Aplikace matematiky

Karel Drábek; Zdeněk Pírko

Beitrag zur $\mathcal{E}$-Kinematik der Ebene: Äquivalenzsatz; Äquiforme Trochoiden

Aplikace matematiky, Vol. 26 (1981), No. 5, 365–376

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103925`

BEITRAG ZUR $\mathscr{E}$-KINEMATIK DER EBENE: ÄQUIVALENZSATZ; ÄQUIFORME TROCHOIDEN

KAREL DRÁBEK, ZDENĚK PÍRKO

(Eingegangen 5. November 1979)

Herrn Prof. Dr. H. R. Müller zum siebzigsten Geburtstag.

1. EINLEITUNG

Der Grundsatz der ebene Kinematik des starren Gebildes ($\mathscr{K}$-Bewegung), nämlich die Äquivalenz dieser Bewegung mit dem Rollen ($\mathscr{K}$-Rollen), ist siehe Absatz 2) für die ebene Bewegung des ähnlich-veränderlichen Gebildes ($\mathscr{E}$-Kinematik) formuliert. In der allgemeinen natürlichen Geometrie (Cesàro-Picksche Geometrie) trägt man den Rollenbegriff, wie man ihn aus der Gruppe der direkten Kongruenzen kennt, auf eine beliebige Gruppe der stetigen Transformationen, die allerdings gewisse Voraussetzungen erfüllt, über (siehe [7], [8], [9]). In der vergelegten Arbeit ist ein Verfahren, das nicht von der Gruppenauffassung abhängt, benutzt. Es zeigt sich, daß die sog. komplexe Legendresche Transformation, mit welcher man die Äquivalenz der $\mathscr{K}$-Bewegung mit dem $\mathscr{K}$-Rollen (Cauchyscher Satz; siehe z. B. [6]) beweist, auch in der $\mathscr{E}$-Kinematik eine faktische Unterlage für den Beweis der $\mathscr{E}$-Analogie des Cauchyschen Satzes sein kann. In diesem Sinne kann man zum $\mathscr{K}$-Rollen, als Abbildung einer festen Kurve (die Basis) und einer beweglichen Kurve (das Profil) auf sich durch die gleichen Elemente der euklidischen Bogen, analogisch den Begriff des $\mathscr{E}$-Rollens als Abbildung der Basis und des Profils auf sich durch die proportionellen Elemente der euklidischen Bogen (mit veränderlichem Proportionalitätskoeffizient, sog. Modul des $\mathscr{E}$-Rollens) formulieren.

So erhalten wir schon für den einfachsten Typ des $\mathscr{E}$-Rollens (die Basis und das Profil sind die Polkurven der äquivalenten Bewegung) in dem euklidischen Model umfangreichere Ergebnisse; deren Reichtum wächst noch in jenem Typ des Rollens an, in welchem die Basis und das Profil, die von der äquivalenten Bewegung unabhängig sind, invariant gegeben sind und man disponiert mit dem Rollenmodul.

Zu den angewandten Begriffen, ihrer Bedeutung und zur angeführten Symbolik verweisen wir z. B. auf die Arbeit [4].

2. $\mathscr{E}$-ANALOGIE DER KOMPLEXEN LEGENDRESCHEN TRANSFORMATION; DIE ÄQUIVALENZ DER $\mathscr{E}$-BEWEGUNG MIT DEM $\mathscr{E}$-ROLLEN

In der $\mathscr{E}$-Bewegung, die analytisch durch die Gleichung

$$\mathscr{E}(\Sigma/S) : z = m + \zeta n(= z(t; \zeta)) \tag{1}$$

repräsentiert wird und deren kinematischen Parameter $m = m(t)$ (sog. *Übetragung*) und $n = n(t)$ (sog. *homothetische Drehung*, kurz *Drehung*, $n = l \exp \mathrm{j}\vartheta$, $l = l(t) > 0$ ist der *Drehungsmodul*, $\vartheta = \vartheta(t)$ ist der *Winkelparameter*, bzw. das *Zeitregime* der Bewegung) im notwendigen Maß auf dem gemeinsamen Definitionsintervall $\mathrm{I}(t)$ regulär sind, ist die erste Rast-, bzw. Gangpolkurve durch die Gleichung

$$^1z = m - n(\mathrm{d}m : \mathrm{d}n) \, (= {^1z}(t) \in (S)) \, , \tag{2_1}$$

bzw.

$$^1\zeta = -\mathrm{d}m : \mathrm{d}n (= {^1\zeta}(t) \in (\Sigma)) \tag{2_2}$$

gegeben.

Die Radiuskomplexe ^1z, $^1\zeta$ sind auf I durch die Koinzidenzbeziehung (die *Lagebedingung*)

$$^1z = m + {^1\zeta} n \tag{3}$$

und die Tangentialkomplexe d^1z, $\mathrm{d}^1\zeta$ durch die Beziehung (die *Berührungsbedingung*)

$$\mathrm{d}^1z = n \, \mathrm{d}^1\zeta \, , \tag{4}$$

in der reelen Form

$$\operatorname{mod} \mathrm{d}^1z = l \operatorname{mod} \mathrm{d}^1\zeta \, ,$$

gebunden.

Mit den euklidischen Bogen ^1s, $^1\sigma$ auf den Polkurven ^1z, $^1\zeta$ erhalten wir aus der reelen Form der Bedingung (4) für den Drehungsmodul

$$l = \mathrm{d}^1s : \mathrm{d}^1\sigma \tag{4*}$$

und zwar unabhängig von der Wahl der Systeme S, Σ (*lokale Berührungsinvariante*).

Vom formalen Standpunkt aus sind die beiden Gleichungen (2)

$$^1z = m - n(\mathrm{d}m : \mathrm{d}n) \, , \quad {^1\zeta} = -\mathrm{d}m : \mathrm{d}n \tag{5}$$

und die Gleichungen (3), (4), die wir in der Form

$$m = {^1z} - {^1\zeta}(\mathrm{d}^1z : \mathrm{d}^1\zeta) \, , \quad n = \mathrm{d}^1z : \mathrm{d}^1\zeta \tag{6}$$

schreiben, ihre gegenseitigen Lösungen:

Aus den Gleichungen (5_1), (5_2) haben wir einesteils $m = {^1z} - {^1\zeta} n$ und nach dem Einsetzen für n nach (6_2) folgt (6_1), andernteils $n = ({^1z} - m) : {^1\zeta}$ und nach dem

Einsetzen für $^1z - m$ nach (6_1) folgt (6_2). Ähnlich, wenn wir aus den Gleichungen (6_1), (6_2) ausgehen.

Die Systeme (5), (6) *stellen die $\mathscr{E}$-Analogie der komplexen Legendreschen Transformation dar, durch welche man am einfachsten den Satz über die Äquivalenz der $\mathscr{K}$-Bewegung mit dem $\mathscr{K}$-Rollen* (der *Cauchysche Satz*) *beweist.*[1])

Die Gleichungen (5) zusammen mit den Gleichungen (3), (4) geben die Basis und das Profil des äquivalenten Rollens ($\mathscr{E}$-Rollen) zu der $\mathscr{E}$-Bewegung, die durch die Übertragung $m(t)$ und die Drehung $n(t)$ bestimmt ist, an. In dem momentanen Berührungspunkte $t \in \mathrm{I}$ sind nach (4*) die Basis und das Profil auf sich durch proportionelle Elemente der euklidischen Bogen abgebildet, $\mathrm{d}^1 s = l\, \mathrm{d}^1\sigma$ $(l = \sqrt{(n\bar{n})}$, mit dem Proportionalitätskoefficienten, welcher dem augenblicklichen Wert der lokalen Berührungsinvariante (des *$\mathscr{E}$-Rollenmoduls*) gleich ist. Die parametrischen koordinatenabhängigen Gleichungen der Kurve (mit dem Parameter t), die während des $\mathscr{E}$-Rollens in der Basisebene durch den profilgebundenen Punkt (ζ) beschrieben wird, folgt aus den Gleichungen (1), (3), (4) in der Form

$$(7) \qquad Z = {}^1z + (\zeta - {}^1\zeta)\, \mathrm{d}^1 z : \mathrm{d}^1\zeta (= Z(t; \zeta))$$

(*ζ-Trochoide*); im Hinblick zur Allgemeinheit der Wahl der Systeme S, Σ kann man das zweiparametrige System der ζ-Trochoiden (mit ζ als Parameter des Systems) durch „die *Nulltrochoide*“

$$Z = {}^1z - {}^1\zeta\, \mathrm{d}^1 z : \mathrm{d}^1\zeta (= Z(t))$$

repräsentieren.

Die Gleichungen (6) geben zu dem $\mathscr{E}$-Rollen, das durch die Basis $^1z(t)$ und das Profil $^1\zeta(t)$ (mit dem Rollenmodul $l = \sqrt{(\mathrm{d}^1 z \,.\, \mathrm{d}^1\bar{z}) : (\mathrm{d}^1\zeta \,.\, \mathrm{d}^1\bar{\zeta})}$) bestimmt ist, die Übertragung und die Drehung der äquivalenten Bewegung an. Die parametrischen Gleichungen der Kurve, die in der Rastebene der Bewegung durch den festen Punkt (ζ) der Gangebene beschrieben wird, sind

$$(8) \qquad Z = m + \zeta n$$

(die *ζ-Bahnkurve*). Das zweiparametrige System der ζ-Bahnkurven (8) ist äquivalent mit dem zweiparametrigen System der ζ-Trochoiden (7).

Dadurch wurde die $\mathscr{E}$-Äquivalenz des Cauchyschen Satzes über die $\mathscr{E}$-Bewegung (die $\mathscr{E}$-Äquivalenz der $\mathscr{E}$-Bewegung mit dem $\mathscr{E}$-Rollen) gefunden.

3. BASIS UND PROFIL SIND DIE POLKURVEN DER ÄQUIVALENTEN BEWEGUNG; TRIVIALER FALL UND $\mathscr{E}$-ANALOGIE DER ZYKLOIDALEN BEWEGUNG

In dem einfachsten Fall des $\mathscr{E}$-Rollens sind die Basis und das Profil die Rast-, bzw. die Gangpolkurve der äquivalenten $\mathscr{E}$-Bewegung und die ζ-Trochoide ist ihre ζ-Bahnkurve.

---

[1]) Zu der ursprünglichen Bedeutung in der Mechanik siehe z. B. [1], S. 54 n.

In dem trivialen Fall, in welchem die Basis und das Profil $\mathscr{E}$-Geraden (Kurven mit der äquiformen Krümmung, die gleich Null ist; euklidisch alle Kreise in der Ebene) sind, sind ihre parametrischen Gleichungen

$$z = z_0 - \mathrm{j} z_1 \exp \mathrm{j} t\,, \quad \text{bzw.} \quad `z = `z_0 - j `z_1 \exp \mathrm{j} t$$

($z_0, z_1 \neq 0$, bzw. $`z_0, `z_1 \neq 0$ Integrationskonstanten) als die Gleichungen der Polkurven, schon zu demselben Parmeter t bezogen. Nach dem Einsetzen in die Gleichung (7) (wo wir statt ^1z, bzw. $^1\zeta$ nur z, bzw. $`z$ schreiben) erhalten wir

$$Z = (z_0 `z_1 + (\zeta - `z_0)\, z_1) : `z_1\,;$$

die Trochoide reduziert sich auf einen Punkt, die äquivalente Bewegung ist die Ruhe.

In dem einfachsten nichttrivialen Fall, in welchem die Basis und das Profil $\mathscr{E}$-Kreise sind (Kurven mit der konstanten, von Null verschiedenen, äquiformen Krümmung; euklidisch alle logarithmischen Spiralen in der Ebene), sind ihre parametrischen Gleichungen

$$z = z_0 + (z_1 \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (\Omega_0 + \mathrm{j})\,, \quad \text{bzw.}$$

$$`z = `z_0 + (`z_1 \exp{(`\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (`\Omega_0 + \mathrm{j})$$

(Ω_0, bzw. $`\Omega_0$ die äquiforme Krümmung der Basis, bzw. des Profils; $z_0, z_1 \neq 0$, bzw. $`z_0, `z_1 \neq 0$ beliebige Intergrationskonstanten) und die Trochoidengleichung ist

$$Z = z_0 - (z_1(\Omega_0 - `\Omega_0) \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (\Omega_0 + \mathrm{j})(`\Omega_0 + \mathrm{j}) +$$

$$+ ((\zeta - `z_0)\, z_1 \exp{(\Omega_0 - `\Omega_0)\, t}) : `z_1\,.$$

Mit Hilfe der $\mathscr{E}$-Transformation in dem Koordinatensystem der Basis und des Profils erreichen wir, daß $z_0 = `z_0 = 0$, $z_1 = `z_1 = 1$ ist; die Gleichung der ζ-Trochoide vereinfacht sich auf

$$Z = -((\Omega_0 - `\Omega_0) \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (\Omega_0 + \mathrm{j})(`\Omega_0 + \mathrm{j}) + \zeta \exp{(\Omega_0 - `\Omega_0)\, t}$$

(euklidisch (komplexe) Kissoide der logarithmischen Spirale mit dem asymptotischen Punkt in dem Nullpunkt des Koordinatensystems der Basis, und der Geraden, welche durch diesen Punkt geht). Die Gleichung der Nulltrochoide vereinfacht sich auf

$$Z = -((\Omega_0 - `\Omega_0) \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (\Omega_0 + \mathrm{j})(`\Omega_0 + \mathrm{j})$$

(euklidisch die logarithmische Spirale).

Mit der Voraussetzung $\Omega_0 \neq 0$ und für $\Omega_0 + `\Omega_0 = 0$ ist

$$Z = -(2\Omega_0 \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (1 + \Omega_0^2) + \zeta \exp{(-2\Omega_0 t)}\,,$$

bzw.

$$Z = -(2\Omega_0 \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t}) : (1 + \Omega_0^2)$$

($\mathscr{E}$-*Analogie des spiralsymmetrischen Rollens*).

Für $\Omega_0 = {}'\Omega_0$ reduziert sich die Trochoide auf einen Punkt.

Wenn $\Omega_0 = 0$, ${}'\Omega_0 \neq 0$ (die Basis ist die $\mathscr{E}$-Gerade, das Profil der $\mathscr{E}$-Kreis), bzw. ${}'\Omega_0 = 0$, $\Omega_0 \neq 0$ (die Basis ist der $\mathscr{E}$-Kreis, das Profil die $\mathscr{E}$-Gerade) ist, finden wir

$$Z = -(\mathrm{j}{}'\Omega_0 \exp \mathrm{j}t) : ({}'\Omega_0 + \mathrm{j}) + \zeta \exp(-{}'\Omega_0 t),$$

bzw.

$$Z = (\mathrm{j}\Omega_0 \exp(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t) : (\Omega_0 + \mathrm{j}) + \zeta \exp \Omega_0 t;$$

für die Nulltrochoide

$$Z = -(\mathrm{j}{}'\Omega_0 \exp \mathrm{j}t) : ({}'\Omega_0 + \mathrm{j}),$$

(euklidisch der Kreis), bzw.

$$Z = (\mathrm{j}\Omega_0 \exp(\Omega_0 + \mathrm{j})\, t) : (\Omega_0 + \mathrm{j})$$

(euklidisch die logarithmische Spirale).

Damit sind auch die speziellen Fälle dieser *$\mathscr{E}$-Analogie der zykloidalen Bewegung* ausgeschöpft.

4. BASIS UND PROFIL INVARIANT GEGEBEN; ÄQUIPARAMETRISATIONSBEDINGUNG, PARAMETRISCHE GLEICHUNG DER $\mathscr{E}$-TROCHOIDE

In dem allgemeinen Fall des $\mathscr{E}$-Rollens ist die Basis, bzw. das Profil durch ihre invariante Gleichungen

$$\Omega = \Omega(\omega), \quad \text{bzw.} \quad {}'\Omega = {}'\Omega({}'\omega)$$

gegeben [ω und Ω, bzw. ${}'\omega$ und ${}'\Omega$ ist der äquiforme Bogen (der Tangentenwinkel) und die äquiforme Krümmung der Basis, bzw. des Profils].

Zur Bestimmung der $\mathscr{E}$-Rollens, welches mit der $\mathscr{E}$-Bewegung äquivalent ist, müssen wir zu dem Paar der reelen Funktionen $\Omega(\omega), {}'\Omega({}'\omega)$ als dritte reelle Funktion den Modul des $\mathscr{E}$-Rollens beifügen. Wir disponieren mit seiner Wahl.

Der Gleichung (4*) wegen ist $l = \mathrm{d}s : \mathrm{d}{}'s$, wo s, bzw. ${}'s$ der euklidische Bogen der Basis, bzw. des Profils ist, wobei die euklidischen Integralinvarianten $\mathrm{d}s$, bzw. $\mathrm{d}{}'s$ mit den äquiformen Differentialinvarianten Ω, bzw. ${}'\Omega$ durch die Gleichungen

$$s'' - \Omega s' = 0, \quad \text{bzw.} \quad {}'s'' - {}'\Omega{}'s' = 0$$

verknüpft sind (die Striche bedeuten die Ableitungen nach dem zugehörigen äquiformen Bogen), ist vor allem

$$\mathrm{d}s = s_0' J \, \mathrm{d}\omega, \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}{}'s = {}'s_0'{}'J \, \mathrm{d}{}'\omega$$

(${}'s_0 \neq 0$, bzw. ${}'s_0' \neq 0$ beliebige Konstanten), wobei der Kurzfassung wegen die „exponentielle Invariante“

$$J = \exp \int \Omega \, \mathrm{d}\omega (= J(\omega)), \quad \text{bzw.} \quad {}'J = \exp \int {}'\Omega \, \mathrm{d}{}'\omega (= {}'J({}'\omega))$$

eingeführt wurde, also

$$(9) \qquad l = l_0(J : `J)(\mathrm{d}\omega : \mathrm{d}`\omega)\,(l_0 = s_0' : `s_0' > 0)\,.$$

Daraus folgt für die Struktur des Rollenmoduls

$$(10) \qquad l = l_0(f : `f)(\mathrm{d}\omega : \mathrm{d}`\omega)\,,$$

wo $f = f(\omega)\,(>0)$, $`f = `f(`\omega)\,(>0)$ beliebige Funktionen sind.

Mit den Gleichungen (9), (10) erhalten wir als „die *Äquiparametrisationsbedingung*" die Gleichung

$$(11) \qquad (f : J) - (`f : `J) = 0\,.$$

Für die gegebenen Invarianten J, $`J$, d. h. für die invariant gegebene Basis, bzw. für das invariant gegebenen Profil, und für die gegebene Auswahl von $f$, $`f$, stellt (11) die Beziehung zwischen den Parametern ω, $`\omega$ dar, welche, wenigstens allgemein, die Ausdrucksweise

$$`\omega = `\omega(\omega)\,, \quad \text{bzw.} \quad \omega = \omega(`\omega)$$

erlaubt.

Hinsichtlich der Gleichung

$$(*) \qquad \omega - `\omega = \vartheta\,,$$

welche auf I die äquiformen Bogen ω, $`\omega$ mit dem Bewegungsparameter ϑ der äquivalenten Bewegung bindet, ist

$$\omega = `\omega(\omega) + \vartheta\,, \quad \text{bzw.} \quad `\omega = \omega(`\omega) - \vartheta\,,$$

und also, wieder wenigstens allgemein,

$$\omega = {}^{\times}\omega(\vartheta)\,, \quad \text{bzw.} \quad `\omega = {}^{*}\omega(\vartheta)\,;$$

ω, $`\omega$ sind als Funktionen desselben Parameters ϑ ausgedrückt.

Durch die Allgemeinheit ihrer Form, sowohl hinsichtlich zu J, $`J$, wie zu $f$, $`f$, enthält die Bedingung (11) eine breite Klasse von $\mathscr{E}$-Trochoiden. Für die speziellen Fälle der Gleichung der Basis und des Profils (für die speziellen Wahlen von Ω. $`\Omega$, bzw. $J$, $`J$) und für die speziellen Wahlen der Funktionen f, $`f$, kann der Äquiparametrisationsprozess, oben nur allgemein beschrieben, noch wesentlich vereinfacht werden.

Die parametrische (vom Koordinatensystem abhängige) Gleichung der Basis $\Omega = \Omega(\omega)$, bzw. der Profils $`\Omega = `\Omega(`\omega)$ finden wir aus den Differentialgleichungen

$$z'' - (\Omega + \mathrm{j})\,z' = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad `z'' - (`\Omega + \mathrm{j})\,`z' = 0$$

(die Striche bedeuten die Ableitungen nach dem zugehörigen äquiformen Bogen); es ist

$$z = z_0 + z_1 \int (J \exp \mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}\omega\,, \quad \text{bzw.} \quad `z = `z_0 + `z_1 \int (`J \exp j`\omega)\,\mathrm{d}`\omega$$

(z_0, $z_1 \neq 0$, bzw. $`z_0$, $`z_1 \neq 0$ sind Integrationskonstanten), und nach der $\mathscr{E}$-Transformation in dem Koordinatensystem der Basis, bzw. des Profils, einfacher

$$z = \int (J \exp \mathrm{j}\omega) \, \mathrm{d}\omega (= z(\omega)) , \quad \text{bzw.} \quad `z = \int (`J \exp \mathrm{j}`\omega) \, \mathrm{d}`\omega (= `z(`\omega)) .$$

Wenn wir für die gegebenen Invarianten Ω, $`\Omega$ (oder $J$, $`J$) und für die gegebene Wahl der Funktionen f, $`f$ aus der $(S, `S)$-invarianten Bedingung (11) z. B. die Beziehung $`\omega = `\omega(\omega)$ bestimmt haben, können wir die Gleichung des Profils $`z = `z(`\omega)$ mit der Gleichung der Basis äquiparametrisieren, so daß $`z = `z(`\omega(\omega)) = {}^{\times}z(\omega)$ ist. Die Gleichung der ζ-Trochoide, als die ζ-Bahnkurve in der Bewegung mit den Polbahnkurven $z(\omega)$, ${}^{\times}z(\omega)$ hat also hinsichtlich zu (7) die Form

$$Z = z + (\zeta - {}^{\times}z) \, \mathrm{d}z : \mathrm{d}^{\times}z (= Z(\omega; \zeta)) ; \tag{12}$$

die Gleichung der Nulltrochoide vereinfacht sich auf

$$Z = z - {}^{\times}z(\mathrm{d}z : \mathrm{d}^{\times}z) (= Z(\omega)) .$$

5. SPEZIELLE AUSWAHL VON Ω, $`\Omega$ UND $f$, $`f$

5.1. Trivialer Fall

Wenn die Basis, bzw. das Profil eine $\mathscr{E}$-Gerade ist, d. h.

$$\Omega = 0 \Leftrightarrow J = 1 , \quad \text{bzw.} \quad `\Omega = 0 \Leftrightarrow `J = 1 ,$$

folgt $f = `f$ aus der äquiparametrisierten Bedingung (11). Es ist also $\omega = `\omega$ auf I und aus der Beziehung $\omega - `\omega = 0$ erhalten wir $\vartheta = 0$ auf I.

Aus der Gleichung der Basis $z'' - \mathrm{j}z' = 0$, bzw. des Profils $`z'' - \mathrm{j}`z' = 0$ (die Striche bedeuten die Ableitungen nach demselben äquiformen Bogen ω) folgt (nach der $\mathscr{E}$-Transformation in der Basis- bzw. Profilebene)

$$z = -\mathrm{j} \exp \mathrm{j}\omega = `z ;$$

die Gleichung der ζ-Trochoide ist

$$Z = \zeta ;$$

die Trochoide reduziert sich auf einen Punkt.

5.2. Basis und Profil sind $\mathscr{E}$-Kreise; Spezialisierung der Funktionen f, $`f$

In dem einfachsten nichttrivialen Fall, in welchem die Basis und das Profil $\mathscr{E}$-Kreise sind, d. h.

$$\Omega = \Omega_0 \neq 0 \Leftrightarrow J = \exp \Omega_0 \omega , \quad \text{bzw.} \quad `\Omega = `\Omega_0 \neq 0 \Leftrightarrow `J = \exp `\Omega_0 `\omega ,$$

gibt die Bedingung (11) die Beziehung

(13) $$\log f(\omega) - \log {}'f({}'\omega) = \Omega_0\omega - {}'\Omega_0{}'\omega\,.$$

Die Äquiparametrisation ist leicht in den Fällen, in welchen die eine oder andere, bzw. beide beliebige Funktionen f, ${}'f$ in der Gleichung (13) von ihrem Argument unabhängig sind, also wenn entweder $f = f_0(>0)$ oder ${}'f = {}'f_0(>0)$, bzw. $f = f_0$, ${}'f = {}'f_0(g_0 = f_0 : {}'f_0 > 0)$ ist.

Im ersten Fall finden wir

$$\omega = (\log f_0 + {}'\Omega_0\omega - \log {}'f(\omega)) : \Omega_0 = \omega({}'\omega)\,,$$

im zweiten

$$'\omega = (\log {}'f_0 + \Omega_0\omega - \log f(\omega)) : {}'\Omega_0 = {}'\omega(\omega)\,.$$

Der erste Fall erlaubt die Spezialisation ${}'\Omega_0 = 0$; ohne Einschränkung setzen wir $f_0 = 1$ so, daß

$$\omega = -(\log {}'f({}'\omega)) : \Omega_0$$

ist.

Der zweite Fall erlaubt die Spezialisation $\Omega_0 = 0$; mit der Wahl ${}'f_0 = 1$ ist

$${}'\omega = -\,(\log f(\omega)) : {}'\Omega_0\,.$$

In dem dritten Fall setzen wir ohne Einschränkung $g_0 = 1$, dann ist

(14) $$\Omega_0\omega - {}'\Omega_0{}'\omega = 0\,.$$

Hinsichtlich der Beziehung (*) und mit der Voraussetzung $\Omega_0 \neq {}'\Omega_0\,(\neq 0)$ finden wir die Ausdrucksweise für $\omega, {}'\omega$ mit dem Winkelparameter ϑ:

(15) $$\omega = -{}'\Omega_0\vartheta : (\Omega_0 - {}'\Omega_0)\,,\quad {}'\omega = -\Omega_0\vartheta : (\Omega_0 - {}'\Omega_0)\,.$$

Für $\Omega_0 = {}'\Omega_0\,(\neq 0)$ folgt aus (14) die Beziehung $\omega - {}'\omega = 0$, d. h. $\vartheta = 0$.

Wenn wir von der invariant ausgedrückten Basis und Profil zu ihren parametrischen Gleichungen übergehen, dann ist

$$z = z_0 + (z_1 \exp{(\Omega_0 + \mathrm{j})\,\omega}) : (\Omega_0 + \mathrm{j})\,,$$

bzw.

$${}'z = {}'z_0 + ({}'z_1 \exp{({}'\Omega_0 + \mathrm{j})\,{}'\omega}) : ({}'\Omega_0 + \mathrm{j})$$

($z_0, z_1 \neq 0, {}'z_0, {}'z_1 \neq 0$ sind die Integrationskonstanten), wo für die einfache Wahl $f = f_0$, ${}'f = {}'f_0$ und das normierte Verhältnis $g_0 = f_0 : {}'f_0 = 1$ (14) gilt. Nach dem Einführen des Winkelsparameters ϑ gilt (15), was wir in der Form

$$\omega = \alpha\vartheta,\ \alpha = -{}'\Omega_0 : (\Omega_0 - {}'\Omega_0)\,;\quad {}'\omega = \beta\vartheta\,,\quad \beta = -\Omega_0 : (\Omega_0 - {}'\Omega_0)$$

schreiben. Daraus folgt die äquiparametrisierte Gleichung der Basis, bzw. des Profils

$$z = z_0 + (z_1 \exp \alpha(\Omega_0 + \mathrm{j})\,\vartheta) : (\Omega_0 + \mathrm{j})\,,$$

bzw.

$${}'z = {}'z_0 + ({}'z_1 \exp \beta({}'\Omega_0 + \mathrm{j})\,\vartheta) : ({}'\Omega_0 + \mathrm{j})$$

und für die ζ-Trochoidengleichung

$$Z = z_0 + (z_1 \exp \alpha(\Omega_0 + \mathrm{j})\, \vartheta) : (\Omega_0 + \mathrm{j}) +$$

$$+ `\Omega_0 z_1 \exp \mathrm{j}\vartheta(\zeta - `z_0 - (`z_1 \exp \beta(`\Omega_0 + \mathrm{j})\, \vartheta) : (`\Omega_0 + \mathrm{j})) : \Omega_0 `z_1 \, .$$

Nach der $\mathscr{E}$-Transformationen in dem Koordinatensystem der Basis und des Profils erhält man die etwas einfachare Form

$$Z = (\exp \alpha(\Omega_0 + \mathrm{j})\, \vartheta) : (\Omega_0 + \mathrm{j}) +$$

$$+ `\Omega_0 \exp \mathrm{j}\vartheta(\zeta - \exp \beta(`\Omega_0 + \mathrm{j})\, \vartheta) : (`\Omega_0 + \mathrm{j})) : \Omega_0 \, .$$

Die parametrische Gleichung der Nulltrochoide ist

$$Z = ((\Omega_0 : (\Omega_0 + \mathrm{j}) - `\Omega_0 : (`\Omega_0 + \mathrm{j})) : \Omega_0) \exp(-\Omega_0(\Omega_0 + \mathrm{j})\, \vartheta : (\Omega_0 - `\Omega_0))$$

(euklidisch die logarithmische Spirale). In diesem (einfachsten!) Fall ist also das Resultat dasselbe wie in dem Fall, in welchem die Basis und das Profil Polkurven der äquivalenten Bewegung waren.

5.3. Spezialisierung der Invarianten Ω_0, $`\Omega_0$

Die Bedingung (13) kann in anderer Hinsicht spezialisiert werden. Sie behält nämlich die Bedeutung auch dann, wenn entweder $\Omega_0 = 0$ ($`\Omega_0 \neq 0$; die Basis ist die $\mathscr{E}$-Gerade) oder $`\Omega_0 = 0$ ($\Omega_0 \neq 0$; das Profil ist die $\mathscr{E}$-Gerade). Der Fall mit $\Omega_0 = `\Omega_0 = 0$ (die Basis als auch das Profil sind $\mathscr{E}$-Geraden) ist trivial.

Im ersten Fall ist

$$f = `f : (\exp `\Omega_0 `\omega) \; (= \varphi(`\omega))$$

und man kann, wenigstens allgemein, $`\omega = `\omega(\omega)$ ausdrücken, wobei

$$\mathrm{d}`\omega : \mathrm{d}\omega = (f' \exp `\Omega_0 `\omega) : (`f' - `\Omega_0 `f)$$

ist (die Striche bedeuten die Ableitungen nach dem zugehörigen äquiformen Bogen).

In der weiteren Spezialisation dieses Falles wählen wir $`f = `f_0$:

$$f = `f_0 : (\exp `\Omega_0 `\omega) \, ; \quad `\omega = (\log(`f_0 : f)) : \Omega_0 = `\omega(\omega) \, ;$$

durch die Wahl $f = f_0$ ist aber schon $`f = f_0 \exp `\Omega_0 `\omega$ bestimmt.

In dem zweiten Fall

$$`f = f : (\exp \Omega_0 \omega) \; (= `\omega(\omega))$$

kann man, wenigstens allgemein), $\omega = \omega(`\omega)$ ausdrücken, wobei

$$\mathrm{d}\omega : \mathrm{d}`\omega = `f'(\exp \Omega_0 \omega) : (f' - \Omega_0 f)$$

ist (die Striche bedeuten wieder die Ableitungen nach dem zugehörigen äquiformen Bogen).

In der weiteren Spezialisation für diesen Fall wählen wir $f = f_0$:

$$`f = f_0 : (\exp \Omega_0 \omega)\,, \quad \omega = (\log f_0 : `f) : \Omega_0 = \omega(`\omega)\,;$$

durch die Wahl $`f = `f_0$ ist schon $f = `f_0 \exp \Omega_0 \omega$ bestimmt.

Noch zu dem Fall, in welchem $\Omega_0 + `\Omega_0 = 0\,(\Omega_0 \neq 0)$ ist, d. h. $J`J = 1$ ($\mathscr{E}$-Analogie des symmetrischen Spiralrollens).

Die Bedingung (13) hat die Form

$$\log (f(\omega) : `f(`\omega)) = \Omega_0(\omega - `\omega)\,,$$

hinsichtlich zut Beziehung (*) ist

$$\log (f(\omega) : `f(`\omega)) = \Omega_0 \vartheta\,.$$

In dem einfachsten Fall $f = f_0$ ist

$$\log (f_0 : `f(`\omega)) = \Omega_0 \vartheta\,,$$

und also, wenigstens allgemein, $`\omega = `\omega(\vartheta)$, $\omega = \vartheta + `\omega(\vartheta)$. Ähnlich für den Fall $`f = `f_0$.

Im Falle $f = f_0$, $`f = `f_0$ ist $\vartheta = \vartheta_0$ (trivial).

Der Übergang von der invarianten Ausdrucksweise zu der parametrischen Gleichung gibt (nach den $\mathscr{E}$-Transformationen in dem Basis- und Profilsystem) im Falle $\Omega_0 = 0$, $`\Omega_0 \neq 0$ $z = -\mathrm{j} \exp \mathrm{j}\omega$, bzw. $`z = (\exp (`\Omega_0 + \mathrm{j})\,`\omega) : (`\Omega_0 + \mathrm{j})$, im Falle $`\Omega_0 = 0$, $\Omega_0 \neq 0$ $z = (\exp (\Omega_0 + \mathrm{j})\,\omega) : (\Omega_0 + \mathrm{j})$, bzw. $`z = -\mathrm{j} \exp \mathrm{j}`\omega$.

Die ζ-Trochoidengleichung, z. B. für die Wahl $`f = `f_0\,(>0)$, wann $`\omega(\omega) = \log (`f_0 : f(\omega)) : `\Omega_0$ ist, oder $f = f_0\,(>0)$, wann $\omega(`\omega) = (\log (f_0 : `f(`\omega)) : \Omega_0$ ist, schreiben wir nicht mehr auf.

6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

In den vorhergehenden Ausführungen haben wir uns nur auf die einfachsten Fälle der invarianten Basis- und Profilgleichungen beschränkt. Man kann aber weitere invariante Gleichungen angeben, die wenigstens als Polkurven des äquivalenten Rollens (also zu demselben Parameter bezogen) nur zu speziellen Ergebnissen führen, wenn sie auch an und für sich interessant sind. In dieser Richtung wollten wir nicht den Beitrag verbreitern.

In der Literatur haben wir nur zwei Arbeiten gefunden, sie sich mit der Frage der äquiformen Trochoiden (und zwar nur in den einfachsten Fällen der Basis und des Profils) befassen. Es ist die Arbeit [3], S. 101–125; trotz der formalen Übereinstimmung mit unseren Resultaten bleibt aber für uns diese Arbeit, die den euklidischen Standpunkt mit dem äquiformen zusammenmischt, beiseite. Die erste, und soweit uns bekannt ist, die einzige Arbeit, die schon aus der Pickschen-Kowalewskischen Verallgemeinerung der Trochoidenbegriffes ausgeht, ist das kurzgefaßte

Beispiel, das in [7] eingeführt wird; die dort gefundenen Ergebnisse stimmen mit unseren überein.

Die Arbeiten [2] und [11], welche die Picksche-Kowalewskische Methode auf die Trochoiden der äquiaffinen Gruppe anwenden, die Arbeit [12], die sich mit den speziellen Fällen der affinen Trochoiden befasst und die Arbeit [5], die zwar aus der vollen affinen Gruppe ausgeht, sich aber zuletzt auf ihre Untergruppen orientiert, ergänzen das uns bekannte Verzeichnis über die Gruppenverallgemeinerung des Rollenbegriffes. Die Arbeit [10] unabhängig von der Dissertation [2] befaßt sich mit dem Rollen auf der zentroaffinen Gruppe (im Kowalewskischen Sinne) und spezialisiert sich dann auf die äquizentroaffine Kinematik. Insbesondere die Arbeiten [2] und [11] zeigen aber, daß das von uns gewählte Verfahren auf in Kinematiken mit anderen Fundamentalgruppen als der Hauptgruppe, anwendbar wäre, wenigstens in solchen, in denen man den Satz über die Äquivalenz der Bewegung mit dem Gruppenrollen formulieren könnte. Aber auch in dieser Richtung wollten wir unseren Beitrag nicht weiter ausdehnen.

Literatur

[1] *V. Arnold':* Математические методы классической механики. Moskva 1979, 2. Aufl. S. 54 und nächste.

[2] *B. Bruder:* Beiträge zur Affingeometrie. Diss. Sächs. TH Dresden 1930.

[3] *A. Carl:* Zur Theorie der ebenen ähnlich veränderlichen Systeme. Diss. TH Dresden 1914.

[4] *K. Drábek, J. Chudý:* Beitrag zur $\mathscr{E}$-Kinematik in der Ebene: Hüllkurven der $\mathscr{E}$-Bewegung. Acta Polytechnica-Práce ČVUT v Praze, 16 (IV, 3, 1976) S. 87—96.

[5] *A. C. Choudhury:* Affine roling of the first kind. Bull. Calcutta Math. Coc. 30 (1938), S. 147—167.

[6] *G. Kowalewski:* Einführung in die Theorie der kontunuierlichen Gruppen. Leipzig 1931, S. 97 u. nächste.

[7] *G. Kowalewski:* Verallgemeinerung des Begriffes der Rollkurven. Erste Mitteilung. Ber. über d. Verhandl. Sächs. Akad. Wissenschaften (Leipzig), Math.-phys. Kl. 81 (1929) 11—19.

[8] *G. Kowalewski:* Veralgemeinerung des Begriffes der Rollkurven. Zweite Mitteilung. Ber über d. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. (Leipzig), Math.-phys. Kl. 81 (1929), 87—110.

[9] *G. Kowalewski:* Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Berlin—Leipzig 1931, S. 172—182.

[10] *O. Mayer, A. Myller:* Géométrie centro-affine différentielle des courbes planes. Ann. Sci. Univ. Jassy 18 (1933), S. 234—280.

[11] *A. Schöttel:* Ein Beitrag zur Rollkurventheorie in allgemeinen Geometrien. Diss. TH München 1961/62.

[12] *J. Tölke:* Affine Trochoidenbewegungen (in Handschrift), 1977, 19 S. *)

*) Erscheinen in Contributions to geometrie. Procedings of the Geometry Symposion in Siegen (FRD), June 28 to Juli 1, 1978 (J. Tölke, J. M. Wills). Basel, Boston, Stuttgart, 1979, 404 p. unter dem Titel: Affine Trochoidenbewegung, 331—362.

Im Zusammenhang mit den Arbeiten über die Theorie der Rollkurven in anderen Geometrien haben wir für geeignet gehalten, bei der Korrektur noch folgende Titel beizufügen:

[13] *G. Kowalewski:* Die Epizykloiden in der Geometrie der Kreisverwandschaften. Tôhoku Math. Journal 34 (1931), S. 130—144.
[14] *W. Ströher.* Zur Kinematik der flächentreuen Affinitäten mit fixem Ursprung. Monatsh. Math. 65 (1961), S. 358—365.

Souhrn

PŘÍSPĚVEK K $\mathscr{E}$-KINEMATICE V ROVINĚ: EKVIVALENCE POHYBU S KOTÁLENÍM, EKVIFORMNÍ TROCHOIDY

KAREL DRÁBEK, ZDENĚK PÍRKO

V předložené práci je nalezena ekviformní analogie ke Cauchyově větě z klasické kinematiky (ekvivalence $\mathscr{K}$-pohybu s $\mathscr{K}$-kotálením). $\mathscr{E}$-kotálení je dáno jako zobrazení pevné čáry (baze) a pohyblivé čáry (profilu) na sebe úměrnými elementy euklidovských oblouků. Výsledek byl především aplikován na případ dvojice polhodií, speciálně na $\mathscr{E}$-analogii cykloidálního pohybu. V případě $\mathscr{E}$-invariantně dané baze i profilu se disponuje výběrem modulu $\mathscr{E}$-kotálení. Po určení ekviformní trochoidy jsou uvedeny nejjednodušší případy pro danou bazi a profil při výběru modulu $\mathscr{E}$-kotálení.

Anschrift der Verfasser: Doc. Dr. *Karel Drábek*, CSc., Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6; Prof. Dr. *Zdeněk Pírko*, DrSc., Katedra řídicí techniky fakulty elektrotechnické ČVUT, Karlovo nám. 13, 120 00 Praha 2.