{(1 + \beta - \lambda\beta)\,\mu}\,\mathbf{y}_2\,. \end{cases}$$

Da die Zahl μ die Beziehung (6) erfüllt, bekommt man unmittelbar die Formeln

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{y}_2 = \mu\mathbf{y}_1\,, \\ \mathbf{L}\mathbf{y}_1 = \mu\mathbf{y}_2\,; \end{cases}$$

davon folgt sofort, dass μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist (der entsprechende Eigenvektor ist dann der Vektor $\mathbf{y}$). Aus (13) und (14) folgt, dass $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ ist, da $k \neq 0$ gilt.

II. Man setze voraus, dass μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ und λ eine Wurzel der Gleichung (6) ist. Wir beweisen, dass λ dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist. Da μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, existiert ein Vektor $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ so, dass (16) gilt. Dabei ist $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{y}_2 \neq \mathbf{o}$; wäre nämlich z. B. $\mathbf{y}_1 = \mathbf{o}$, dann wäre $\mathbf{L}\mathbf{y}_1 = \mathbf{o} = \mu\mathbf{y}_2$ und also wäre auch $\mathbf{y}_2 = \mathbf{o}$. Ähnlicherweise kann $\mathbf{y}_2 = \mathbf{o}$ nicht gelten. Man unterscheide die einzelne mögliche Fälle:

a) Es sei $\beta \neq -\alpha_1$, $\beta \neq -\alpha_2$. Dann gilt für beide Wurzeln λ der Gleichung (6) $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$. Falls $1 + \beta - \lambda\beta = 0$ wäre, dann wurde entweder $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 0$ oder $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ gelten. Im ersten Fall wäre aber $\beta = -\alpha_1$ und im zweiten Fall $\beta = -\alpha_2$; dieses liefert einen Widerspruch.

Es sei $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ ein dem Eigenwert μ der Matrix $\mathbf{B}$ entsprechender Eigenvektor. Es gilt also (16). Definiere man jetzt die Zahl k nach (14). Es ist offensichtlich $k \neq 0$, da für beide Wurzeln der Gleichung (6) $1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$ und also auch $1 - \alpha_1 +$

$+ \lambda\alpha_1 \neq 0$ ist. Man definiere ferner den Vektor $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ nach (13). Aus den Beziehungen (16) folgt sofort

$$\begin{cases} \boldsymbol{U} k \mathbf{y}_2 = \mu k \mathbf{y}_1 \,, \\ \boldsymbol{L} k \mathbf{y}_1 = \mu k \mathbf{y}_2 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, \mathbf{x}_1 \,, \\ \dfrac{1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1}{\mu}\, \boldsymbol{L}\mathbf{x}_1 = \mu \mathbf{x}_2 \,, \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, \mathbf{x}_1 \,, \\ \boldsymbol{L}\mathbf{x}_1 = \dfrac{\mu^2}{1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1}\, \mathbf{x}_2 \,. \end{cases}$$

Angesichts (6) gelten dann die mit (7) äquivalente Beziehungen (11) und die Behauptung ist dadurch bewiesen.

b) Es sei $\beta = -\alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Die Gleichung (6) ist dann von der Form $(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)(1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2) = \mu^2(1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2)$. Falls λ eine Wurzel dieser Gleichung ist, gilt entweder $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ (dann ist $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 \neq 0$ angesichts $\alpha_1 \neq \alpha_2$) oder $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = \mu^2$ (dabei ist $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 \neq 0$. Wir definieren wieder nach (14) die Zahl k (es ist $k \neq 0$). Aus (16), (14) und (13) folgt dann schrittweise $\boldsymbol{U}k\mathbf{y}_2 = \mu k \mathbf{y}_1$, $\boldsymbol{L}k\mathbf{y}_1 = \mu k \mathbf{y}_2$ oder

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}\mathbf{x}_2 = (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, \mathbf{x}_1 \,, \\ (1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)\, \boldsymbol{L}\mathbf{x}_1 = \mu^2 \mathbf{x}_2 \,. \end{cases} \tag{17}$$

Man untersuche jetzt jene der zwei Wurzeln der Gleichung (6), für die $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ gilt. Da die erste Gleichung (17) mit der ersten Gleichung (11) identisch ist und die zweite Gleichung (11) angesichts der Gleichheiten $\beta = -\alpha_2$ und $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ automatisch gilt, folgt aus (11) die Beziehung (7), was zu beweisen war.

Im Falle, dass λ eine Wurzel der Gleichung (6) ist, die die Beziehungen $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = \mu^2$ und $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 \neq 0$ erfüllt, folgt aus der zweiten Gleichung (17) die mit der zweiten Gleichung (11) für $\beta = -\alpha_2$ identische Gleichung $\boldsymbol{L}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ (es ist nämlich $1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 \neq 0$). Es gilt wieder (11) und auch (7), was zu beweisen war.

c) Es sei $\beta = -\alpha_1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Die zu beweisende Behauptung gilt dann ähnlicherweise, wie im Falle b), da die Beziehung (6) symmetrisch in Hinsicht auf die Parameter α_1, α_2 ist.

d) Es sei $\beta = -\alpha_2 = -\alpha_1$. Dann ist die Gleichung (6) der Form $(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)^2 = \mu(1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1)$. Die erste Wurzel dieser Gleichung erfüllt dann die Beziehung $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ und die zweite Wurzel erfüllt die Beziehung $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu^2$. Man untersuche jetzt die Beziehungen (16) und jene der Wurzeln der Gleichung (6), für die $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = 0$ gilt. Wir definieren nach (14) und (13) die Zahl k und die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Angesichts $k = 0$ gilt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{o}$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$. Die Beziehungen (11) sind dann aber trivial erfüllt und es gilt also (7), was zu beweisen war.

Man untersuche jetzt die zweite der Wurzeln der Gleichung (6), für welche $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu^2$ gilt. Die durch die Beziehung (14) definierte Zahl k is offensichtlich von Null verschieden und aus (16), (14) und (13) folgt sofort (17) oder

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{x}_2 &= \mu^2 \mathbf{x}_1 \,, \\ \mathbf{L}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_2 \,. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen sind aber mit (11) identisch, angesichts $1 - \alpha_1 + \lambda\alpha_1 = \mu^2$, $1 + \beta - \lambda\beta = 1 - \alpha_2 + \lambda\alpha_2 = \mu^2$. Es gilt also (7), was zu beweisen war.

Ferner untersuchen wir den Fall wenn der Eigenwert μ_j der Jacobimatrix $\mathbf{B}$ reell und von Null verschieden ist (dieses tritt z. B. in dem Falle ein, wenn $\mathbf{U} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ ist). Bezeichnet man m^2, bzw. M^2 den Minimalwert, den Maximalwert der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$, dann gilt $0 < m^2 \leqq \mu_j^2 \leqq M^2 < 1$.

Erwäge man nun das durch die Beziehungen (3), (4), (5) definierte Iterationsverfahren; hier wählen wir speziell $\alpha_1 = \alpha > 0$, $\alpha_2 = p\alpha$, $\beta = -\alpha$, wobei p eine gewisse positive Zahl ist. Es gilt dann folgender Satz:

Satz 2. *Es sei $1 - m^2 \leqq p \leqq \sqrt{(1 - M^2)}$. Für den Spektralradius $\varrho(\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha))$ der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)$ gelten dann folgende Beziehungen:*

$$\varrho(\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)) \geqq \varrho(\mathbf{V}(\alpha_0, p\alpha_0, -\alpha_0)) = [p - (1 - M^2)]/[p + (1 - M^2)] \,, \tag{18}$$

wo $\alpha_0 = [p + (1 - M^2)]/2p$ ist; dabei gilt die Ungleichung

$$[p - (1 - M^2)]/[p + (1 - M^2)] \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \,. \tag{19}$$

Bemerkung 1. Es handelt sich offensichtlich um ein Iterationsverfahren mit zwei Parametern α, p und α_0 ist infolge von (18) der Optimalparameter angesichts α; für $\alpha = \alpha_0$ das bedeutet, dass man die schnellste Konvergenz bei gegebener Zahl p erhält. Aus der Ungleichung (19) folgt, dass für p aus dem Intervalle $\langle 1 - m^2, \sqrt{(1 - M^2)} \rangle$ die untersuchte Methode mindestens so schnell konvergiert, wie dass optimale Überrelaxationverfahren, dessen Iterationsmatrix bekanntlich den Spektralradius $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ hat. Das Intervall $\langle 1 - m^2, \sqrt{(1 - M^2)} \rangle$ ist eine nichtleere Menge, wenn $m^2 \geqq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$ gilt; das ist die gleiche Bedingung, wie bei der, in den Arbeiten [2], [3], [4] untersuchten, zweiparametrigen Methode.

Beweis des Satzes 2. Aus dem Satz 1 folgt, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)$ Wurzeln der Gleichung

$$(1 - \alpha + \lambda\alpha)(1 - p\alpha + \lambda p\alpha) = \mu_j^2(1 - \alpha + \lambda\alpha) \tag{20}$$

sind, wo μ_j^2 alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$ sind. Wir lösen die Gleichung (20) bei gegebenen μ_j^2. Diese ist erstens für $1 - \alpha + \lambda\alpha = 0$, d. h. $\lambda = 1 - 1/\alpha$ erfüllt und ferner ist sie für $1 - p\alpha + \lambda p\alpha = \mu_j^2$, d.h. für $\lambda = 1 - (1 - \mu_j^2)/p\alpha$ erfüllt. Man beweist nun leicht, dass für $1 - m^2 \leqq p \leqq \sqrt{(1 - M^2)}$ die Ungleichungen

$$1 - \frac{1}{\alpha} \leqq 1 - \frac{1 - \mu_j^2}{p\alpha} \leqq 1 - \frac{1 - M^2}{p\alpha}$$

gelten. Davon ist sofort sichtbar, dass der Spektralradius der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)$ für jede α_0 optimal ist, für die

$$-1 + \frac{1}{\alpha_0} = 1 - \frac{1 - M^2}{p\alpha_0}$$

gilt, d. h. für $\alpha_0 = [p + (1 - M^2)]/2p$. Dann ist

$$\varrho(\mathbf{V}(\alpha_0, p\alpha_0, -\alpha_0)) = -1 + \frac{1}{\alpha_0} = [p - (1 - M^2)]/[p + (1 - M^2)]\,,$$

wodurch die Behauptung (18) bewiesen ist. Ferner ist leicht zu beweisen, dass die Ungleichung

$$[p - (1 - M^2)]/[p + (1 - M^2)] \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

der Ungleichung $p \leqq \sqrt{(1 - M^2)}$ äquivalent ist, wodurch die Behauptung (19) bewiesen ist.

Satz 3. *Es sei* $p_1 = 1 - m^2$, $\alpha_1 = [p_1 + (1 - M^2)]/2p_1 = [2 - (M^2 + m^2)] : : 2(1 - m^2)$. *Dann gilt*

$$\varrho(\mathbf{V}(\alpha_0, p\alpha_0, -\alpha_0)) \geqq \varrho(\mathbf{V}(\alpha_1, p_1\alpha_1, -\alpha_1)) = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]\,.$$

Der Beweis folgt sofort von der Ungleichung

$$[p - (1 - M^2)]/[p + (1 - M^2)] \geqq (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]\,,$$

da $p \geqq 1 - m^2$ ist.

Bemerkung 2. In den Sätzen 2 und 3 wurde die, der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)$ entsprechende, Methode zuerst mit Rücksicht auf den Parameter α und dann mit Rücksicht auf p optimiert. Falls man $p = 1$ legt, hängt die Matrix $\mathbf{V}(\alpha, p\alpha, -\alpha)$ nur von einem Parameter α ab; die Gleichung (6) hat dann die Form $(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = = \mu^2(1 - \alpha + \lambda\alpha)$ so, dass zwei Wurzeln $\lambda_1 = 1 - 1/\alpha$ und $\lambda_2 = 1 - (1 - \mu^2)/\alpha$ existieren. Da $\lambda_1 < \lambda_2 = 1 - (1 - \mu_j^2)/\alpha \leqq 1 - (1 - M^2)/\alpha$ gilt, ist der Spektralradius der Matrix $\mathbf{V}(\alpha, \alpha, -\alpha)$ für $\alpha_2 = (2 - M^2)/2$ minimal und es gilt $\mathbf{V}(\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_2) = M^2/(2 - M^2)$. Angesichts $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] < M^2/(2 - - M^2) < M^2$ konvergiert diese einparametrige Methode schneller, als das Gauss-Seidelsche Verfahren, aber langsamer, als das optimale Überrelaxationsverfahren.

Tabelle

Methode	$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$	$\varrho(\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$
Jacobi	$\mathbf{V}(1, 1, 0) = \mathbf{B}$	$\lvert M \rvert$
Gauss - Seidel	$\mathbf{V}(1, 1, -1)$	M^2
optimale ein-parametrige Version	$\mathbf{V}(\alpha, \alpha, -\alpha)$, $\alpha = (2 - M^2)/2$	$M^2/(2 - M^2)$
optimale SOR	$\mathbf{V}\left(\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega}, -1\right)$, $\omega = 2/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$	$[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$
zweiparametrige angesichts α optimierte Version	$\mathbf{V}(\alpha_0, \alpha_0 p, -\alpha_0)$ $\alpha_0 = [p + (1 - M^2)]/2p$ $1 - m^2 \leqq p \leqq \sqrt{(1 - M^2)}$	$\dfrac{p - (1 - M^2)}{p + (1 - M^2)}$
zweiparametrige angesichts α und p optimierte Version	$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_1 p_1, -\alpha_1)$ $\alpha_1 = [2 - (M^2 + m^2)]/2(1 - m^2)$ $p_1 = 1 - m^2$	$\dfrac{M^2 - m^2}{2 - (M^2 + m^2)}$
optimierte dreiparametrige Version	$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ $\alpha_1 = 1/\left[1 + \left(\dfrac{\sqrt{M^2} - \sqrt{m^2}}{\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}}\right)^2\right]$ $\alpha_2 = 1/\left[1 + \left(\dfrac{\sqrt{M^2} + \sqrt{m^2}}{\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}}\right)^2\right]$, $\beta = -1$	$\dfrac{M^2 - m^2}{(\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)})^2}$

Bemerkung 3. Falls man den Spektralradius der Matrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ mit Rücksicht auf alle drei Parameter optimiert, folgt aus den Ergebnissen der Arbeit [1] die Formel

$$\min_{\alpha_1,\alpha_2,\beta} \varrho(\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = \varrho(\mathbf{V}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta})) =$$

$$= (M^2 - m^2)/[\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}]^2 ,$$

wo
$$\tilde{\alpha}_1 = 1\Bigg/\left[1 + \left(\frac{\sqrt{(M^2)} - \sqrt{(m^2)}}{\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}}\right)^2\right],$$

$$\tilde{\alpha}_2 = 1\Bigg/\left[1 + \left(\frac{\sqrt{(M^2)} + \sqrt{(m^2)}}{\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}}\right)^2\right], \quad \tilde{\beta} = -1 .$$

In der Tabelle sind übersichtlich einige Varianten des untersuchten dreiparametrigen Iterationsverfahrens angegeben. Die Methoden sind nach der Grösse der Spektralradien der Iterationsmatrix $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ geordnet.

So z. B. für $M^2 = 0{,}81$, $m^2 = 0{,}68$ ist schrittweise $|M| = 0{,}9$, $M^2 = 0.81$, $M^2/(2 - M^2) = 0{,}68$, $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] = 0{,}45$, $[p - (1 - M^2)] : [p + (1 - M^2)] = 0{,}295$ für $p = 0{,}35$, $(M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)] = 0{,}258$, $(M^2 - m^2)/[\sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt{(1 - m^2)}] = 0{,}13$.

Literaturverzeichnis

[1] *O. Hübner:* Untersuchungen zur mehrparametrigen Überrelaxation. Mitteiliungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Heft 128, Giesen 1977.

[2] *M. Šisler:* Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Apl. mat. 18 (1973), 325–332.

[3] *M. Šisler:* Über die Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens. Apl. mat., 20 (1975), 126–142.

[4] *M. Šisler:* Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens. Apl. mat., 21 (1976), 213–220.

[5] *D. M. Young*: Iterative solution of large systems. Academic Press, 1971, New York and London.

Souhrn

PŘÍSPĚVEK K VÍCEPARAMETRICKÝM ITERAČNÍM METODÁM

Miroslav Šisler

V práci se zkoumá jistá trojparametrická iterační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{B}$ je slabě 2-cyklická bloková matice. Studuje se několik variant této iterační metody a rychlost konvergence se porovnává s rychlostí běžně užívaných iteračních metod.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.