Aplikace matematiky

Josef Somer

Lineare invariante Gebilde in äquiformen Bewegungen der Räume endlicher Dimension

Aplikace matematiky, Vol. 24 (1979), No. 1, 56–66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103779

LINEARE INVARIANTE GEBILDE IN ÄQUIFORMEN BEWEGUNGEN DER RÄUME ENDLICHER DIMENSION

JOSEF SOMER

(Eingegangen 12. April 1977)

1. EINLEITUNG

Im Artikel wird das Problem der kinematischen Geometrie gelöst, die Phase einer äquiformen Bewegung in Räumen endlicher Dimension zu charakterisieren. Eine wesentliche Rolle spielen dabei die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmter Matrizen, namentlich der Orthogonalmatrizen erster Art.

Die Bewegung eines ähnlich veränderlichen Gebildes kann man in einer Phase einerseits durch invariante Punkte, dh. durch sogenannte Momentanpole erster bzw. höherer Ordnung und andererseits durch weitere lineare invariante Gebilde, wie unbewegliche Geraden, Hyperebenen, eventuell Ebenen der Dimension 2, 3, ... charakterisieren. Das Studium dieser invarianten Gebilde führt zu von der Parität der Dimension abhängenden Schlussfolgerungen. Eine anschauliche Interpretation derselben kann besonders im Falle der Dimension $n = 2$ und $n = 3$ durchgeführt werden.

Mit den linearen invarianten Gebilden kann man die Bahnkurven der sog. Tangentialbewegung in engen Zusammenhang setzen. Diese Bahnkurven werden in der Literatur als Klein-Lieschen-W-Kurven bezeichnet.

2. ÄQUIFORME BEWEGUNG

Eine äquiforme Bewegung des beweglichen Raumes (Σ) im Rastraum (S) repräsentieren wir durch die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) + l(t)\,\mathbf{V}(t)\,\xi\,, \tag{1}$$

wo $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, ξ Spaltenmatrizen vom Typ $(n, 1)$ sind; $l(t)$ ist eine reelle positive Funktion, auch Ähnlichkeitsmodul genannt, $\mathbf{V}(t)$ ist eine Orthogonalmatrix erster Art und der Ordnung n, auch als Drehungsmatrix bezeichnet. Die Spaltenmatrix $\mathbf{v}(t)$ bezeichnen wir als Übertragungsmatrix. Die Matrizen ξ und $\mathbf{x}$ beinhalten als Elemente die Koordinaten des bildenden Punktes (ξ) des Raumes (Σ), bzw. seiner Koinzidenz im Raum (S). Wir setzen voraus, dass die Funktion $l(t)$, sowie alle Elemente der Matrizen $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{V}(t)$ reelle Funktionen eines reellen Parameters t sind; sie sollen auf einem gemeinsamen Definitionsintervall $I(t)$ Ableitungen erster Ordnung haben. Alle diese Funktionen bezeichnen wir als kinematische Parameter.

Der Parameter t kann als Zeit interpretiert werden. Ein gewählter Wert dieses Parameters bestimmt eine Phase der Bewegung. Als reguläre Phase der Bewegung bezeichnen wir eine solche Phase, in der die Matrix $(l\mathbf{V})^{\cdot}$ eine reguläre Matrix ist. In jeder regulären Phase existiert dann ein eindeutig bestimmter erster Momentanpol der Bewegung, den wir mit $({}^1\xi)$ bezeichnen; dh. ein solcher Punkt des Raumes (Σ), in dem die erste Ableitung $\mathbf{x}^{\cdot}$ verschwindet. Für diesen Momentanpol bekommt man die Darstellung

$$(2) \qquad {}^1\xi = -((l\mathbf{V})^{\cdot})^{-1}\,\mathbf{v}^{\cdot}$$

und für seine Koinzidenz im Raum (S)

$$(3) \qquad {}^1\mathbf{x} = \mathbf{v} - l\mathbf{V}((l\mathbf{V})^{\cdot})^{-1}\,\mathbf{v}^{\cdot}\,.$$

Aus der Ableitung von (1) und aus (3) folgt die Gleichung

$$(4) \qquad \mathbf{x}^{\cdot} = (l\mathbf{V})^{\cdot}\,(l\mathbf{V})^{-1}\,(\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x})\,,$$

die wir als Gleichung der ersten Äquiformverschiebung bezeichnen. Diese Gleichung beschreibt ein Geschwindigkeitsfeld der äquiformen Bewegung.

Wir wählen eine reguläre Bewegungsphase und wählen dabei das Koordinatensystem so, dass der erste Momentanpol ${}^1\mathbf{x}$ zum Koordinatenursprung wird. Dann kann man die Gleichung (4), die jetzt ein stationäres Geschwindigkeitsfeld beschreibt, vereinfachen und in folgende Form bringen

$$(5) \qquad \mathbf{x}^{\cdot} = (l\mathbf{V})^{\cdot}\,(l\mathbf{V})^{-1}\,\mathbf{x} = \left(\frac{l^{\cdot}}{l}\mathbf{J} + \mathbf{V}^{\cdot}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{J} + \mathbf{V}^{\cdot}\mathbf{V}^{\mathsf{T}})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

$\mathbf{A}$ ist eine reguläre Matrix und ihre Komponente $\mathbf{V}^{\cdot}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ ist schiefsymmetrisch, denn es ist

$$(\mathbf{V}^{\cdot}\mathbf{V}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{\cdot\mathsf{T}} = -\mathbf{V}^{\cdot}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\,.$$

3. LINEARE INVARIANTE GEBILDE DER ERSTEN VERSCHIEBUNG

In einer festen Bewegungsphase findet man invariante Richtungen als Eigenwertrichtungen der Matrix $\mathbf{A}$. Es gilt daher

$$(6) \qquad \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

und daraus folgt: In der gegebenen Phase reproduziert sich die als ein Ganzes durch den ersten Momentanpol hindurchgehende Gerade, deren Richtung eine Eigenwertrichtung der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

Wir behandeln vorerst die Fälle der niedrigsten Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$.

Für $n = 2$ ist die Matrix von folgender Gestalt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha; & \mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b} \\ -\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b}; & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha; & p \\ -p; & \alpha \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ Spaltenmatrizen der Vektoren sind, die die Zeilen der Orthogonalmatrix $\mathbf{V}$ bilden, so dass sie einen Einheitsmodul haben und zueinander orthogonal sind. Das Produkt $\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b}$ wurde kurz mit p bezeichnet.

Die Gleichung für die Eigenwerte lautet dann, wie folgt

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda; & p \\ -p; & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + p^2 = 0 \, .$$

Diese Gleichung hat reelle Wurzeln nur für $p = 0$, was mit $\mathbf{a}^{\cdot} = \mathbf{0}$ äquivalent ist. In diesem Fall sind alle Richtungen Eigenwertrichtungen und eine solche Phase bezeichnen wir als homothätische Phase.

Ist $\mathbf{a}^{\cdot} \neq \mathbf{0}$, dann hat die charakteristische Gleichung nur komplex-konjugierte Wurzeln, so dass auch die Eigenvektoren komplex-konjugiert sind. Für die Dimension $n = 2$ bilden diese Vektoren keine reellen invarianten Gebilde.

Man kann also folgendes Ergebnis aussprechen: In einer regulären Phase, die keine homothätische Phase ist, existieren in einer äquiformen Bewegung der Ebene keine reelle invariante Geraden.

Für $n = 3$ hat die Matrix $\mathbf{A}$ folgende Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha; & \mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b}; & \mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{c} \\ -\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b}; & \alpha; & \mathbf{b}^{\cdot T} . \mathbf{c} \\ -\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{c}; & -\mathbf{b}^{\cdot T} . \mathbf{c}; & \alpha \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ haben eine ähnliche Bedeutung wie bei $n = 2$. Wir bezeichnen kurz $\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{b} = p$; $\mathbf{a}^{\cdot T} . \mathbf{c} = q$; $\mathbf{b}^{\cdot T} . \mathbf{c} = r$, so dass wir die charakteristische Gleichung folgendermassen schreiben können

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \lambda); & p; & q \\ -p; & (\alpha - \lambda); & r \\ -q; & -r; & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^3 + (\alpha - \lambda)(p^2 + q^2 + r^2) = 0 \, .$$

Diese Gleichung hat eine reelle Lösung $\lambda_1 = \alpha$. Zwei weitere Wurzeln sind nur in dem Fall reell, dass alle Ausdrücke p, q, r verschwinden. Das tritt nur im Falle $\mathbf{a}^{\cdot} = \mathbf{b}^{\cdot} = \mathbf{c}^{\cdot} = \mathbf{0}$ ein.

Dann sind alle Richtungen Eigenwertrichtungen und man kann ähnlich wie in der Ebene von einer homothätischen Phase sprechen.

Ist $\mathbf{a}^{\bullet} \neq \mathbf{0}$, dann steht der Vektor $\mathbf{a}^{\bullet}$ senkrecht zum Vektor $\mathbf{a}$ und infolgedessen ist er parallel zu der Ebene, die durch die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ bestimmt wird, so dass mindestens einer der Ausdrücke $\mathbf{a}^{\bullet\mathsf{T}} . \mathbf{b}$ und $\mathbf{a}^{\bullet\mathsf{T}} . \mathbf{c}$ nicht verschwindet. Ähnliche Betrachtungen gelten auch für von Null verschiedene $\mathbf{b}^{\bullet}$ und $\mathbf{c}^{\bullet}$.

In diesem Fall bekommt man eine reelle Eigenwertrichtung und zwei komplexe Richtungen. Für $\lambda_1 = \alpha$ erhalten wir zwei Gleichungen für Eigenvektoren

$$px_2 + qx_3 = 0$$

$$-px_1 + rx_3 = 0$$

mit der Lösung

$$x_1 : x_2 : x_3 = r : (-q) : p$$

und für komplex-konjugierte $\lambda_{2,3}$ hat man

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm j(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2} .$$

Diesen Wurzeln entsprechen folgende Gleichungen für Eigenvektoren

$$\pm j(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2} x_1 + px_2 + qx_3 = 0$$

$$-px_1 \pm j(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2} x_2 + rx_3 = 0$$

mit der Lösung

$$x_1 : x_2 : x_3 = (pr \mp jq(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}) : (-pq \mp jr(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}) : \\ : (-q^2 - r^2) .$$

Die invariante Richtungen sind zwar imaginär, aber sie bestimmen eine reelle invariante Ebene. Nimmt man passende Linearkombinationen dieser Vektoren, so bekommt man reelle Richtungen dieser Ebene; es genügt z. B.

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = (pr; -pq; (-q^2 - r^2))$$

$$\frac{1}{2j}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (q(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}; r(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}; 0)$$

zu nehmen. Das Vektorprodukt dieser Vektoren gibt uns den Normalvektor der Ebene

$$(r(q^2 + r^2) ; \quad -q(q^2 + r^2) ; \quad p(q^2 + r^2))$$

und wenn wir dieses mit früheren Ergebnissen vergleichen, können wir folgenden Satz aussprechen:

In jeder regulären nicht homothätischen Phase der äquiformen Bewegungen der Räume von der Dimension $n = 3$ existiert eine invariante Gerade und eine invariante Ebene, die zueinander senkrecht stehen.

Wir verallgemeinern jetzt die vorhergehenden Ergebnisse. Wie bei der Dimension $n = 2$ und $n = 3$, kann man im allgemeinen Fall erwarten, dass die Parität der Dimension eine bestimmte Rolle spielen wird.

Für die Dimension n, hat die Matrix $\mathbf{A}$ folgende Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha; & \mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{b}; & \mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{c}; & \dots \\ -\mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{b}; & \alpha & & \\ -\mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{c}; & \dots & \ddots & \\ \vdots & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Symbole $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... sollen den gleichen Sinn wie zuvor haben. Die Gleichung für die Eigenwerte kann man wie folgt schreiben

$$(\alpha - \lambda)^n + (\alpha - \lambda)^{n-2} S_2 + (\alpha - \lambda)^{n-4} S_4 + \dots = 0 .$$

S_i ist die Summe aller Hauptminoren der Matrix $\mathbf{V}^{\bullet}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ der Ordnung i, so dass die Summen mit ungeraden Indexen verschwinden und in der oberen Gleichung weggelassen wurden.

Im Falle ungerader Dimension kann durch den Wurzelfaktor $(\alpha - \lambda)$ dividiert werden, so dass die Gleichung mindestens eine reelle Wurzel, $\lambda = \alpha$, hat. In Räumen ungerader Dimension existiert also mindestens eine reelle invariante Gerade in jeder regulären Phase.

Für weitere Betrachtungen bezeichnen wir $\mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{b} = p_{12}$; $\mathbf{a}^{\bullet T} . \mathbf{c} = p_{13}$; .... Für die Summen S_i mit geraden Indexen gilt folgender Satz: Die schiefsymmetrische Determinante gerader Ordnung ist dem Quadrat einer ganzrationalen Funktion ihrer Elemente gleich.

Für eine homothätische Phase verschwinden alle Ableitungen $\mathbf{a}^{\bullet}$, $\mathbf{b}^{\bullet}$, $\mathbf{c}^{\bullet}$, ..., so dass $S_2, S_4, \dots$ gleich Null sind und alle Richtungen invariant sind. Bei ungerader Dimension bekommt man nach Division durch den Wurzelfaktor $(\alpha - \lambda)_x$ eine Gleichung von geradem Grad. Es genügt also sich im weiteren mit dem Wurzelproblem folgender Gleichung zu beschäftigen:

$$(\alpha - \lambda)^{2k} + (\alpha - \lambda)^{2k-2} S_2 + \dots + (\alpha - \lambda)^2 S_{2k-2} + S_{2k} = 0 .$$

Verschwindet S_{2k} und $S_{2k-2} = 0$, dann kann in der letzteren Gleichung $(\alpha - \lambda)^2$ ausgeklammert werden, so dass man eine zweifache reelle Wurzel $\lambda = \alpha$ bekommt. Verschwindet S_{2k} und S_{2k-2} mit $S_{2k-4} = 0$, dann wächst die Vielfachheit der reellen Wurzel $\lambda = \alpha$ wieder um zwei. So könnte man fortschreiten.

Als reelle Wurzel der charakteristischen Gleichung kommt nur die Wurzel $\lambda = \alpha$ in Betracht, und zwar in ungerader oder gerader Vielfachheit bei ungerader, bzw. gerader Dimension. Die übrigen Wurzeln bilden komplex-konjugierte Paare, eventuell in höherer Vielfachheit. Im Hinblick auf die Schiefsymmetrie der Matrix $\mathbf{V}^{\bullet}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ kann man zeigen, dass ihr Realteil immer gleich α ist.

Einer einfachen reellen Wurzel $\lambda = \alpha$ entspricht ein einziger reeller Eigenvektor und deshalb eine einzige reelle invariante Gerade, denn das Gleichungssystem für Eigenvektoren hat einen um eins niederigeren Rang als die Anzahl der Gleichungen ($S_{2k} \neq 0$).

Im Falle der vielfachen reellen Wurzel $\lambda = \alpha$ wird mit dem Anwachsen der Vielfachheit der Wurzel um zwei, der Rang der Matrix der charakteristischen Gleichung um zwei erniedrigt. Man bekommt einen Unterraum von gleicher Dimension wie die Vielfachheit der Wurzel, in dem jede Richtung invariant ist.

Wir zeigen jetzt, dass keine weiteren reellen invarianten Geraden existieren, dh. dass in einer gewählten Phase, jede reelle invariante Gerade, die der reellen Wurzel der charakteristischen Gleichung entspricht, durch den ersten Momentanpol gehen muss. Man wähle auf einer beliebigen invarianten Geraden zwei verschiedene Punkte $(\mathbf{x}) \neq (\mathbf{y})$. Für diese Punkte gilt nach (6)

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x} \, ; \quad \mathbf{y}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

und weiter in Bezug darauf, dass sie mit der invarianten Geraden koinzidieren, deren Richtung durch den Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ bestimmt ist, gilt

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \varrho_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, ; \quad \mathbf{y}^{\bullet} = \varrho_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{7}$$

so dass aus (6) und (7) folgt

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\bullet} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\varrho_1 - \varrho_2)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, , \tag{8}$$

wo im Hinblick auf die Realität der Geraden $\varrho_1 - \varrho_2 = \alpha$ ist. Wir zeigen noch die Koinzidenz der invarianten Geraden mit dem ersten Momentanpol. Wenn $\mathbf{x}^{\bullet} = 0$ ist, ist nichts zu beweisen. Setzen wir also $\mathbf{x}^{\bullet} \neq 0$ voraus. Dann kann in (7) der Punkt $(\mathbf{y})$ so gewählt werden, dass der Faktor ϱ_1 einen vorgeschriebenen Wert annimmt, z. B. $\varrho_1 = \alpha$. Dann vergleichen wir (8) mit $\mathbf{x}^{\bullet} = \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ und bekommen $\mathbf{y}^{\bullet} = 0$, was zu beweisen war.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt noch dieser Satz:

Zu jeder invarianten Geraden existiert in der gegebenen Phase eine invariante Hyperebene, die zu der Geraden senkrecht steht.

Wir zeigen zuerst, dass die Hyperebene durch den ersten Momentanpol, die zur invarianten Geraden senkrecht steht, sich als Ganzes in der Phase reproduziert. Die invariante Gerade habe eine Richtung, die durch den Vektor $\mathbf{h}$ bestimmt ist. Dann ist jeder mit dieser Ebene parallele Vektor zu $\mathbf{h}$ orthogonal. Es gilt also

$$\mathbf{u}^{\bullet} \, . \, \mathbf{h} = 0 \quad \text{und nach (6)} \quad \mathbf{u}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

und weil $\mathbf{h}$ ein dem Wert $\lambda = \alpha$ entsprechender Eigenvektor ist, gilt noch

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \alpha\mathbf{h} \, .$$

Daraus folgt

$$\mathbf{u}^{\cdot T} . \mathbf{h} = \mathbf{u}^{\cdot}\mathbf{A}^T\mathbf{h} = \alpha\mathbf{u}^T . \mathbf{h} = 0 \,,$$

denn die Matrix $\mathbf{A}^T$ hat diegleichen Eigenwerte wie $\mathbf{A}$ und gleiche charakteristische Richtungen, denn die Gleichungssysteme für Eigenvektoren unterscheiden sich nicht voneinander im Hinblick auf die Form der Matrix $\mathbf{A}$. Die letzte Beziehung zeigt, dass die erwähnte Hyperebene in der Phase invariant ist.

Den oberen Satz kann man umkehren, dh. es gilt: Jede reelle invariante Hyperebene in einer gegebenen Bewegungsphase steht senkrecht zu einer bestimmten reellen invarianten Geraden und koinzidiert mit dem ersten Momentanpol.

Es sei $\mathbf{k}$ der Normalvektor für eine invariante Hyperebene. Für jeden Vektor, der in dieser Hyperebene liegt, gilt

$$\mathbf{u}^T . \mathbf{k} = 0 \,. \tag{9}$$

Weiter nach (6) ist

$$\mathbf{u}^{\cdot T} . \mathbf{k} = 0 = \mathbf{u}^T . \mathbf{A} . \mathbf{k} = 0 \,. \tag{10}$$

Da man in der Hyperebene $(n - 1)$ linear unabhängige Vektoren konstruieren kann und $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ ist, können die Bedingungen (9) und (10) nur dann gelten, wenn

$$\mathbf{A}^T\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k} \,, \tag{11}$$

also in dem Fall, dass die Hyperebene mit dem ersten Momentanpol, dh. mit dem Nullpunkt, koinzidiert. Aus der Beziehung

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T \quad \text{folgt} \quad \mathbf{x}^{\cdot T} . \mathbf{k} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{k}$$

und setzt man aus (11) ein, bekommt man

$$\mathbf{x}^{\cdot T} . \mathbf{k} = \mathbf{x}^T\lambda\mathbf{k} \,.$$

Da die linke Seite verschwindet, verschwindet auch die rechte, so dass der Vektor $\mathbf{x}$ zu dem Vektor $\mathbf{k}$ orthogonal ist und daraus folgt schon die Behauptung.

Bemerkung: Ausser den invarianten Geraden und Hyperebenen kann man noch weitere invariante lineare Gebilde, dh. Unterräume von niedrigerer Dimensison als $n - 1$ finden. Zum Beispiel jede zwei komplex-konjugierte Eigenvektoren bestimmen eine Ebene der Dimension zwei. Zwei solche Ebenen bestimmen einen Unterraum von der Dimension 4 usw. Ein weiteres Beispiel soll zeigen, dass solche Fälle wirklich existieren.

Beispiel: Für die Dimension $n = 4$ hat man für S_4

$$\begin{vmatrix} 0; & p_{12}; & p_{13}; & p_{14} \\ -p_{12}; & 0 & \cdots & \cdots \\ -p_{13}; & \cdot & 0 & \cdots \\ -p_{14}; & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})^2 \,,$$

so dass die charakteristische Gleichung lautet:

$$(\alpha - \lambda)^4 + (\alpha - \lambda)^2 (p_{12}^2 + p_{13}^2 + \ldots) +$$
$$+ (p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})^2 = 0\,.$$

Eine zweifache reelle Wurzel bekommt man, wenn die Pfaffsche Determinante

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

verschwindet. Das kann eintreten, wenn z. B.

$$p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$$

ist, dh. für

$$\mathbf{a}^{\bullet} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad p_{23} = 0\,, \quad p_{24} = 0\,, \quad p_{34} = 0\,.$$

Wir erhalten dann für die Eigenvektoren folgende Gleichungen

$$p_{23}x_3 + p_{24}x_4 = 0$$
$$-p_{23}x_2 + p_{34}x_4 = 0\,,$$

so dass x_1 beliebig gewählt werden kann und

$$x_2 : x_3 : x_4 = p_{34} : (-p_{24}) : p_{23}$$

ist. Es existiert also eine Ebene von der Dimension 2, die z. B. durch die Vektoren $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, p_{34}, -p_{24}, p_{23})$ bestimmt ist, und deren alle Richtungen invariant sind.

Zwei weitere invariante Richtungen sind komplex-konjugiert und bestimmen eine reelle zweidimensionale Ebene mit reellen Richtungen, z. B. mit

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 : x_3 : x_4 = p_{23}p_{34} : (-p_{23}p_{24}) : ({}^{2}_{24} - p - p_{34}^{2})\,,$$
$$x_1 = 0\,, \quad x_2 : x_3 : x_4 = p_{24} : p_{34} : 0\,.$$

Beide Ebenen sind total orthogonal, wie man sich leicht überzeugen kann.

4. BAHNKURVEN EINER TANGENTIALBEWEGUNG

Betrachten wir eine reguläre Bewegungsphase mit der Wahl des Momentanpols im Nullpunkt des Koordinatensystems, dann gilt

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,. \tag{6}$$

Wenn wir die Zeit in der Phase zum stehen bringen, wird die Matrix **A** einen Phasenwert haben, dh. es wird sich um eine konstante Matrix handeln. Die Gleichung (6) in der wir den Parameter mit τ bezeichnen, beschreibt dann ein bestimmtes Feld, das durch ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koefizienten gegeben ist. Die Bahnkurven dieses Systems können als Bewegungskurven der Tangentialbewegung für eine gewählte Phase der Bewegung (1) interpretiert werden.

Die Lösung des Systems (6) ist von den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ und von den zugehörigen Eigenvektoren abhängig. Ist λ ein Eigenwert und $\mathbf{h}$ ein ihm entsprechender Eigenvektor, dann ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}\, e^{\lambda\tau} . \tag{12}$$

Lösung des Systems (6), wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Sind $\lambda_1; \lambda_2; \ldots, \lambda_n$ voneinander verschiedene Eigenwerte, dann sind entsprechende Lösungen

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{h}_i\, e^{\lambda_i \tau} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

linear unabhängig und die allgemeine Lösung des Systems ist von folgender Form

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{h}_i\, e^{\lambda_i \tau} .$$

Wir führen nicht die allgemeine Lösung des Systems (6) im Falle vielfacher Eigenwerte an, denn wir beschränken uns im weiteren auf eine anschauliche Interpretation besonders für die Dimension $n = 2$ und $n = 3$.

Mit der Bezeichnung aus den vorhergehenden Absätzen kann man (6) für $n = 2$ wie folgt schreiben

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \alpha; & p \\ -p; & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} ,$$

wobei $p = 0$ nicht in Betracht kommt, denn in diesem Fall bekommt man eine homothätische Phase und die Bahnkurven der Tangentialbewegung sind Geraden.

Ist also $p \neq 0$, dann hat man als Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm jp$ und als Eigenvektoren

$$x_1 : x_2 = 1 : \pm j .$$

Die Bahnkurven der Tangentialbewegung werden folgendermassen ausgedrückt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{(\alpha + jp)\tau} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{(\alpha - jp)\tau} ,$$

oder in der Realform

$$x_1 = e^{\alpha\tau}(K_1 \cos p\tau + K_2 \sin p\tau) ,$$

$$x_2 = e^{\alpha\tau}(K_2 \cos p\tau - K_1 \sin p\tau) .$$

Erhebt man die beiden letzten Gleichungen zur zweiten Potenz und adiert zusammen, bekommt man eine Gleichung, aus der er kennbar ist, dass es sich um ein System von Spirallinien mit dem gemeinsamen Asymptotenpunkt im ersten Momentanpol handelt.

Für $n = 3$ und eine nicht homothätische Phase benutzen wir die Ergebnisse aus dem dritten Absatz. In einer solchen Phase existiert eine invariante Gerade und eine invariante Ebene, die zueinander senkrecht stehen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die erwähnte Gerade zur dritten Koordinatenachse wird. Dann hat die Matrix **A** folgende Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha; & p; & 0 \\ -p; & \alpha; & 0 \\ 0; & 0; & \alpha \end{pmatrix}$$

und das System von Differentialgleichungen (6)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + p x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_3 \end{aligned}$$

hat nach Integration die Lösung

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\alpha\tau}(C_1 \cos p\tau + C_2 \sin p\tau)\,, \\ x_2 &= e^{\alpha\tau}(C_2 \cos p\tau - C_1 \sin p\tau)\,, \\ x_3 &= C_3\, e^{\tau\alpha}\,. \end{aligned}$$

Eliminiert man den Parameter τ aus diesen Gleichungen, bekommt man

$$x_1^2 + x_2^2 = K x_3^2\,,$$

woraus sichtbar wird, dass die gefundenen Bahnkurven der Tangentialbewegung auf Rotationskegelflächen, deren Achse die invariante Gerade der zugehörigen Phase ist, liegen.

Literaturverzeichnis

[1] *R. E. Bellman:* Introduction to matrix analysis. New York—Toronto—London 1960.
[2] *Б. А. Розенфелд:* Многомерные пространства. Moskva 1966.

Souhrn

LINEÁRNÍ INVARIANTNÍ ÚTVARY V EKVIFORMNÍCH POHYBECH PROSTORŮ KONEČNÉ DIMENZE

JOSEF SOMER

V práci studuje autor ekviformní pohyby prostorů libovolné konečné dimenze z hlediska invariantních lineárních útvarů v regulárních fázích pohybu. Ke studiu těchto útvarů je užito maticového vyjádření, zvláště pak vlastností ortogonálních matic, charakteristických čísel a vektorů. Výsledky, ke kterým se dochází, jsou do jisté míry závislé na paritě dimenze příslušného prostoru. V závěru práce charakterizuje regulární fáze pohybu trajektoriemi tzv. tangenciálního pohybu, tj. křivkami, které se označují jako Kleinovy-Lieovy křivky.

Adresse des Autors: RNDr. *Josef Somer*, CSc., katedra matematiky FEL ČVUT Praha, pracoviště Poděbrady — zámek 1/I.