Ralf Gollmer

Hyperbolische Transformation konvexer Polyeder

Aplikace matematiky, Vol. 26 (1981), No. 3, 171–179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103909

HYPERBOLISCHE TRANSFORMATION KONVEXER POLYEDER

RALF GOLLMER

(Eingegangen 18. December 1978)

In dieser Arbeit wird eine Darstellung des Bildes eines konvexen Polyeders im euklidischen Raum bei einer hyperbolischen Transformation der Form

$$\mathbf{G}: \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha \neq 0\} \to \mathbf{R}^s\,, \quad \mathbf{G}(x) = \frac{Ax + a}{l^{\mathsf{T}}x + \alpha}\,,$$

wobei A eine (s, n)-Matrix, $a \in \mathbf{R}^s$, $l \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$ und $\begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix} \neq 0$ ist, hergeleitet.

Die bekannte Aussage, daß das Bild eines konvexen Polyeders bei einer affinen Transformation wieder ein konvexes Polyeder ist, wobei die Bilder der Ecken und die Bilder der Vektoren in Richtung unbeschränkter Kanten des Urbildpolyeders eine Obermenge der Ecken bzw. der entsprechenden Vektoren des Bildpolyeders sind (vgl. hierzu z. B. Rockafellar [1]), läßt sich in gewisser Weise auf solche hyperbolischen Transformationen, die die affinen als Spezialfall enthalten. verallgemeinern.

Derartige Transformationen werden in der projektiven Geometrie untersucht und aufgrund ihrer Eigenschaft – die für das hier gestellte Problem entscheidend ist – auch als lineare Kollineationen bezeichnet. Das bedeutet, daß diese Transformationen die Lage dreier Punkte auf einer Geraden erhalten. Für die algebraische Untersuchung siehe z. B. van der Waerden [2]. Somit ist klar, daß Halbräume wieder in Halbräume und damit Polyeder im Prinzip wieder in Polyeder übergehen, wobei die Punkte, für die der Nenner Null wird, auf „unendlich ferne Punkte", also im euklidischen Raum auf unbeschränkte Richtungen abgebildet werden.

Das Ziel ist hier die Gewinnung einer berechenbaren Darstellung des Bildes eines beliebigen konvexen Polyeders auf analytischen Wege. Anwendung findet das Resultat z. B. bei speziellen linearen mehrparametrischen Optimierungsproblemen mit Parameters in der Restriktionsmatrix der Form:

$$\left.\begin{aligned} P(\boldsymbol{t}) : \max \{c^{\mathsf{T}} x \mid x \in M(\boldsymbol{t})\}\,, \qquad\qquad & \\ M(\boldsymbol{t}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (A^1 + \boldsymbol{t}a^{0\mathsf{T}})\, x &= b^1 - \boldsymbol{t}b_0 \\ A^2 x &= b^2, x \geqq 0 \end{aligned}\right\},$$

wobei A^1 eine (s, n)-Matrix, A^2 eine $(m - s, n)$-Matrix, $0 < s \leqq m < n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}^s$, $b^1 \in \mathbf{R}^s$, $b^2 \in \mathbf{R}^{m-s}$, $b_0 \in \mathbf{R}$, $a^0 \in \mathbf{R}^n$. Für $P(t)$ läßt sich die zulässige Parametermenge $\mathfrak{L}$ wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{L} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{t \in \mathbf{R}^s \mid M(t) \neq \emptyset\} = \begin{cases} \left[t \in \mathbf{R}^s \;\middle|\; t = \dfrac{-A^1x + b^1}{a^{0\mathsf{T}}x + b_0}, \quad x \in \left[x \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} A^2x = b^2, \\ x \geqq 0 \end{matrix}\right]\right], \\ \qquad \text{falls} \left[\begin{matrix} x \in \mathbf{R}^n \mid A^1x = b^1, A^2x = b^2, \\ x \geqq 0, \quad a^{0\mathsf{T}}x + b_0 = 0 \end{matrix}\right] = \emptyset \\ \mathbf{R}^s \text{ sonst} \end{cases}$$

Durch die Abbildung bestimmter konvexer Polyeder mit der angegebenen hyperbolischen Transformation lassen sich für das Problem $P(t)$ ebenso die lokalen Stabilitätsbereiche konstruieren.

Sei $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ ein konvexes Polyeder. Gesucht ist dann eine Darstellung für die Menge $\mathbf{G}(Q \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha \neq 0\})$. Es seien mit $Q^+ = \{x \in Q \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha > 0\}$, $Q^- = \{x \in Q \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha < 0\}$ die Durchschnitte von Q mit den beiden offenen Halbräumen bezeichnet. Im weiteren werde zunächst Q^+ untersucht.

Um eine explizite Darstellung von Q^+ zu erhalten, wird die Abschließung betrachtet, es ist $\mathrm{cl}\, Q^+ = Q \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha \geqq 0\}$ ein konvexes Polyeder. Die Definition des konvexen Polyeders als Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist wie bekannt (vgl. [1]) äquivalent zur endlichen Erzeugung, d. h. zur Existenz einer Darstellung der Art

$$\mathrm{cl}\, Q^+ = \left[\begin{matrix} x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum\limits_{i=1}^{r_1} \lambda_i w^i + \sum\limits_{j=1}^{r_2} \mu_j h^j, \ \sum\limits_{i=1}^{r_1} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i \geqq 0, \ i = 1, \ldots, r_1, \\ \mu_j \geqq 0, \ j = 1, \ldots, r_2 \end{matrix}\right],$$

wobei r_1, r_2 natürliche Zahlen, $w^i \in \mathbf{R}^n$, $h^j \in \mathbf{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ und $\mu_j \in \mathbf{R}$ ist. Wegen $Q^+ \subseteq$ $\subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathsf{T}}x + \alpha \geqq 0\}$ ist $l^{\mathsf{T}}w^i + \alpha \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, r_1$. Außerdem ist $l^{\mathsf{T}}h^j \geqq 0$ für $j = 1, \ldots, r_2$, würde ein $j_0 \in \{1, \ldots, r_2\}$ existieren mit $l^{\mathsf{T}}h^{j_0} < 0$, so ließe sich ein μ_{j_0} so groß finden, daß $l^{\mathsf{T}}x(\mu_{j_0}) + \alpha = l^{\mathsf{T}}(x^0 + \mu_{j_0}h^{j_0}) + \alpha = (l^{\mathsf{T}}x^0 + \alpha) +$ $+ \mu_{j_0}l^{\mathsf{T}}h^{j_0} < 0$ wobei $x(\mu_{j_0}) = x^0 + \mu_{j_0}h^{j_0} \in \mathrm{cl}\, Q^+$ für $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q^+$ beliebig fest und $\mu_{j_0} \geqq 0$.

Es werden die folgenden Indexmengen vereinbart:

$$I_0 = \{i \in \{1, \ldots, r_1\} \mid l^{\mathsf{T}}w^i + \alpha = 0\}, \quad I_1 = \{1, \ldots, r_1\} \setminus I_0,$$

$$J_0 = \{j \in \{1, \ldots, r_2\} \mid l^{\mathsf{T}}h^j = 0\}, \qquad J_1 \{1, \ldots, r_2\} \setminus J_0.$$

Wie man leicht sieht, ist dann:

$$Q^+ = \left[\begin{array}{l} x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{k\in I_0} \lambda_k w^k + \sum_{i\in I_1} \lambda_i w^i + \sum_{q\in J_0} \mu_q h^q + \sum_{j\in J_1} \mu_j h^j, \\ \qquad \sum_{k\in I_0} \lambda_k + \sum_{i\in I_1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqq 0\ i \in I_0 \cup I_1, \\ \qquad \sum_{i\in I_1} \lambda_i + \sum_{j\in J_1} \mu_j > 0,\ \mu_j \geqq 0\ j \in J_0 \cup J_1 \end{array}\right]$$

Sei $x \in Q^+$ beliebig, so ist:

$$\mathbf{G}x = \frac{Ax + a}{l^{\mathsf{T}}x + \alpha} =$$

$$= \frac{\sum_{k\in I_0} \lambda_k(Aw^k + a) + \sum_{i\in I_1} \lambda_i(Aw^i + a) + \sum_{q\in J_0} \mu_q(Ah^q) + \sum_{j\in J_1} \mu_j(Ah^j)}{\sum_{i\in I_1} \lambda_i(l^{\mathsf{T}}w^i + \alpha) + \sum_{j\in J_1} \mu_j(l^{\mathsf{T}}h^j)}$$

$$= \sum_{k\in I_0} \delta_k(Aw^k + a) + \sum_{i\in I_1} \alpha_i \left(\frac{Aw^i + a}{l^{\mathsf{T}}w^1 + \alpha}\right) + \sum_{q\in J_0} \gamma_q(Ah^q) + \sum_{j\in J_1} \beta_j \left(\frac{Ah^j}{l^{\mathsf{T}}h^j}\right)$$

mit

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i(l^{\mathsf{T}}w^i + \alpha)}{\sum_{r\in I_1} \lambda_r(l^{\mathsf{T}}w^r + \alpha) + \sum_{p\in J_1} \mu_p l^{\mathsf{T}}h^p}$$

$$\beta_j = \frac{\mu_j l^{\mathsf{T}}h^j}{\sum_{r\in I_1} \lambda_r(l^{\mathsf{T}}w^r + \alpha) + \sum_{p\in J_1} \mu_p l^{\mathsf{T}}h^p}$$

$$\gamma_q = \frac{\mu_q}{\sum_{r\in I_1} \lambda_r(l^{\mathsf{T}}w^r + \alpha) + \sum_{p\in J_1} \mu_p l^{\mathsf{T}}h^p}$$

$$\delta_k = \frac{\lambda_k}{\sum_{r\in I_1} \lambda_r(l^{\mathsf{T}}w^r + \alpha) + \sum_{p\in J_1} \mu_p l^{\mathsf{T}}h^p}$$

Nun werden die Wertebereiche der so definierten Funktionen α_i, β_j, γ_q, δ_k von λ_i und μ_j untersucht. Sei bezeichnet $N = \sum_{r\in I_1} \lambda_r(l^{\mathsf{T}}w^r + \alpha) + \sum_{p\in J_1} \mu_p l^{\mathsf{T}}h^p$. Es gilt:

1. $0 \leqq \alpha_i$ für $i \in I_1$, da $l^{\mathsf{T}}w^i + \alpha > 0$, $N > 0$ und $\lambda_i \geqq 0$,

2. $0 \leqq \beta_j$ für $j \in J_1$, da $l^{\mathsf{T}}h^j > 0$, $N > 0$ und $\mu_j \geqq 0$,

3. $$\sum_{i\in I_1}\alpha_i + \sum_{j\in J_1}\beta_j = \sum_{i\in I_1}\frac{\lambda_i(l^{\mathsf T}w^i + \alpha)}{N} + \sum_{j\in J_1}\frac{\mu_j l^{\mathsf T}h^j}{N} = 1$$

4. $0 \leqq \gamma_q$ für $q \in J_0$, da $N > 0$ und $\mu_q \geqq 0$,

5. $0 \leqq \delta_k$ für $k \in I_0$, da $N > 0$ und $\lambda_k \geqq 0$,

6. $$\sum_{k\in I_0}\delta_k + \sum_{i\in I_1}\alpha_i = \frac{\sum_{k\in I_0}\lambda_k + \sum_{i\in I_1}\lambda_i(l^{\mathsf T}w^i + \alpha)}{N} > 0$$

wegen $\sum_{k\in I_0}\lambda_k + \sum_{i\in I_1}\lambda_i = 1$ und $l^{\mathsf T}w^i + \alpha > 0,\ i \in I_1$.

Somit ist gezeigt, daß gilt:

Lemma 1. $$\mathbf{G}(Q^+) \subseteq \left[\begin{aligned} & y \in \mathbf{R}^s \,\Big|\, y = \sum_{i\in I_1}\alpha_i\left(\frac{Aw^i + a}{l^{\mathsf T}w^i + \alpha}\right) + \sum_{j\in J_1}\beta_j\left(\frac{Ah^j}{l^{\mathsf T}h^j}\right) + \\ & \qquad + \sum_{q\in J_0}\gamma_q(Ah^q) + \sum_{k\in I_0}\delta_k(Aw^k + a), \\ & \qquad \alpha_i \geqq 0\ i \in I_1,\ \beta_j \geqq 0\ j \in J_1, \\ & \qquad \gamma_q \geqq 0\ q \in J_0,\ \delta_k \geqq 0\ k \in I_0, \\ & \qquad \sum_{i\in I_1}\alpha_i + \sum_{j\in J_1}\beta_j = 1, \\ & \qquad \sum_{i\in I_1}\alpha_i + \sum_{k\in I_0}\delta_k > 0 \end{aligned}\right]$$

Um die Gleichheit beider Mengen zu zeigen wird zunächst bewiesen, daß das Bild der konvexen Menge Q^+ konvex ist.

Lemma 2. *Sei $M \subseteq \mathbf{R}^n$ konvex, $M \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathsf T}x + \alpha > 0\}$, so ist $\mathbf{G}(M) \subseteq \mathbf{R}^s$ konvex.*

Beweis. Seien a^1, $a^2 \in \mathbf{G}(M)$ beliebig, $\lambda \in [0, 1]$ ebenfalls beliebig. Wegen a^1, $a^2 \in \mathbf{G}(M)$ existieren $b^1 \in M$ und $b^2 \in M$ mit $a^1 = \mathbf{G}(b^1)$, $a^2 = \mathbf{G}(b^2)$. Es gilt $l^{\mathsf T}b^1 + \alpha > 0$, $l^{\mathsf T}b^2 + \alpha > 0$. Es ist dann

$$\mu = \frac{\lambda(l^{\mathsf T}b^2 + \alpha)}{\lambda(l^{\mathsf T}b^2 + \alpha) + (1 - \lambda)(l^{\mathsf T}b^1 + \alpha)} \in [0, 1]$$

und somit, da M konvex ist, $\mu b^1 + (1 - \mu)\, b^2 \in M$. Wie man leicht sieht, ist $\mathbf{G}(\mu b^1 + (1 - \mu)\, b^2) = \lambda\, \mathbf{G}(b^1) + (1 - \lambda)\, \mathbf{G}(b^2) = \lambda a^1 + (1 - \lambda)\, a^2$, und damit ist gezeigt, daß $\lambda\, a^1 + (1 - \lambda)\, a^2 \in \mathbf{G}(M)$ gilt. q.e.d.

Sei nun das beschränkte konvexe Polyeder $P_2(\varrho_1, \varrho_2)$ betrachtet:

$$P_2(\varrho_1,\varrho_2) = \left[\begin{array}{l} y \in \mathbf{R}^s \,\middle|\, y = \sum\limits_{i\in I_1} \alpha_i \left(\dfrac{Aw^i + a}{l^\mathsf{T} w^i + \alpha}\right) + \sum\limits_{j\in J_1} \beta_j \left(\dfrac{Ah^j}{l^\mathsf{T} h^j}\right) + \\ \quad + \sum\limits_{q\in J_0} \gamma_q (Ah^q) + \sum\limits_{k\in I_0} \delta_k (Aw^k + a)\,, \\ \quad \alpha_i \geqq 0 \;\; i \in I_1, \;\; \sum\limits_{i\in I_1} \alpha_i + \sum\limits_{j\in J_1} \beta_j = 1, \\ \quad \beta_j \geqq 0 \;\; j \in J_1, \\ \quad \gamma_q \geqq 0 \;\; q \in J_0, \;\; \sum\limits_{i\in I_1} \alpha_i + \sum\limits_{k\in I_0} \delta_k \geqq \varrho_1, \\ \quad \delta_k \geqq 0 \;\; k \in I_0, \\ \qquad\qquad \sum\limits_{q\in J_0} \gamma_q + \sum\limits_{k\in I_0} \delta_k \leqq \varrho_2 \end{array} \right]$$

mit $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 \geqq 0$ beliebig. $P_2(\varrho_1, \varrho_2)$ ist das Bild des beschränkten konvexen Polyeders

$$P_1(\varrho_1, \varrho_2) = \left[\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r_1 + r_2 + 2} \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha_i \geqq 0 \;\; i \in I_1, \;\; \beta_j \geqq 0 \;\; j \in J_1 \;\;\; \xi_1 \geqq 0, \\ \gamma_q \geqq 0 \;\; q \in J_0, \;\; \delta_k \geqq 0 \;\; k \in I_0, \;\; \xi_2 \geqq 0, \\ \sum\limits_{i\in I_1} \alpha_i + \sum\limits_{j\in J_1} \beta_j = 1\,, \\ \sum\limits_{i\in I_1} \alpha_i + \sum\limits_{k\in I_0} \delta_k - \xi_1 = \varrho_1\,, \\ \sum\limits_{q\in J_0} \gamma_q + \sum\limits_{k\in I_0} \delta_k + \xi_2 = \varrho_2 \end{array} \right]$$

bei einer linearen Transformation und somit ist die Menge der Ecken von $P_2(\varrho_1, \varrho_2)$ eine Teilmenge der Bilder der Ecken von $P_1(\varrho_1, \varrho_2)$. Um zu zeigen, daß $P_2(\varrho_1, \varrho_2) \subseteq \subseteq \mathbf{G}(Q^+)$, genügt es wegen der Konvexität von $\mathbf{G}(Q^+)$ zu zeigen, daß alle Ecken von $P_2(\varrho_1, \varrho_2)$ Urbilder in Q^+ besitzen. Dazu ist nach dem Obigen zu zeigen, daß alle Ecken von $P_1(\varrho_1, \varrho_2)$ sich mittels der aufgeführten Funktionen aus den Koeffizienten λ_i, μ_j von Punkten aus Q^+ darstellen lassen.

Sei nun die Menge aller Ecken von $P_1(\varrho_1, \varrho_2)$ betrachtet, die man über den Zusammenhang zwischen den Ecken und den zulässigen Basislösungen erhält. Bei einer Basislösung sind hier genau drei der Variablen α_i, β_j, γ_q, δ_k, ξ_1 und ξ_2 Basisvariable. Durch die einfache Struktur der zu den Restriktionsgleichungen gehörenden Matrix lassen sich alle möglichen Kombinationen von Basisvariablen sofort angeben:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \xi_1 & \xi_2 \\ 1\ldots1 & 0\ldots0 & 1\ldots1 & 1\ldots1 & -1 & 0 \\ 1\ldots1 & 1\ldots1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0 & 0 \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & 1\ldots1 & 1\ldots1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basisvariable:		Werte der Basisvariablen:
1)	α_{i_0} β_{j_0}, γ_{q_0}	$\alpha_{i_0} = \varrho_1$, $\beta_{j_0} = 1 - \varrho_1$, $\gamma_{q_0} = \varrho_2$
2)	α_{i_0}, β_{j_0}, δ_{k_0}	$\alpha_{i_0} = \varrho_1 - \varrho_2$. $\beta_{j_0} = 1 - \varrho_1 + \varrho_2$, $\delta_{k_0} = \varrho_2$
3)	α_{i_0} β_{j_0}, ξ_2	$\alpha_{i_0} = \varrho_1$, $\beta_{j_0} = 1 - \varrho_1$, $\xi_2 = \varrho_2$
4)	α_{i_0}, γ_{q_0}, δ_{k_0}	$\alpha_{i_0} = 1$, $\gamma_{q_0} = \varrho_2 - \varrho_1 + 1$, $\delta_{k_0} = \varrho_1 - 1$
5)	α_{i_0}, γ_{q_0}, ξ_1	$\alpha_{i_0} = 1$, $\gamma_{q_0} = \varrho_2$, $\xi_1 = 1 - \varrho_1$
6)	α_{i_0}, δ_{k_0}, ξ_1	$\alpha_{i_0} = 1$, $\delta_{k_0} = \varrho_2$, $\xi_1 = \varrho_2 - \varrho_1 + 1$
7)	α_{i_0}, δ_{k_0}, ξ_2	$\alpha_{i_0} = 1$, $\delta_{k_0} = \varrho_1 - 1$, $\xi_2 = \varrho_2 - \varrho_1 + 1$
8)	α_{i_0}, ξ_1, ξ_2	$\alpha_{i_0} = 1$, $\xi_1 = 1 - \varrho_1$, $\xi_2 = \varrho_2$
9)	β_{j_0}, γ_{q_0}, δ_{k_0}	$\beta_{j_0} = 1$, $\gamma_{q_0} = \varrho_2 - \varrho_1$, $\delta_{k_0} = \varrho_1$
10)	β_{j_0}, γ_{q_0}, ξ_1	$\beta_{j_0} = 1$, $\gamma_{q_0} = \varrho_2$, $\xi_1 = -\varrho_1$
11)	β_{j_0}, δ_{k_0} ξ_1	$\beta_{j_0} = 1$, $\delta_{k_0} = \varrho_2$, $\xi_1 = \varrho_2 - \varrho_1$
12)	β_{j_0}, δ_{k_0}, ξ_2	$\beta_{j_0} = 1$, $\delta_{k_0} = \varrho_1$, $\xi_2 = \varrho_2 - \varrho_1$
13)	β_{j_0}, ξ_1, ξ_2	$\beta_{j_0} = 1$, $\xi_1 = -\varrho_1$, $\xi_2 - \varrho_2$

Die ermittelten Basislösungen können bis auf 10) und 13) unter bestimmten Voraussetzungen an ϱ_1 und ϱ_2 für $\varrho_1 > 0$ und $\varrho_2 \geqq 0$ zulässig sein. Für die Ecken von $P_2(\varrho_1, \varrho_2)$ mit diesen Koeffizienten werden jetzt die Koeffizienten der Urbilder in Q^+ angegeben.

zu 1) $\lambda_{i_0} = 1, \lambda_i = 0 \; i \neq i_0, \mu_j = 0 \; j \neq j_0 \; j \neq q_0,$

$$\mu_{j_0} = \frac{(1 - \varrho_1)(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}{\varrho_1 l^{\mathsf{T}} h^{j_0}}$$

$$\mu_{q_0} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)$$

zu 2) $\lambda_{i_0} = 1 - \lambda_{k_0}, \lambda_{k_0} = \dfrac{\varrho_2(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}{\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_2(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}, \quad \lambda_i = 0 \; i \neq i_0, \; i \neq k_0$

$$\mu_{j_0} = \frac{(1 + \varrho_2 - \varrho_1)(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}{(\varrho_1 + \varrho_2(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha) - \varrho_2)\, l^{\mathsf{T}} h^{j_0}}, \quad \mu_j = 0 \; j \neq j_0$$

zu 3) $\lambda_{i_0} = 1, \lambda_i = 0 \; i \neq i_0, \; \mu_j = 0 \; j \neq j_0,$

$$\mu_{j_0} = \frac{(1 - \varrho_1)(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}{\varrho_1 l^{\mathsf{T}} h^{j_0}}$$

zu 4) $\lambda_{i_0} = \dfrac{1}{1 + (\varrho_1 - 1)(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}, \quad \lambda_{k_0} = 1 - \lambda_{i_0}, \; \lambda_i = 0 \; i \neq i_0, \; i \neq k_0$

$$\mu_{q_0} = (\varrho_2 - \varrho_1 + 1)\frac{(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}{1 + (\varrho_1 - 1)(l^{\mathsf{T}} w^{i_0} + \alpha)}, \quad \mu_j = 0 \quad j \neq q_0$$

zu 5) $\lambda_{i_0} = 1,\ \lambda_i = 0\ i \neq i_0,\ \mu_j = 0\ j \neq q_0,$

$$\mu_{q_0} = \varrho_2(l^{\mathrm{T}} w^{i_0} + \alpha)$$

zu 6) $\lambda_{i_0} = \dfrac{1}{1 + \varrho_2(l^{\mathrm{T}} w^{i_0} + \alpha)},\quad \lambda_{k_0} = 1 - \lambda_{i_0},\ \lambda_i = 0\ i \neq i_0\ i \neq k_0,$

$$\mu_j = 0\ j \in J_0 \cup J_1$$

zu 7) $\lambda_{i_0} = \dfrac{1}{1 + (\varrho_1 - 1)(l^{\mathrm{T}} w^{i_0} + \alpha)},\quad \lambda_{k_0} = 1 - \lambda_{i_0},$

$$\lambda_i = 0\ i \neq i_0\ i \neq k_0,\ \mu_j = 0\, j \in J_0 \cup J_1$$

zu 8) $\lambda_{i_0} = 1,\ \lambda_i = 0\ i \neq i_0,\ \mu_j = 0\ j \in J_0 \cup J_1$

zu 9) $\lambda_{k_0} = 1,\ \lambda_i = 0\ i \neq k_0,\ \mu_j = 0\ j \neq j_0\ j \neq q_0,$

$$\mu_{j_0} = \frac{1}{\varrho_1 l^{\mathrm{T}} h^{j_0}},\quad \mu_{q_0} = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1}$$

zu 11) $\lambda_{k_0} = 1,\ \lambda_i = 0\ i \neq k_0,\ \mu_{j_0} = \dfrac{1}{\varrho_2 l^{\mathrm{T}} h^{j_0}},\ \mu_j = 0\ j \neq j_0$

zu 12) $\lambda_{k_0} = 1,\ \lambda_i = 0\ i \neq k_0,\ \mu_j = 0\ j \neq j_0,\ \mu_{j_0} = \dfrac{1}{\varrho_1 l^{\mathrm{T}} h^{j_0}}$

Wie man leicht überprüfen kann, sind die zu den angegebenen Koeffizienten zugehörigen Punkte Urbilder der entsprechenden Basislösungen von $\mathrm{P}_2(\varrho_1, \varrho_2)$ und sie liegen in der Menge Q^+, wenn die zugehörige Basislösung in $\mathrm{P}_2(\varrho_1, \varrho_2)$ liegt. Es gilt somit wegen der Konvexität von $\mathbf{G}(Q^+)$ das folgende Lemma:

Lemma 3. *Es ist* $\mathrm{P}_2(\varrho_1, \varrho_2) \subseteq \mathbf{G}(Q^+)$ *für alle* $\varrho_1 > 0,\ \varrho_2 \geqq 0.$

Nun folgt sofort der folgende Satz:

Satz 1. *Das Bild der Menge Q^+ bei der hyperbolischen Transformation $\mathbf{G}$ ist eine konvexe Menge, deren Abschließung ein konvexes Polyeder ist und hat die Darstellung*

$$\mathbf{G}(Q^+) = \left[\begin{array}{l} y \in \mathbf{R}^s \mid y = \sum_{i \in I_1} \alpha_i \left(\dfrac{Aw^i + a}{l^{\mathrm{T}} w^i + \alpha}\right) + \sum_{j \in J_1} \beta_j \left(\dfrac{Ah^j}{l^{\mathrm{T}} h^j}\right) + \\ \qquad + \sum_{q \in J_0} \gamma_q (Ah^q) + \sum_{k \in I_0} \delta_k (Aw^k + a), \\ \qquad \alpha_i \geqq 0\ i \in I_1,\ \beta_j \geqq 0\ j \in J_1 \\ \qquad \gamma_q \geqq 0\ q \in J_0,\ \delta_k \geqq 0\ k \in I_0, \\ \qquad \sum_{i \in I_1} \alpha_i + \sum_{j \in J_1} \beta_j = 1, \\ \qquad \sum_{i \in I_1} \alpha_i + \sum_{k \in I_0} \delta_k > 0 \end{array}\right].$$

Beweis. Die Beziehung „$\subseteq$" gilt nach Lemma 1. Sei nun ein beliebiger Punkt y^0 mit der angegebenen Darstellung gegeben, seine Koeffizienten seien $(\alpha^{0\mathrm{T}}, \beta^{0\mathrm{T}}, \gamma^{0\mathrm{T}}, \delta^{0\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Es ist dann aufgrund der Bedingungen in der Darstellung

$$\varepsilon_1 = \sum_{i \in I_1} \alpha_i^0 + \sum_{k \in I_0} \delta_k^0 > 0, \quad \varepsilon_2 = \sum_{q \in J_0} \gamma_q^0 + \sum_{k \in I_0} \delta_k^0 \geqq 0 .$$

Damit ist $y^0 \in P_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subseteq \mathbf{G}(Q^+)$ nach Lemma 3, also gilt auch die andere Enthalteinsbeziehung und somit die Gleichheit der Mengen. q.e.d.

Analog erhält man:

Satz 2. *Die Menge* $\mathbf{G}(Q^-)$ *hat die folgende Darstellung*:

$$\mathbf{G}(Q^-) = \left[\begin{array}{l} y \in \mathbf{R}^s \mid y = \sum\limits_{i \in K_1} \alpha_i \left(\dfrac{Au^i + a}{l^{\mathrm{T}} u^i + \alpha} \right) + \sum\limits_{j \in L_1} \beta_j \left(\dfrac{Ak^j}{l^{\mathrm{T}} k^j} \right) + \\ \qquad + \sum\limits_{k \in K_0} \delta_k (-Au^k - a) + \sum\limits_{q \in L_0} \gamma_q (-Ak^q), \\ \qquad \alpha_i \geqq 0 \ i \in K_1, \ \beta_j \geqq 0 \ j \in L_1, \\ \qquad \gamma_q \geqq 0 \ q \in L_0, \ \delta_k \geqq 0 \ k \in K_0, \\ \qquad \sum\limits_{i \in K_1} \alpha_i + \sum\limits_{k \in K_0} \delta_k > 0, \\ \qquad \sum\limits_{i \in K_1} \alpha_i + \sum\limits_{j \in L_1} \beta_j = 1 \end{array} \right]$$

dabei bezeichnen u^i, k^j die entsprechenden Punkte bzw. Vektoren in der Darstellung von Q^- und die Indexmengen sind folgendermaßen definiert:

$$K_0 = \{ i \in \{1, \ldots, p_1\} \mid l^{\mathrm{T}} u^i + \alpha = 0 \}, \quad K_1 = \{1, \ldots, p_1\} \setminus K_0 ,$$

$$L_0 = \{ j \in \{1, \ldots, p_2\} \mid l^{\mathrm{T}} k^j = 0 \}, \quad L_1 = \{1, \ldots, p_2\} \setminus L_0 ,$$

wobei p_1 die Anzahl der in der Darstellung von Q^- auftretenden Punkte, p_2 die der Vektoren unbeschränkter Richtungen ist.

Corollar. *Die Menge* $\mathbf{G}(Q \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathrm{T}} x + \alpha \neq 0\})$ *ist die Vereinigung zweier Mengen, deren Abschließung jeweils ein konvexes Polyeder ist. Die Vereinigung der Abschließungen von* $\mathbf{G}(Q^+)$ *und* $\mathbf{G}(Q^-)$ *braucht im Allgemeinen nicht zusammenhängend zu sein.*

Aufgrund der Kollinearität und der Stetigkeit der hyperbolischen Abbildung über der Menge $\{x \in \mathbf{R}^n \mid l^{\mathrm{T}} x + \alpha \neq 0\}$ läßt sich die im folgenden Satz ausgedrückte Eigenschaft analog wie für lineare Abbildungen ([1], Theorem 6.6) beweisen.

Satz 3. *Sei $M \subseteq \mathbf{R}^n$ konvex, $M \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid l^T x + \alpha \neq 0\}$, so gilt für die hyperbolische Abbildung $\mathbf{G}$:*

$\mathbf{G}(\operatorname{rel\,int} M) = \operatorname{rel\,int}(\mathbf{G}(M))$.

Literatur

[1] *R. T. Rockafellar*: Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton 1970.

[2] *B. L, van der Waerden*: Einführung in die algebraische Geometrie. Springer, Berlin 1939.

Der Autor möchte an dieser Stelle Herrn Dr. K. Tammer für die wertvollen Anregungen und Hinweise bei der Vorbereitung dieses Artikels danken.

Souhrn

HYPERBOLICKÉ TRANFORMACE KONVEXNÍCH MNOHOSTĚNŮ

RALF GOLLMER

Článek se zabývá některými vlastnostmi hyperbolických, tj. lomených afinních, transformací, které mají význam pro obrazy konvexních mnohostěnů při takových transformacích. Je získáno explicitní vyjádření obrazu konvexního mnohostěnu pomocí vrcholů a hran vzorového mnohostěnu, je vyšetřena konvexnost obrazu a obraz relativního vnitřku konvexní množiny.

Anschrift des Verfassers: Dr. rer. nat. *Ralf Gollmer*, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, DDR — 1086 Berlin, PSF 1297.