Aplikace matematiky

Josef Somer

Geschlossene äquiforme Bewegungen der Räume endlicher Dimension

Aplikace matematiky, Vol. 24 (1979), No. 4, 304–314

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103808`

GESCHLOSSENE ÄQUIFORME BEWEGUNGEN DER RÄUME ENDLICHER DIMENSION

JOSEF SOMER

(Eingegangen 29. September 1977)

Im Artikel werden äquiforme geschlossene Bewegungen in Räumen endlicher Dimension konstruiert und gewisse Bewegungen, welche die letzteren verallgemeinern. Dieses Problem führt auf Systeme von linearen Differenzengleichungen.

EINLEITUNG

Als eine äquiforme Bewegung des Raumes (Σ) im Raum (S) versteht man die Lageänderung eines in (Σ) liegenden Gebildes im Raum (S), das sich gleichzeitig im Raum (Σ) ähnlich deformiert. Diese Bewegung ist die einfachste Verallgemeinerung der klassischen Kinematik.

Im ersten Teil des Artikels wird eine wichtige Klasse von Bewegungen für sich wiederholende Prozesse beschrieben. Im zweiten Teil wird eine Verallgemeinerung der geschlossenen Bewegungen behandlet.

1. GESCHLOSSENE BEWEGUNGEN

Als eine geschlossene Bewegung definieren wir eine Bewegung deren alle Bahnkurven nach einer bestimmten Zeit $T > 0$ geschlossen werden. Handelt es sich um eine äquiforme Bewegung der Ebene, kann man von der Repräsentation durch komplexe Zahlen ausgehen. Deren Gleichung lautet, wie folgt

$$z = m(t) + l(t)\,\zeta\Theta = m(t) + l(t)\,\zeta e^{j\vartheta(t)}\,; \tag{1}$$

ζ und z sind komplexe Zahlen, welche den erzeugenden Punkt bzw. seine Koinzidenz in der Gang- bzw. Rast-ebene ausdrücken, $m(t)$ ist eine komplexe Funktion der Zeit t, $l(t)$ eine reelle positive Funktion (Ähnlichkeitsmodul) und $\vartheta = \vartheta(t)$ ist ein Zeitregime.

Soll (1) eine geschlossene Bewegung ausdrücken, muss gelten

$$z(t + T) \equiv z(t)\,,$$

oder

$$m(t + T) + l(t + T)\,\zeta e^{j\vartheta(t+T)} \equiv m(t) + l(t)\,\zeta e^{j\vartheta(t)} \tag{2}$$

und zwar identisch zu ζ und zu t.

Da (2) für alle ζ gilt, also auch für $\zeta = 0$, folgt daraus

$$m(t + T) = m(t)\,,$$

so dass $m = m_T$, wenn m_T eine belibige T-periodische Funktion ist. Durch Einsetzen in (2) erhält man

$$\frac{l(t)}{l(t + T)} = e^{j(\vartheta(t+T) - \vartheta(t))}\,.$$

Weil $l(t)$ eine reelle positive Funktion sein muss, folgt daraus

$$\vartheta(t + T) - \vartheta(t) = 2k\pi \Rightarrow$$

$$\vartheta = \vartheta_T + \frac{2k\pi}{T}\,t\,,$$

wenn ϑ_T eine reelle T-periodische Funktion ist. Weiter gilt

$$\frac{l(t)}{l(t + T)} = 1\,, \quad \text{dh.} \quad l(t) = l(t + T)\,,$$

so dass $l(t) = l_T$ eine beliebige reelle positive T-periodische Funktion ist.

Geschlossene äquiforme Bewegungen der Ebene haben also folgende Gleichung

$$z = m_T + l_T\zeta e^{j(\vartheta_T + (2k\pi/T)t)}\,. \tag{3}$$

Will man ähnliche Überlegungen auch für höhere Dimensionen durchführen, kann man eine Matrizengleichung der äquiformen Bewegung des Raumes (Σ) im Raum (S) der Dimension $n \geqq 2$ gebrauchen, dh.

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + l\mathbf{V}\boldsymbol{\xi}\,. \tag{1*}$$

In dieser Gleichung sind $\boldsymbol{\xi}$; $\mathbf{x}$ Spaltenmatrizen, deren Elemente Koordinaten der Punkte des Raumes (Σ) bzw. (S) sind, $\mathbf{v}(t)$ ist eine Spaltenmatrix (die sog. Übertragung), $l(t)$ eine positive reelle Funktion (Ähnlichkeitsmodul); $\mathbf{V}(t)$ ist eine orthogonale Quadratmatrix erster Art und entsprechender Ordnung. Alle Elemente der Matrizen in (1*), die veränderlich sind, sollen reelle Funktionen eines reellen Parameters t sein, die in einem gemeinsamen Intervall $I(t)$ definiert und stetig sind.

Die Bedingung für die Geschlossenheit der Bewegung lautet in diesem Falle wie folgt

$$(2^*) \qquad \mathbf{v}(t + T) + l(t + T)\,\mathbf{V}(t + T)\,\xi \equiv \mathbf{v}(t) + l(t)\,\mathbf{V}(t)\,\xi\,.$$

Für $\xi = 0$ haben wir

$$\mathbf{v}(t + T) = \mathbf{v}(t)$$

mit der Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{v}_T$, wenn $\mathbf{v}_T$ eine T-periodische Spaltenmatrix kennzeichnet. Setzt man dieses Ergebnis in (2^*) ein, bekommt man

$$l(t + T)\,\mathbf{V}(t + T) = l(t)\,\mathbf{V}(t)$$

Da aber $\mathbf{V}(t)$ eine Orthogonalmatrix erster Art ist, muss ihre Determinante gleich eins sein, so dass für den Ähnlichkeitsmodul $l(t)$ wieder die Bedingung

$$l(t + T) = l(t) \quad \text{gilt mit der Lösung} \quad l(t) = l_T$$

(l_T ist eine beliebige positive reelle T-periodische Funktion). Für die Matrix $\mathbf{V}$ hat man weiter

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}(t)\,.$$

Wir haben also dasselbe Ergebnis wie in der Ebene, dh. geschlossene äquiforme Bewegungen sind periodische Bewegungen. Ihre Gleichung lautet

$$(3^*) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{v}_T + l_T\mathbf{V}_T\xi\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt: Die ersten Polbahnkurven der Bewegung (3^*) bzw. (3) sind geschlossene Kurven.

2. BEWEGUNGEN, WELCHE DIE GESCHLOSSENEN BEWEGUNGEN VERALLGEMEINERN

Betrachte man eine äquiforme Bewegung Σ/S im Raum endlicher Dimension $n \geqq 2$, in der eine bestimmte Punktfolge $\{\xi_i\}$ $i = 1, 2, \ldots$ dieselbe Bahnkurve beschreibt, wie der Punkt (ξ_0) und zwar so, dass die Punkte der erwähnten Folge durch dieselbe Lage des Punktes (ξ_0) hindurchgehen und dazu nacheinander in denselben Zeitintervallen; das Zeitintervall soll durch den Wert $T > 0$ gegeben werden.

Geht man von der Matrizenrepräsentation (1^*) aus, erhält man

$$\mathbf{x}_i(t + T) = \mathbf{x}_{i-1}(t)\,; \quad i = 1, 2, \ldots,$$

oder

$$(4) \qquad \mathbf{v}(t + T) + l(t + T)\,\mathbf{V}(t + T)\,\xi_i = \mathbf{v}(t) + l(t)\,\mathbf{V}(t)\,\xi_{i-1}\,.$$

Schreibt man (4) noch einmal für $i + 1$, bekommt man nach Abziehen von (4)

$$(5)\qquad \xi_{i+1} - \xi_i = \frac{l(t)}{l(t+T)} \mathbf{V}^{-1}(t+T)\,\mathbf{V}(t)\,(\xi_i - \xi_{i-1})\,.$$

Die Absolutbeträge beider Seiten der Gleichung (5), die man als Gleichung zweier Vektoren interpretieren kann, sind gleich. Nimmt man die Eigenschaften der Orthogonalmatrizen in Betracht, kommt man zur Gleichung

$$(6)\qquad |\xi_{i+1} - \xi_i| = \frac{l(t)}{l(t+T)} |\xi_i - \xi_{i-1}|\,.$$

Da die Ausdrücke in den Symbolen der Absolutbeträge von der Zeit nicht abhängen, folgt daraus eine Bedingung für den Ähnlichkeitsmodul

$$(7)\qquad \frac{l(t+T)}{l(t)} = k > 0 \quad \text{oder} \quad l(t+T) = k\,l(t)\,.$$

Die letzte Gleichung ist eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koefficienten. Setze man die Lösung in der Form $l(t) = e^{\varrho t}$ voraus. Daraus folgt

$$e^{\varrho(t+T)} = l(t+T) = ke^{\varrho t} \Rightarrow e^{\varrho} = k^{1/T}$$

und für den Ähnlichkeitsmodul hat man so

$$(8)\qquad l(t) = f_T k^{t/T}$$

mit f_T als beliebige positive T-priodische Funktion.

Jetzt setze man dieses Ergebnis in (6) ein. Man bekommt

$$|\xi_{i+1} - \xi_i| = \frac{1}{k} |\xi_i - \xi_{i-1}|\,.$$

Es ist folgendes sichtbar: Die Punktfolge $\{(\xi_i)\}$ $i = 1, 2, \dots$ bildet eine bestimmte Polygonaltrasse so, dass die Absolutbeträge der Polygonseiten bei der Wahl $k > 1$ sich verkleinern, bei $k < 1$ sich vergrössern. Bei $k = 1$ sind die Polygonseiten von gleichem Absolutbetrag.

Wir bezeichnen die Polygonseiten wie folgt:

$$\mathbf{u}_i = \xi_i - \xi_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots\,.$$

Dann kann man schreiben

$$\mathbf{u}_{i+1} = \frac{1}{k} \mathbf{V}^{-1}(t+T)\,\mathbf{V}(t)\,\mathbf{u}_i\,.$$

Weiter bezeichnen wir kurz die Matrix

$$\mathbf{V}^{-1}(t+T)\,\mathbf{V}(t) = \mathbf{W}(t)\,.$$

Es gilt dann

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{k}\,\mathbf{W}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{k^2}\,\mathbf{W}^2\mathbf{u}_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{k^{n-1}}\,\mathbf{W}^{n-1}\mathbf{u}_1\,.$$

Setze man voraus, dass r nacheinander folgende Polygonseiten, z. B. die ersten r Seiten, linear unabhängig sind und unter $(r + 1)$ Seiten $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{r+1}$ eine lineare Abhängigkeit von folgender Gestalt existiert:

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{0}\,.$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit der Matrix $(1/k)\,\mathbf{W}$, bekommt man

$$\alpha_1\mathbf{u}_2 + \alpha_2\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+2} = \mathbf{0}$$

und gleichfalls

$$\alpha_1\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+3} = \mathbf{0} \quad \text{usw.}\,,$$

woraus ersichtlich wird, dass die ganze Polygonaltrasse im Unterraum der Dimension r liegt. Weil man voraussetzt, dass die Punktfolge $\{(\xi_i)\}$ $i = 0, 1, 2, \ldots$ mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, kann man sagen, dass die Trasse entweder in einer Geraden (für $r = 1$) oder in einer Ebene der Dimension $r = 2, 3, \ldots, n - 1$ oder im ganzen Raum (für $r = n$) liegt.

Betrachte man den Fall $r = n$. Dann existieren n linear unabhängige Polygonseiten $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Differenziert man die Gleichungen

$$\mathbf{u}_{i+1} = \frac{1}{k}\,\mathbf{W}\mathbf{u}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

bekommt man

$$\mathbf{0} = \frac{1}{k}\,\dot{\mathbf{W}}\mathbf{u}_i\,.$$

Schreibt man diese Beziehungen für die Elemente der Matrizen, erhält man n^2 Gleichungen von folgender Gestalt

$$\dot{w}_{j1}u_i^1 + \dot{w}_{j2}u_i^2 + \ldots + \dot{w}_{jn}u_i^n = 0$$

für $i, j = 1, 2, \ldots, n$, die man in n lineare Systeme für unbekannte Grössen $\dot{w}_{js}$ $j, s = 1, 2, \ldots, n$ einordnen kann. Diese Systeme sind homogen mit von Null verschiedener Determinante, denn diese besteht für ein festes j aus den Komponenten der linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Die Gleichungen haben deshalb nur eine triviale Lösung

$$\dot{w}_{js} = 0\,,$$

so dass die Grössen w_{js} konstant sind, Legt man also eine Polygonaltrasse mit n nacheinander gehenden linear unabhängigen Seiten zugrunde, muss man die Matrix $\mathbf{W}(t)$ als konstante Matrix nehmen. Bezeichne man diese Matrix in diesem Falle als $\mathbf{W} = \mathbf{C}$. Für die orthogonale Matrix $\mathbf{V}(t)$ hat man dann folgende Bedingung:

$$\mathbf{V}^{-1}(t + T)\,\mathbf{V}(t) = \mathbf{C}\,, \quad \text{oder} \tag{9}$$
$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}(t)\,.\,\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{V}(t)\,.\,\mathbf{D}\,.$$

Dabei sind $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ konstante Orthogonalmatrizen erster Art. Die Bedingung (9) stellt ein System von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten dar.

Falls die Polygonaltrasse aus weniger als n linear unabhängigen Seiten besteht, kann die Matrix $\mathbf{W}(t)$ veränderliche Elemente enthalten und die Gleichung (9) lautet wie folgt

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}(t)\;\mathbf{W}^{-1}(t) = \mathbf{V}(t)\;\mathbf{W}^{T}\,. \tag{9*}$$

Wählt man $\mathbf{W}(t)$ als beliebige Orthogonalmatrix erster Art, ist durch diese Wahl die Drehungsmatrix $\mathbf{V}(t)$ als Lösung von (9) bzw. (9*) bestimmt. Wir zeigen die Form dieser Lösung. Die allgemeine Lösung des Systems (9) bzw. (9*) ist eine Orthogonalmatrix der Form

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{F}_T\mathbf{V}^*(t)\,,$$

wobei $\mathbf{F}_T$ eine beliebige T-periodische Orthogonalmatrix erster Art und $\mathbf{V}^*(t)$ irgendeine Partikularlösung von (9) bzw. (9*) ist. Den Beweis dieser Behauptung führen wir für (9) vor, denn für (9*) unterscheidet sich der Beweis nur formal. Es gilt für jede Lösung von (9)

$$\mathbf{V}^{\sim}(t + T) = \mathbf{V}^{\sim}(t)\,\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{V}^{\sim}(t) = \mathbf{V}^{\sim}(t + T)\,\mathbf{C}$$

und ebenso für die gewählte Lösung

$$\mathbf{V}^*(t + T) = \mathbf{V}^*(t)\,\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{V}^*(t) = \mathbf{V}^*(t + T)\,\mathbf{C}\,.$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{V}^{\sim}(t + T)[\mathbf{V}^*(t + T)]^{-1}$$

eine T-periodische Orthogonalmatrix ist. Das ist aber offensichtlich, denn

$$\mathbf{V}^{\sim}(t + T)\,[\mathbf{V}^*(t + T)]^{-1} = \mathbf{V}^{\sim}(t)\,[\mathbf{V}^*(t)]^{-1}\,.$$

Eine belibige Lösung von (9) unterscheidet sich von der gewählten nur durch einen T-periodischen Orthogonalfaktor, deshalb genügt es eine einzige Partikularlösung zu finden. Deuten wir das praktische Verfahren bei der Lösung des Systems von den Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten an. Das System (9) kann man wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} v_{i1}(t+T) &= d_{11}v_{i1} \quad + \ldots + d_{n1}\, v_{in}(t) \\ &\vdots \\ v_{in}(t+T) &= d_{1n}v_{i1}(t) + \ldots + d_{nn}\, v_{in}(t) \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir haben also n übereinstimmende Systeme. Jedes von diesen Systemen, kann wieder als eine Matrixgleichung geschrieben werden

$$\mathbf{v}_i(t+T) = \mathbf{D}\mathbf{v}_i(t)\,. \tag{10}$$

Setze man die Lösung in folgender Form voraus

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{h}e^{\lambda t}\,.$$

Gemäss (10) hat man $\mathbf{h}e^{\lambda T} = \mathbf{D}\mathbf{h}$. Bezeichnet man $\alpha = e^{\lambda T}$, wird sichtbar, dass $\mathbf{h}$ Eigenvektor der Matrix $\mathbf{D}$ und die Werte α ihre Eigenwerte sind.

Wir führen jetzt zwei Sätze über die Eigenwerte der Orthogonalmatrix an.

1. Alle Eigenwerte einer Orthogonalmatrix sind Komplexeinheiten.

1. Die Gleichung für die Eigenwerte ist eine reziproke Gleichung.

Den Beweis des ersten Satzes findet man in der Literatur, der zweite Satz ist dann eine Folgerung des ersten. Für weitere Überlegungen ist es zweckmässig, die charakteristische Gleichung

$$|\mathbf{D} - \alpha\mathbf{J}| = 0$$

wie folgt schreiben:

$$\alpha^n - S_1\alpha^{n-1} + S_2\alpha^{n-2} + \ldots + (-1)^n = 0\,,$$

wobei S_i die Summen aller Hauptminoren i-ter Ordnung sind. Aber für eine Orthogonalmatrix gilt

$$d_{ii} = D_{ii}$$

und gleichfalls jeder Minor i-ter Ordnung ist gleich dem Komplement $(n - i)$-ter Ordnung. Die Gleichung ist wirklich eine reziproke Gleichung.

Folgerungen:

1. Falls n gerade ist und falls die Gleichung nur einfache Wurzeln besitzt, dann sind diese Wurzeln nicht real. Reale Wurzeln ± 1 können bei einer Gleichung gerader Ordnung nur in gerader Vielfachheit vorkommen.

2. Falls n ungerade ist, besitzt die Gleichung die Wurzel $+1$ in ungerader Vielfachheit, die Wurzel -1 kann nur in gerader Vielfachheit vorkommen.

Im weiteren deuten wir die Lösung für den Fall an, in dem die charakteristische Gleichung nur einfache Wurzeln besitzt. Berücksichtigt man das Vorhergehende, handelt es sich nur um Komplexeinheiten; falls n gerade ist, sind alle imaginär, falls n ungerade ist, kommt nur die Wurzel $+1$ real vor. Dieser Wurzel entspricht als Eigenvektor der Matrix $\mathbf{D}$ ein Vektor, den wir als $\mathbf{h}$ bezeichnen. Weiter haben wir nur komplexe Wurzeln der Form

$$\alpha_i = e^{j\varphi_i}\,; \quad \bar{\alpha}_i = e^{-j\varphi_i}\,,$$

denen die Lösungen

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{k}_i e^{j\varphi_i t/T}\,; \quad \mathbf{v}_i^* = \bar{\mathbf{k}}_i e^{-j\varphi_i t/T}$$

entsprechen. Die Partikularlösung kann man immer so wählen, dass die Vektoren $\mathbf{k}_i$ und $\bar{\mathbf{k}}_i$ komplex konjugiert sind. Die Lösung ist in einer komplexen Form. Um diese in eine Realform zu überführen, muss man passende Linearkombinationen nehmen. Setze man

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{l}_i^{(1)} + j\mathbf{l}_i^{(2)}$$

und als Lösung nehme man

$$\frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^*}{2} = \mathbf{l}_i^{(1)} \cos \varphi_i \frac{t}{T} - \mathbf{l}_i^{(2)} \sin \varphi_i \frac{t}{T}$$

$$\frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^*}{2j} = \mathbf{l}_i^{(1)} \sin \varphi_i \frac{t}{T} + \mathbf{l}_i^{(2)} \cos \varphi_i \frac{t}{T}\,.$$

Im Falle der einfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung hat die Lösung von (9) folgende Gestalt

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{F}_T \left\| \mathbf{h}^{\mathsf{T}}\,; \mathbf{l}_1^{(1)\mathsf{T}} \cos \varphi_1 \frac{t}{T} - \mathbf{l}_1^{(2)} \sin \varphi_1 \frac{t}{T}\,; \dots \right\|.$$

Dabei ist $\mathbf{F}_T$ eine beliebige T-periodische Orthogonalmatrix erster Art und die zweite Matrix auf der rechten Seite ist eine Matrix, in der die Werte $\mathbf{h}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{l}_i^{\mathsf{T}}$, ... so normiert werden, dass jede Zeile dieser Matrix einen Einheitsvektor repräsentiert. Das Ergebnis wurde für eine ungerade Dimension aufgeschrieben. Für eine gerade Dimension muss man die erste Zeile $\mathbf{h}^{\mathsf{T}}$ weglassen.

Man muss aber noch beweisen, dass alle Zeilen der zweiten Matrix orthogonale Vektoren repräsentieren. Nehme man die ersten zwei Vektoren und bilde man ihr Skalarprodukt

$$\mathbf{h}^{\mathsf{T}} \,.\left(\mathbf{l}_1^{(1)} \cos \varphi_1 \frac{t}{T} - \mathbf{l}_1^{(2)} \sin \varphi_1 \frac{t}{T}\right).$$

Da

$$\mathbf{l}_1^{(1)} = \frac{\mathbf{k}_1 + \bar{\mathbf{k}}_1}{2}\,; \quad \mathbf{l}_1^{(2)} = \frac{\mathbf{k}_1 - \bar{\mathbf{k}}_1}{2j} \quad \text{ist}\,,$$

erhält man ein Ergebnis, in dem die Vielfachen von den Ausdrücken $\mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \bar{\mathbf{k}}_1$ vorkommen. Aber gemäss der Beziehung

$$\mathbf{h}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{k}_1 = \mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1$$

und gemäss der Tatsache, dass für die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{D}$ gilt

$$\mathbf{D}\mathbf{h} = \mathbf{h} \; ; \quad \mathbf{D}\mathbf{k}_1 = e^{j\varphi_1}\mathbf{k}_1 \, ,$$

bekommt man

$$\left(e^{j\varphi_1} - 1\right) \mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1 = 0 \, .$$

Von $e^{j\varphi_1} - 1 \neq 0 \left(e^{j\varphi_1}\right.$ ist imaginär$\left.\right)$ hat man

$$\mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{h}^{\mathsf{T}} . \bar{\mathbf{k}}_1 = 0 \, .$$

Weiter nehme man das Skalarprodukt

$$\left(\mathbf{l}_1^{(1)\mathsf{T}} \cos \varphi_1 \frac{t}{T} - \mathbf{l}_1^{(2)\mathsf{T}} \sin \varphi_1 \frac{t}{T}\right)\left(\mathbf{l}_1^{(1)} \sin \varphi_1 \frac{t}{T} + \mathbf{l}_1^{(2)} \cos \varphi_1 \frac{t}{T}\right).$$

Gleichfalls wie zuvor, kann man zeigen, dass dieses Produkt gleich Null ist, weil alle Produkte der Form $\mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1, \ldots$ verschwinden, da

$$\mathbf{k}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{D}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1 \Rightarrow \left(e^{2j\varphi_1} - 1\right) \mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1 = 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_1 = 0 \quad \left(e^{2j\varphi_1} \neq 1\right)$$

gilt.

Endlich nehme man zwei Eigenvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, welche zwei verschiedenen Eigenwerten $e^{j\varphi_1}$ und $e^{j\varphi_2}$ entsprechen. Es handelt sich um das Skalarprodukt

$$\left(\mathbf{l}_1^{(1)\mathsf{T}} \cos \varphi_1 \frac{t}{T} - \mathbf{l}_1^{(2)\mathsf{T}} \sin \varphi_1 \frac{t}{T}\right)\left(\mathbf{l}_2^{(1)} \cos \varphi_2 \frac{t}{T} - \mathbf{l}_2^{(2)} \sin \varphi_2 \frac{t}{T}\right).$$

In diesem Produkt treten die Ausdrücke $\mathbf{l}_1^{(1)\mathsf{T}} . \mathbf{l}_2^{(1)}, \ldots$ auf. Schreibt man diese aus, bekommt man 4 Nullausdrücke. Zum Beispiel

$$\mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{D}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{k}_2 = e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}\mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_2 = 0 \, .$$

Da $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 2k\pi$, folgt daraus $\mathbf{k}_1^{\mathsf{T}} . \mathbf{k}_2 = 0$ und gleichfalls für die übrigen Ausdrücke.

Zur Bestimmung der Bewegungen muss noch die Übertragungsmatrix $\mathbf{v}(t)$ festgesetzt werden. Für diese Matrix haben wir gemäss vorhergehender Beziehungen folgende Gleichung

$$(11) \quad \mathbf{v}(t + T) - \mathbf{v}(t) = l(t)\,\mathbf{V}(t)\left[\xi_i - \frac{1}{l(t)}\mathbf{V}^{-1}(t)\, l(t + T)\,\mathbf{V}(t + T)\,\xi_{i+1}\right] =$$
$$= l(t)\,\mathbf{F}_T\,\mathbf{V}^*(t)\left(\xi_i - k\,\mathbf{W}^{-1}\xi_{i+1}\right).$$

Schreibt man dieselbe aus, bekommt man ein System von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, die nicht homogen sind. Die rechte Seite ist dabei von i unabhängig, wie man beweisen kann. Weil auf der rechten Seite von (11) zwei nacheinander gehende Eckpunkte der Polygonaltrasse auftreten, ist damit bewiesen, dass man eine Polygonseite wählen kann, um die Übertragungsmatrix $\mathbf{v}(t)$ zu bestimmen.

Bezeichne man kurz die rechte Seite von (11) als $\mathbf{g}(t)$. Dann kan man schreiben

$$\mathbf{v}(t + T) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{g}(t) \,.$$

Die Lösung dieser Matrixgleichung hat folgende Gestalt

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_T + \delta\, \mathbf{g}(t)\, \Delta t = \mathbf{v}_T + \mathbf{g}^*(t) \,;$$

dabei ist $\mathbf{v}_T$ eine beliebige T-periodische Spaltenmatrix und δ ist das bekannte Symbol der Differenzenrechnung. Damit sind alle Bewegungsparameter für den gewählten Fall gefunden worden. Man kann zusammenfassen. Durch die Wahl der Konstante k ist der Ähnlichkeitsmodul $l(t)$, durch die Wahl von $\mathbf{W}(t)$ als Orthogonalmatrix erster Art ist die Drehungsmatrix $\mathbf{V}(t)$ und schliesslich durch die Wahl einer Polygonseite ist die Übertragunsmatrix $\mathbf{v}(t)$ bestimmt. Die Bewegungen haben folgenden endlichen Ausdruck

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_T + \mathbf{g}^*(t) + f_T k^{t/T} \mathbf{F}_T\, \mathbf{V}^*(t)\, \xi \,.$$

Das Ergebnis gilt formal auch falls die Matrix $\mathbf{W}(t)$ veränderliche Elemente besitzt und falls die Eigenwerte dieser Matrix nicht einfach auftreten. Die praktische Konstruktion der Matrix $\mathbf{V}(t)$ wurde allerdings für eine konstante Matrix $\mathbf{W}$ und für einfache Eigenwerte vorgeführt. Die restlichen Fälle würde man analogisch lösen. Man müsste dabei Systeme von linearen Differenzengleichungen mit veränderlichen Koeffizienten berechnen.

Zum Schluss noch eine Bemerkung, die die Dimension der Polygonaltrasse betrifft. Wählt man für die Konstruktion von $\mathbf{v}(t)$ eine Polygonseite in der Richtung eines Eigenvektors, der der Realwurzel $+1$ (bzw. -1) entspricht, kommt man begreiflich nicht aus dieser Richtung und die Polygonaltrasse ist eine Geradentrasse. Gleichfalls bei der Wahl der Polygonseite in einer Ebene der Dimension 2, die durch zwei komplex konjugierte Eigenwerte bestimmt wird, bekommt man eine zweidimensionale Polygonaltrasse. Eine maximale Dimension bekommt man bei solcher Wahl, wenn die gewählte Seite in keinem invarianten Unterraum der durch die Matrix $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{W}(t)$ bestimmten Abbildung, liegt.

Souhrn

UZAVŘENÉ EKVIFORMNÍ POHYBY PROSTORŮ KONEČNÉ DIMENZE

JOSEF SOMER

V první části článku provádí autor konstrukci uzavřených pohybů definovaných na ekviformní grupě. Tyto pohyby popisují periodicky se opakující děje pro případ pohybujícího se útvaru, který se za pohybu současně podobně deformuje.

V druhé části zobecňuje uzavřené pohyby na ekviformní pohyby zadané tak, že jistá posloupnost bodů popisuje tutéž trajektorii tak, že jednotlivé tvořící body procházejí kteroukoli polohou ve stejných předem předepsaných časových intervalech po sobě. Autor sleduje jednak konfigurační otázky posloupnosti vytvořujících bodů a dále konstrukci těchto pohybů. Tento problém vede na řešení soustav lineárních diferenčních rovnic, přičemž praktická konstrukce ukázána na případě rovnic s konstantními koeficienty.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Josef Somer,* CSc., fakulta elektrotechnická ČVUT, 290 91 Poděbrady - zámek 1.