Libuše Grygarová

Asymptotische Berührung k-ter Ordnung konvexer Mengen

Aplikace matematiky, Vol. 25 (1980), No. 3, 209–220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103852

SVAZEK 25 (1980) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ASYMPTOTISCHE BERÜHRUNG k-TER ORDNUNG KONVEXER MENGEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen 20. Januar 1978)

In verschiedenen Optimalitätsproblemen der konvexen Optimierung, die heutzutage sinnvolle Anwendungen in der ökonomischen Praxis finden mögen, kommen auch solche Fälle in Frage, wo das entsprechende Minimumproblem zwar unlösbar ist, jedoch ein endliches Infimum vorhanden ist. Eine qualitative Untersuchung solcher Aufgaben hat einen Sinn nicht nur als ein Beitrag zur Ergänzung der Theorie der konvexen Optimierung, sondern auch für eine numerische Lösung konkreter Probleme. Was die mathematische Modelle in der Ökonomie betrifft, so geht es am meistens um den kleinsten Wert der Zielfunktion und nicht um die Bestimmung eines konkreten Optimalpunktes. Der Verfasser hat hier die Absicht einen tieferen Einblick in die geometrische Struktur der Probleme des fraglichen Typs vorzulegen (im Gegensatz von dem analytischen Zugang anderer Autoren, z. B. [1]) mit der Angabe ihrer vollständigen Klassifikation.

Dieser Artikel schliesst unmittelbar an die Arbeit [2] an. In [2] geht es um den Begriff der asymptotischen Berührung in bestimmter Richtung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\boldsymbol{E}_n$, um ihre geometrische Charakteristik und um die Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für diese asymptotische Berührung. In der vorgelegten Arbeit geht es dagegen um einen allgemeineren Begriff der asymptotischen Berührung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ mit der Zielstellung diesen allgemeineren Begriff wiederum geometrisch zu charakterisieren und ihn in Zusammenhang mit dem Begriff der asymptotischen Berührung aus [2] zu bringen. Offenbar ist es natürlich die asymptotische Berührung von zwei konvexen, abgeschlossenen Mengen als einen ihren Zustand zu definieren, wo ihr Durchschnitt leer und der Abstand gleich Null ist. In diesem Falle brauchen aber die fraglichen Mengen nicht eine asymptotische Berührung in bestimmter Richtung im Sinne der Arbeit [2], zu besitzen. Es werden hier notwendige und hinreichende Bedingungen, unter welchen die beiden Auffassungen der asymptotischen Berührung äquivalent sind, abgeleitet. Eine asymptotische Berührung in der allgemeinen Auffassung wird durch ein Tripel von natürlichen Zahlen eindeutig charakterisiert (die Ordnung der Berührung, der Grad der Berührung und die Dimension des zugehörigen asymptotischen linearen Raumes). Die angeführten Beispiele illustrieren einige einfache, typische Fälle. Die Symbolik, sowie die hier benutzten Begriffe wurden aus der Arbeit [2], derer Ergebnisse eine Grundlage für die Entwicklung der Theorie und die Beweisführung darstellen, übernommen. Man geht hier auch von bekannten, elementaren Kenntnissen der konvexen Analysis, insbesondere von den Eigenschaften der Recessionskegel von konvexen Mengen, die in den bekannten Monografien (z. B. [3], [4]) angeführt sind, aus.

Lemma 1. *Es seien* ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ *konvexe, abgeschlossene Mengen in* $\mathbf{E}_n$ *mit* ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ *und* $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ [1]) *für alle* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt zugleich*

$$O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_1\mathbf{M} \neq \emptyset \quad \textit{für alle} \quad \varepsilon > 0 .$$

Beweis. Wählen wir $\varepsilon > 0$ und ${}_2\mathbf{x} \in O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M}$ beliebig. Nach der Voraussetzung ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ folgt daraus ${}_2\mathbf{x} \notin {}_1\mathbf{M}$. Für den Abstand $\varrho({}_2\mathbf{x}; {}_1\mathbf{M})$ des Punktes ${}_2\mathbf{x}$ von der Menge ${}_1\mathbf{M}$ gilt dann $0 < \varrho({}_2\mathbf{x}; {}_1\mathbf{M}) < \varepsilon$. Wegen ${}_1\mathbf{M} = \operatorname{cl} {}_1\mathbf{M}$, [2]) gibt es einen Punkt ${}_1\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}$ mit $\varrho({}_2\mathbf{x}; {}_1\mathbf{M}) = \varrho({}_2\mathbf{x}; {}_1\mathbf{x}) = \|{}_2\mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}\| < \varepsilon$ und daher gilt ${}_1\mathbf{x} \in O({}_2\mathbf{x}; \varepsilon)$. Wegen $O({}_2\mathbf{x}; \varepsilon) \subset O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon)$, gilt dann ${}_1\mathbf{x} \in O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon)$ und da ${}_1\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}$ ist, folgt daraus $O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_1\mathbf{M} \neq \emptyset$.

Bemerkung 1. Nach dem Beweis von Lemma 1 ist ${}_1\mathbf{x} \in O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon)$, ${}_1\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}$, ${}_1\mathbf{x} \in O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon)$ und daher ${}_1\mathbf{x} \in O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon)$. Eine ähnliche Aussage gilt offenbar auch für ${}_2\mathbf{x} \in {}_2\mathbf{M}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält daher die Menge

$$\mathbf{N}_\varepsilon \equiv O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap O({}_2\mathbf{M}; \varepsilon)$$

Punkte der Menge ${}_1\mathbf{M}$ und der Menge ${}_2\mathbf{M}$. Offenbar gilt auch $\dim \mathbf{N}_\varepsilon = n$.

Lemma 2. *Falls* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen in* $\mathbf{E}_n$ *sind, so gilt*

$$\begin{gathered}{}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset , \quad O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset \quad \textit{für alle} \quad \varepsilon > 0 \Leftrightarrow {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset , \\ \varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0 .\end{gathered}$$

Beweis. Nach dem Beweis von Lemma 1 gibt es für beliebige Wahl $\varepsilon > 0$ Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ mit $\varrho({}_1\mathbf{x}; {}_2\mathbf{x}) < \varepsilon$ und somit $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$. Ist andererseits ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$, so gibt es einen Punkt $\mathbf{x}' \in {}_2\mathbf{M}$ mit $\varrho(\mathbf{x}'; {}_1\mathbf{M}) < \varepsilon$ und daher $\mathbf{x}' \in O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. Daher gilt $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$.

---

[1]) $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \varrho(\mathbf{x}; {}_1\mathbf{M}) \equiv \inf_{\mathbf{y} \in {}_1\mathbf{M}} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\} < \varepsilon\}$ ist die sogenante ε-Umgebung der Menge ${}_1\mathbf{M}$.

[2]) Wir bezeichnen mit dem Symbol $\operatorname{cl} \mathbf{M}$ die Abschliessung der Menge $\mathbf{M}$.

Lemma 3. *Unter den Voraussetzungen vom Lemma 1 gilt*

$$1 \leqq d \equiv \dim\left({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}\right) \leqq n - 1\,.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Menge $O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M}$ unbeschränkt ist. Um den Beweis indirekt zu führen, setzen wir voraus, dass es mindestens ein $\varepsilon_0 > 0$ so gibt, dass die Menge $O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_0) \cap {}_2\boldsymbol{M}$ beschränkt ist. Sei $\{\varepsilon_k\}$ eine beliebige Zahlenfolge mit

$$0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k < \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots)\,, \quad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$$

und ${}_k\boldsymbol{x} \in O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_k) \cap {}_2\boldsymbol{M}$ beliebig gewählt. Offenbar gilt

$$O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_{k+1}) \underset{+}{\subset} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_k) \underset{+}{\subset} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_0) \quad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

Die kompakte Menge cl $O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_0) \cap {}_2\boldsymbol{M}$ enthält daher die unendliche Anzahl von Punkten ${}_k\boldsymbol{x}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und nach dem bekannten Satz aus der Analysis gibt es einen Häufungspunkt $\boldsymbol{x}'$, der Folge ${}_k\boldsymbol{x}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ für den $\boldsymbol{x}' \in \operatorname{cl} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_0) \cap$ $\cap\, {}_2\boldsymbol{M}$ ist. Da

$$\boldsymbol{x}' \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_k) \cap {}_2\boldsymbol{M}\right) = {}_2\boldsymbol{M} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} ({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_k)\right)$$

und

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon_k) = {}_1\boldsymbol{M}$$

gilt, ergibt sich daraus $\boldsymbol{x}' \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$, dieses aber widerspricht der Voraussetzung ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$. Die Menge $O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M}$ ist daher für alle $\varepsilon > 0$ unbeschränkt. Dies gilt offenbar auch für die Menge cl $O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M}$. Aus der bekannten Eigenschaft der Recessionskegel folgt dann

$$\dim\left[\operatorname{cl} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M}\right]_{\boldsymbol{R}} \geqq 1 \tag{2.1}$$

und weiter

$$\left[\operatorname{cl} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M}\right]_{\boldsymbol{R}} = \left[\operatorname{cl} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon)\right]_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}\,. \tag{2.2}$$

Da aber

$$\left[\operatorname{cl} O({}_1\boldsymbol{M}; \varepsilon)\right]_{\boldsymbol{R}} = {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$$

gilt, folgt daraus nach (2.1) und (2.2) die Ungleichung $\dim\left({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}\right) \geqq 1$.

Wegen den Voraussetzung ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ gibt es eine trennende Hyperebene $\boldsymbol{R}$ der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$ und ${}_2\boldsymbol{M}$. Wählen wir $\boldsymbol{w} \in \left({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}\right)$, $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ und ${}_i\boldsymbol{y} \in {}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ beliebig. Die Halbgeraden

$${}_ip = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = {}_i\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w}t,\ t \geqq 0\}$$

sind nach dem Beweis des Satzes 3, [2][3]) parallel mit der Hyperebene $\boldsymbol{R}$. Da der

[3]) In dem betreffenden Teil des zitierten Beweises wurde von der Voraussetzung des Satzes, dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sich in Richtung $\boldsymbol{v}$ asymptotisch berühren, kein Gebrauch gemacht.

Vektor $\mathbf{w} \in ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}})$, $\|\mathbf{w}\| = 1$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus, dass der Kegel ${}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ in der mit der Hyperebene $\mathbf{R}$ parallelen Hyperebene, die den Punkt $\mathbf{o}$ enthält, liegt und daher gilt $\dim ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) \leqq n - 1$.

Lemma 4. *Es seien* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *Mengen die den Voraussetzungen vom Lemma* 1 *genügen,* $\mathbf{L}_d(\mathbf{o})$ *sei die lineare Hülle des Kegels* ${}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$, $\mathbf{L}_d(\mathbf{x})$ *der mit* $\mathbf{L}_d(\mathbf{o})$ *parallele (bzw. zusammenfallende) lineare Unterraum mit* $\dim \mathbf{L}_d(\mathbf{x}) = \dim \mathbf{L}_d(\mathbf{o}) = d$, $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_d(\mathbf{x})$, *dann sind die Mengen*

$$ {}_i\mathfrak{M} = \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}} \mathbf{L}_d(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) \tag{2.3} $$

in $\mathbf{E}_n$ *konvex mit den Eigenschaften* ${}_i\mathbf{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$,

$$ {}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \dim (\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M}_{\mathbf{R}}) \geqq d\,. $$

Beweis. Die Behauptung, dass die Mengen ${}_i\mathfrak{M}$ konvex sind und ${}_i\mathbf{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$, ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$ gilt, wurde im Beweis des Satzes 5, [2] gezeigt [3]). Wegen ${}_i\mathbf{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$, gilt auch ${}_i\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \subset (\mathrm{cl}\ {}_i\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}$ und daher ist

$$ ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) \subset ((\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}})\,. $$

Daraus folgt

$$ \dim ((\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}) \geqq \dim ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) \equiv d\,. $$

Satz 1. *Falls die Mengen* ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ *die Voraussetzungen vom Lemma* 1 *erfüllen und die Mengen* ${}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ *die Bedeutung aus* (2.3) *haben und die Voraussetzung*

$$ \dim ((\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}) = \dim ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) = d \tag{2.4} $$

erfüllt ist, dann gilt:

a) $\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$;

b) *Für einen beliebigen Punkt* ${}_0\mathbf{x}' \in \mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M}$ *und beliebigen Vektor* $\mathbf{v}' \in$ rel. int $({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}})$, $\|\mathbf{v}'\| = 1$, *besitzt die Halbgerade*

$$ p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}') = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x}' + \mathbf{v}'t,\ t \geqq 0\} $$

die Eigenschaft aus der Definition 1, [2] *(d. h. die Mengen* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *berühren sich asymptotisch in der Richtung* $\mathbf{v}'$*).*

Beweis. Nach (2.3) und nach der Definition eines Recessionskegels gilt $\mathbf{L}_d(\mathbf{o}) \subset (\mathrm{cl}\ {}_i\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}$ $(i = 1, 2)$ und daher

$$ \mathbf{L}_d(\mathbf{o}) \subset (\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}\,. \tag{2.5} $$

Daraus und aus dem Ansatz (2.4) ergibt sich dann

$$ (\mathrm{cl}\ {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = \mathbf{L}_d(\mathbf{o})\,. \tag{2.6} $$

Da

$$[\mathrm{cl}\, O({}_i\mathfrak{M};\varepsilon)]_{\mathbf{R}} = (\mathrm{cl}\, {}_i\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \quad (i = 1, 2)$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt, so folgt daraus und aus (2.6)

$$(2.7) \qquad [\mathrm{cl}\, O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap \mathrm{cl}\, O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)]_{\mathbf{R}} = [\mathrm{cl}\, O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon)]_{\mathbf{R}} \cap [\mathrm{cl}\, O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)]_{\mathbf{R}} =$$
$$= (\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = \mathbf{L}_d(\mathbf{o}).$$

Betrachten wir den zu dem linearen Unterraum $\mathbf{L}_d(\mathbf{o})$ dualen linearen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o})$ und wählen wir $\mathbf{x} \in O({}_1\mathbf{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathbf{M};\varepsilon)$ beliebig (nach der Bemerkung 1 ist dieses möglich). Da nach Lemma 4 ${}_i\mathbf{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ ist, so gilt ebenfalls $\mathbf{x} \in O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)$. Nach (2.3) gilt dann

$$\mathbf{L}_d(\mathbf{x}) \subset O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon),$$

woraus nach (2.7)

$$\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap (\mathrm{cl}\, O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap \mathrm{cl}\, O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)) \neq \emptyset,$$
$$[\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap \mathrm{cl}\, O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap \mathrm{cl}\, O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)]_{\mathbf{R}} = \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap \mathbf{L}_d(\mathbf{o}) = \{\mathbf{o}\}$$

folgt. Da eine konvexe Menge genau dann beschränkt ist, wenn ihr Recessionskegel ein einziger Punkt ist, folgt daraus, dass die Menge

$$\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap \mathrm{cl}\, O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap \mathrm{cl}\, O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)$$

und daher auch die Menge

$$(2.8) \qquad \mathbf{M}^*_\varepsilon \equiv \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ beschränkt ist.

Nach der Bemerkung 1 gibt es Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}$ mit der Eigenschaft ${}_i\mathbf{x} \in O({}_1\mathbf{M};\varepsilon) \cap \cap O({}_2\mathbf{M};\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$, $\varrho({}_1\mathbf{x}; {}_2\mathbf{x}) < \varepsilon$. Dann gilt offenbar auch $\varrho(\mathbf{L}_d({}_1\mathbf{x}); \mathbf{L}_d({}_2\mathbf{x})) < \varepsilon$, wobei

$$(2.9) \qquad \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \subset O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon) \quad (i = 1, 2)$$

ist. Bezeichnet man

$$(2.10) \qquad \{{}_i\mathbf{x}^*\} \equiv \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2),$$

so gilt nach (2.9)

$$(2.11) \qquad {}_i\mathbf{x}^* \in \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{o}) \cap O({}_1\mathfrak{M};\varepsilon) \cap O({}_2\mathfrak{M};\varepsilon) = \mathbf{M}^*_\varepsilon \quad (i = 1, 2),$$

wobei (nach (2.10) und (2.3))

$$(2.12) \qquad \varrho({}_1\mathbf{x}^*; {}_2\mathbf{x}^*) = \varrho(\mathbf{L}_d({}_1\mathbf{x}); \mathbf{L}_d({}_2\mathbf{x})) < \varepsilon, \quad {}_i\mathbf{x}^* \in {}_i\mathfrak{M} \quad (i = 1, 2)$$

ist. Wir wählen nun eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_k\}$ mit $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ beliebig und jedem ε_k ordnen wir die Menge $\mathbf{M}^*_{\varepsilon_k}$ nach (2.8) zu. Es gilt dann offenbar

$$\mathbf{M}^*_{\varepsilon_{k+1}} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{M}^*_{\varepsilon_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

und nach (2.12), (2.11) gibt es Punkte ${}^k_i\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}^*_{\varepsilon_k}$, ${}^k_i\mathbf{x}^* \in {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ mit $\varrho({}^k_1\mathbf{x}^*; {}^k_2\mathbf{x}^*) < \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Da jede der Mengen $\mathbf{M}^*_{\varepsilon_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ nichtleer, konvex und beschränkt ist, so ist ${}^k_i\mathbf{x}^* \in \mathrm{cl}\, \mathbf{M}^*_{\varepsilon_1}$ $(k = 1, 2, \ldots; i = 1, 2)$ und es existiert ein Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathrm{cl}\, \mathbf{M}^*_{\varepsilon_1}$, der ein Häufungspunkt der Menge $\{{}^k_1\mathbf{x}^*\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und – wegen ${}^k_1\mathbf{x}^* \in {}_1\mathfrak{M}$ – ein Häufungspunkt von ${}_1\mathfrak{M}$ ist. Aus den Ungleichungen $\varrho({}^k_1\mathbf{x}^*; {}^k_2\mathbf{x}^*) < \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ folgt dann, dass der Punkt $\mathbf{x}^*$ auch ein Häufungspunkt der Menge ${}_2\mathfrak{M}$ ist. Daraus folgt $\mathbf{x}^* \in \mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M}$. Somit ist die Behauptung a) des Satzes 1 bewiesen. Die Bahauptung b) des Satzes 1 ist ein Teilergebnis im Beweis des Satzes 6, [2] [3]).

Beispiel 1. Die Mengen

$${}_1\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid xz \leqq 1, x \leqq 0, y \leqq 1\},$$

$${}_2\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \lg x - y^2 + z \geqq 0, x \geqq 0\}$$

sind offenbar abgeschlossen und konvex in $\mathbf{E}_3$ mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ und $\dim {}_1\mathbf{M} = \dim {}_2\mathbf{M} = 3$. Man überzeugt sich leicht, dass in unserem Falle

$${}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 \leqq 0, v_2 \leqq 0, v_3 \geqq 0\},$$

$${}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 \geqq 0, v_2 = 0, v_3 \geqq 0\}$$

ist und daher

$${}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 \geqq 0\},$$

$$d = \dim ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) = 1,$$

$$\mathbf{L}_d(\mathbf{o}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{o}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 = v_2 = 0\}$$

gilt. Nach (2.3) erhält man weiter

$$\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0, y \leqq 1\}, \quad \mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0\}$$

und daher

$$\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 \leqq 0, v_2 \leqq 0\}, \quad \mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 \geqq 0\},$$

$$\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 = 0, v_2 \leqq 0\}.$$

Somit ist

$$\dim ((\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}) = 2 > \dim ({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap {}_2\mathbf{M}_{\mathbf{R}}) = d = 1.$$

Beispiel 2. Betrachten wir in $\mathbf{E}_3$ die Mengen

$${}_1\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid xy + 1 \leqq 0, x \leqq 0, z \geqq y^2\},$$

$$_2\boldsymbol{M} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x \geqq 0\} ,$$

die die Eigenschaft haben, dass sie nichtleer, abgeschlossen und konvex in $\boldsymbol{E}_3$ mit $_1\boldsymbol{M} \cap {_2\boldsymbol{M}} = \emptyset$ und $O(_2\boldsymbol{M}; \varepsilon) \cap {_1\boldsymbol{M}} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ sind. Es ist klar, dass $\dim {_1\boldsymbol{M}} = \dim {_2\boldsymbol{M}} = 3$. Für die Recessionskegel $_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ und $_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ der Mengen $_1\boldsymbol{M}$, $_2\boldsymbol{M}$ gilt

$$\begin{aligned}
{_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} &= \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 \leqq 0, v_2 = 0, v_3 \geqq 0\} ,\\
{_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} &= \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 \geqq 0\} ,\\
{_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap {_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} &= \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 \geqq 0\} ,\\
\dim \left({_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap {_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}}\right) &= 1
\end{aligned}$$

und für die lineare Hülle $\boldsymbol{L}_d(\mathbf{o})$ des Kegels $_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}}$ erhält man

$$\boldsymbol{L}_d(\mathbf{o}) = \boldsymbol{L}_1(\mathbf{o}) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x = 0, y = 0, z = t, t \in (-\infty, \infty)\} .$$

Für die Mengen $_1\mathfrak{M}$, $_2\mathfrak{M}$ aus (2.3) ergibt sich in unserem Fall

$$\begin{aligned}
{_1\mathfrak{M}} &= \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid xy + 1 \leqq 0, x \leqq 0\} = \operatorname{cl} {_1\mathfrak{M}} ,\\
{_2\mathfrak{M}} &= {_2\boldsymbol{M}} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x \geqq 0\} = \operatorname{cl} {_2\mathfrak{M}}
\end{aligned}$$

und ihre Recessionskegel $\operatorname{cl} {_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}}$, $\operatorname{cl} {_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}}$ sind durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{cl} {_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} = {_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} &= \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 \leqq 0, v_2 \geqq 0\} ,\\
{_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} = \operatorname{cl} {_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} &= \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 \geqq 0\}
\end{aligned}$$

beschrieben. Daraus folgt

$$\operatorname{cl} {_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap \operatorname{cl} {_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} = {_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap {_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} = \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}_3 \mid v_1 = 0, v_2 \geqq 0\}$$

und daher

$$\dim \left({_1\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap {_2\mathfrak{M}_{\boldsymbol{R}}}\right) = 2 > \dim \left({_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}} \cap {_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}}\right) = 1 .$$

Aus der obigen Beschreibung der Mengen $_1\mathfrak{M}$, $_2\mathfrak{M}$ ergibt sich

$${_1\mathfrak{M}} \cap {_2\mathfrak{M}} = \operatorname{cl} {_1\mathfrak{M}} \cap \operatorname{cl} {_2\mathfrak{M}} = \emptyset .$$

Nach dem Satz 5, [2], folgt daraus, dass die Mengen $_1\boldsymbol{M}$, $_2\boldsymbol{M}$ sich in keiner Richtung $\mathbf{v}$ asymptotisch berühren und daher gibt es auch keine Halbgerade p mit der Eigenschaft aus der Definition 1, [2]. Die Punkte der regulären Kurve

$$k = \left\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x = -t, y = \frac{1}{t}, z = \frac{1}{t^2}, t > 0\right\}$$

sind die Randpunkte von $_1\boldsymbol{M}$. Dabei nähert sich diese Kurve für $t \to 0^+$ zu der Randhyperebene $\boldsymbol{R} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x = 0\}$ von $_2\boldsymbol{M}$ und es gilt $\varrho(k; {_2\boldsymbol{M}}) = 0$. (Die Hyperebene $\boldsymbol{R}$ stellt offenbar eine Trennungshyperebene von $_1\boldsymbol{M}$ und $_2\boldsymbol{M}$ dar.) Die Projektion der Kurve k in die Hyperebene $\boldsymbol{R}$ in Richtung der Achse x ist die Kurve

$$k^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, y = \frac{1}{t}, z = \frac{1}{t^2}, t > 0 \right\}$$

oder, wenn man die Transformation $u = 1/t$ einführt,

$$k^* = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, y = u, z = u^2, u > 0 \} .$$

Die Kurve k^* hat offenbar die Eigenschaft, dass für jede Wahl von $\varepsilon > 0$ und $u' > 0$ enthält die ε-Umgebung $O(k'; \varepsilon)$ der Kurve

$$k' = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, y = u, z = u^2, u \geqq u' \}$$

Punkte von ${}_1\mathbf{M}$, sowie Punkte von ${}_2\mathbf{M}$.

Bemerkung 2. Im Beispiel 1 wurde gezeigt, dass es Mengenpaare ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in $\mathbf{E}_n$ (die die Voraussetzungen aus Lemma 1 erfüllen) gibt, für die (2.4) nicht gilt und trotzdem $\operatorname{cl} {}_1\mathfrak{M} \cap \operatorname{cl} {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist. Durch das Beispiel 2 wurde gezeigt, dass Mengenpaare ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in $\mathbf{E}_n$ (die die Voraussetzungen vom Lemma 1 erfüllen) existieren, für die ebenfalls (2.4) nicht gilt, aber dabei $\operatorname{cl} {}_1\mathfrak{M} \cap \operatorname{cl} {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$ ist.

Satz 2. *Es seien ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen in $\mathbf{E}_n$ mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ und es haben ${}_1\mathfrak{M}$, ${}_2\mathfrak{M}$ die Bedeutung aus* (2.3). *Dann gibt es einen Vektor $\mathbf{v}(\|\mathbf{v}\| = 1)$, der die Eigenschaft hat, dass die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ sich in Richtung $\mathbf{v}$ genau dann asymptotisch berühren, wenn*

$$(2.13) \qquad \operatorname{cl} {}_1\mathfrak{M} \cap \operatorname{cl} {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset , \quad O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset \quad \textit{für alle} \quad \varepsilon > 0$$

gilt.

Beweis. Falls (2.13) erfült ist, so gibt es (nach Beweis des Satzes 1) einen Vektor $\mathbf{v}$ derart, dass die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ sich in Richtung $\mathbf{v}$ asymptotisch berühren.

Falls andererseits sich die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in Richtung $\mathbf{v}$ asymptotisch berühren, so enthält für jedes $\varepsilon > 0$ und $t' \geqq 0$ die ε-Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ der Halbgeraden $p' = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x} + t\mathbf{v}, t \geqq t' \}$ Punkte der Menge ${}_1\mathbf{M}$, sowie der Menge ${}_2\mathbf{M}$ (nach Definition 1, [2]). Wählt man ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M} \cap O(p'; \varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ beliebig fest, so gilt für die Halbgeraden ${}_ip = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_i\mathbf{x} + t\mathbf{v}, t \geqq 0 \}$ die Inklusion ${}_ip \subset O(p'; \varepsilon)$ und darüber hinaus ${}_ip \subset {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ (da nach Satz 1, [2], $\mathbf{v} \in {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R$ ist). Daher gilt ${}_ip \subset {}_i\mathbf{M} \cap O(p'; \varepsilon)$ und offenbar gibt es Punkte ${}_i\mathbf{x}^* \in {}_ip$ $(i = 1, 2)$ mit $\varrho({}_1p; {}_2p) = \varrho({}_1\mathbf{x}^*; {}_2\mathbf{x}^*) < 2\varepsilon$. Wegen ${}_i\mathbf{x}^* \in {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ und nachdem $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$ und wegen ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ ist weiter $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Nach Satz 5, [2] ist dann $\operatorname{cl} {}_1\mathfrak{M} \cap \operatorname{cl} {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

Satz 3. *Falls ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ abgeschlossene, konvexe Mengen in $\mathbf{E}_n$ mit der Eigenschaft ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$, $d = \dim({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R) = n - 1$ sind, so gibt es so einen Vektor $\mathbf{v}$ $(\|\mathbf{v}\| = 1)$, dass sich die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ asymptotisch in Richtung $\mathbf{v}$ berühren.*

Beweis. Da $d = n - 1$ ist, so gilt nach Lemma 4 $\dim((\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M})_R \cap (\mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M})_R) \geqq n - 1$. Falls $\dim((\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M})_R \cap (\mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M})_R) = n$ wäre, so betrachten wir ein beliebiger Punktenpaar ${}_i\mathbf{x} \in \mathrm{rel.\,int}\,{}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$. Aus den bekannten Eigenschaften der Recessionskegel von konvexen Mengen ergibt sich

$$(\mathrm{cl}\,{}_i\mathfrak{M})_R\,({}_i\mathbf{x}) = {}_i\mathfrak{M}_R({}_i\mathbf{x}) \subset {}_i\mathfrak{M} \quad (i = 1, 2)\,, \quad (\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M})_R\,({}_1\mathbf{x}) \cap (\mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M})_R\,({}_2\mathbf{x}) \neq \emptyset\,.$$

Daraus folgt ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$ im Widerspruch mit der Behauptung von Lemma 4. Es ist daher $\dim((\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M})_R \cap (\mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M})_R) = n - 1$ und nach dem Satz 1 folgt daraus die Behauptung.

Bemerkung 3. Falls ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ abgeschlossene, konvexe Mengen in $\mathbf{E}_n$ mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ sind, für die (2.13) gilt, so berühren sich (nach Satz 2) die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ asymptotisch in einer Richtung $\mathbf{v}$. Nach Satz 6, [2] gilt dann $d' \equiv \dim(\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M}) \geqq d = \dim({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$. Das folgende Beispiel 3 zeigt, dass der Fall $d' > d$ eintreten kann.

Beispiel 3. Die Mengen in $\mathbf{E}_3$

$${}_1\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \quad zx \geqq 1, x \geqq 0, 0 \leqq y \leqq {}_0y, z \geqq 0\}\,,$$

$${}_2\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid -zx \geqq 1, x \leqq 0, 0 \leqq y \leqq {}_0y, z \geqq 0\}\,,$$

${}_0y > 0$, beliebig festgewählt, sind offenbar konvex, abgeschlossen und stellen echte Teilmengen der Mengen aus dem Beispiel 1, [2], dar. Daher gilt auch hier ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$. Die Eigenschaft $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ ist ebenfalls erfüllt. Für diese Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ stellen wir fest:

$${}_1\mathbf{M}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0, y = 0, z \geqq 0\}\,, \quad {}_2\mathbf{M}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0, y = 0, z \geqq 0\}\,,$$

$${}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, y = 0, z \geqq 0\}\,, \quad d = \dim({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R) = 1\,.$$

Die lineare Hülle $\mathbf{L}_d(\mathbf{o})$ des Kegels ${}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R$ ist in unserem Fall die z-Achse. Nach (2.3) erhält man hier

$${}_1\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x > 0, 0 \leqq y \leqq {}_0y\}\,, \quad {}_2\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x < 0, 0 \leqq y \leqq {}_0y\}\,.$$

Somit gilt $\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, 0 \leqq y \leqq {}_0y\}$, d. h. die Menge $\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M}$ stellt einen Streifen der Breite ${}_0y$ in der durch $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0\}$ beschriebenen Ebene dar. Es ist also $d' = 2 > 1 = d$.

Bemerkung 4. Wie aus Beispiel 2 ersichtlich ist, gibt es allgemein für zwei konvexe, abgeschlossene Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in $\mathbf{E}_n$ mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$, d. h. (nach Lemma 2) mit

$$(2.14) \qquad {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0\,,$$

keinen Vektor $\mathbf{v}$ ($\|\mathbf{v}\| = 1$) in der Weise, dass sich die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in Richtung $\mathbf{v}$ asymptotisch berühren. Da es aber ganz natürlich erscheint die Eigenschaft (2.14) als die Definitionseigenschaft der asymptotischen Berührung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\mathbf{E}_n$ anzusehen, führen wir eine allgemeinere Definition der asymptotischen Berührung solcher Mengen mit der zugehörigen Charakteristik ein. Für zwei nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ in $\mathbf{E}_n$ mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$ betrachten wir den folgenden Prozess:

Man definiert schrittweise die Mengen

$$(2.15) \quad {}^k_i\mathfrak{M} \equiv \bigcup_{x \in \mathrm{cl}\, {}_i^{k-1}\mathfrak{M}} \mathbf{L}_{d^{k-1}}(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2)\,, \quad {}^k\mathfrak{N} = \mathrm{cl}\, {}^k_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}^k_2\mathfrak{M} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

mit $\mathbf{L}_{d^0}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{L}_d(\mathbf{x})$, $\mathrm{cl}\, {}^0_i\mathfrak{M} \equiv {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ (wobei nach (2.3) $\mathrm{cl}\, {}^1_i\mathfrak{M} = \mathrm{cl}\, {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ ist). Bezeichnen wir weiter

$$(2.16) \quad d^k \equiv \dim\left((\mathrm{cl}\, {}^k_1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\, {}^k_2\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}\right), \quad {}^k d' = \dim {}^k\mathfrak{N} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

mit ${}^1d' \equiv d'$.

Falls ${}^kd' \geqq 0$ $(k \in \{1, 2, \ldots\})$, so ist $\mathrm{cl}\, {}^k_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}^k_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$ und der Prozess endet.

Falls ${}^kd' = -1$ $(k \in \{1, 2, \ldots\})$ ist, so ist $\mathrm{cl}\, {}^k_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}^k_2\mathfrak{M} = \emptyset$, $\varrho(\mathrm{cl}\, {}^k_1\mathfrak{M}; \mathrm{cl}\, {}^k_2\mathfrak{M}) = 0$ [4]) und wir gehen zu dem nächsten $(k + 1)$-Schritt über (in dem die Mengen ${}^{k+1}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ gebildet werden).

Satz 4. *Seien* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen in* $\mathbf{E}_n$ *mit* ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$. *Dann gibt es eindeutig eine natürliche Zahl k mit*

$$1 \leqq k \leqq n - 1\,, \quad {}^rd' = -1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq r < k\,, \quad {}^kd' \geqq 0\,.$$

Beweis. Falls der in der Bemerkung 4 beschriebene Prozess für $k = 1$ nicht endet, so folgt aus Lemma 4 und Satz 1 $d^1 > d$, wobei nach Lemma 3 $1 \leqq d \leqq n - 1$ gilt. Falls dieser Prozess in dem r-ten Schritt $(r > 1)$ nicht endet, so erhält man durch die Anwendung desselben Lemmas und Satzes auf die Mengen $\mathrm{cl}\, {}^1_i\mathfrak{M}, \mathrm{cl}\, {}^2_i\mathfrak{M}, \ldots$ $\ldots, \mathrm{cl}\, {}^r_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ die Ordnung

$$1 \leqq d < d^1 < d^2 < \ldots < d^r \leqq n - 1\,,$$

aus der dann folgt, dass der fragliche Prozess höchstens nach $n - 2$ Schritten endet. Dabei ist die natürliche Zahl k, die denjenigen Schritt festlegt, in dem der Prozess endet, offenbar eindeutig bestimmt.

Definition 1. *Falls* ${}_1\mathbf{M}$ ${}_2\mathbf{M}$ *nichtleere, konvexe, abgeschlossene Menge in* $\mathbf{E}_n$ *mit* ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$ *sind, so sagt man, dass die Mengen* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *sich asymptotissh berühren (bzw., dass sie eine asymptotische Berührung besitzen). Die Zahl k mit der Eigenschaft*

---

[4]) Die Eigenschaft $\varrho(\mathrm{cl}\, {}^k{}_1\mathfrak{M}; \mathrm{cl}\, {}^k{}_2\mathfrak{M}) = 0$ ist offenbar mit der Eigenschaft $O(\mathrm{cl}\, {}^k{}_1\mathfrak{M}; \varepsilon) \cap \mathrm{cl}\, {}^k{}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ äquivalent, die sich aus dem Ansatz $O({}_1\mathbf{M}; \varepsilon) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ und aus der Inklusion ${}^{k-1}{}_i\mathfrak{M} \subset {}^k{}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots)$ ergibt (nach (2.15)).

$$^k d' \geqq 0\,, \quad ^r d' = -1 \quad \textit{für} \quad 1 \leqq r < k$$

heisst die Ordnung, die Zahl $d = \dim({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$ *der Grad der betreffenden asymptotischen Berührung von* ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$. *Die lineare Hülle der Menge* ${}^k\mathfrak{N}$ *nennt man den linearen asymptotischen Unterraum, der den Mengen* ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ *zugehört.*

Bemerkung 5. Zu je zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{E}_n$, die eine asymptotische Berührung im Sinne der obigen Definition besitzen, sind daher drei Angaben $(k, d, {}^k d')$ eindeutig zugeordnet, die diese Berührung auch eindeutig charakterisieren. Dabei ist $d \leqq {}^k d'$.

Im Sinne der obigen Definition ist dann eine asymptotische Berührung der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ in einer Richtung $\boldsymbol{v}$ (nach Definition 1, [2]) eine asymptotische Berührung der Ordnung 1.

Falls $d = n - 1$ ist, so ist nach Satz 3 $k = 1$ und ${}^k d' \geqq n - 1$, und, da nach Lemma 4 ${}^1_1\mathfrak{M} \cap {}^1_2\mathfrak{M} = {}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$ ist, ergibt sich daraus ${}^1 d' = \dim(\mathrm{cl}\,{}_1\mathfrak{M} \cap \cap\, \mathrm{cl}\,{}_2\mathfrak{M}) = n - 1$. In diesem Spezialfall $d = n - 1$ können daher die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ nur eine solche asymptotische Berührung, die durch das Tripel $(1, n - 1, n - 1)$ charakterisiert ist, besitzen. Es geht in diesem Fall um eine asymptotische Berührung in einer Richtung im Sinne der Definition 1, [2].

In den Beispielen 1 und 3 geht es um eine asymptotische Berührung der fraglichen Mengen, die durch das Tripel $(1, 1, 2)$ charakterisiert ist. Im Beispiel 2 ist offenbar

$${}^2_1\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x \leqq 0\}\,, \quad {}^2_2\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_3 \mid x \geqq 0\}\,, \quad \dim {}^2\mathfrak{N} = 2$$

und die asymptotische Berührung ist hier durch das Tripel $(2, 1, 2)$ eindeutig charakterisiert.

Literatur

[1] *E. G. Golstein:* Konvexe Optimierung. Akademie-Verlag. Berlin. 1973.

[2] *L. Grygarová:* Asymptotische Berührung von zwei konvexen Mengen in (bestimmter) Richtung. Aplikace matematiky 24 (1979), 32—47.

[3] *R. T. Rockafellar:* Convex analysis. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1972.

[4] *J. Stoer, Ch. Witzgall:* Convexity and Optimization in Finite Dimensions I. Spinger-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

Souhrn

ASYMPTOTICKÝ STYK k-TÉHO ŘÁDU KONVEXNÍCH MNOŽIN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

V práci jde o charakteristiku obecného pojmu asymptotického styku dvou uzavřených, konvexních množin v $\boldsymbol{E}_n$ s prázdným průnikem a nulovou vzdáleností. Ukazuje

se, že za této situace lze dané dvojici množin jednoznačně přiřadit trojici přirozených čísel (řád styku, stupeň styku a dimensi příslušného asymptotického lineárního prostoru), která je pak charakteristikou tohoto styku.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.