Aplikace matematiky

Mária Pôbišová

Die Aufgaben über die Teilung des Stangenmaterials

Aplikace matematiky, Vol. 23 (1978), No. 2, 98–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103735

DIE AUFGABEN ÜBER DIE TEILUNG DES STANGENMATERIALS

Mária Pôbišová

(Eingegangen 24. August 1976)

Eine wichtige Gruppe der Aufgaben bei der Anwendung der linearen Programmierung in der Praxis stellen die Aufgaben der Abfallminimalisierung bzw. der Gewinnmaximierung dar. Es handelt sich in der Regel um die Aufgaben „der Zusammenstellung von optimalen Aufteil- bzw. Schnittplänen, die die effektivste Ausnutzung der Ausgangsmaterialien sicherstellen", wie z. B. beim Stahlstangen-, Bohr-, Holzbalken-, Glasscheiben-, Blechtafel-, Papierbogen-, Möbelteilezuschneiden und dgl.

Diese Aufgaben lassen sich folgendermaßen einteilen:

a) Aufgaben, die die Teilung des Stangenmaterials betreffen,

b) Aufgaben, über die Flächenteilung des Tafelmaterials.

Wir wollen uns nun mit der Lösung der Aufgabe des Typs a) befassen.

1. Etappe der die Stangenmaterialteilung betreffenden Aufgaben beruht in der Zusammensetzung des Katalogs aller möglichen Aufteil – bzw. Schnittpläne, bei Realisierung derer ein kürzerer Abfall entsteht als es die Länge des kürzesten Zuschnitts aufweist.

2. Etappe besteht aus der Bestimmung der Optimalzusammenstellung von Schnittplänen, bei der die kleinste Anzahl der Ausgangsmaterialien für die Herstellung einer bestimmten, vorher festgelegten Menge einzelner Zuschnitte zu verwenden ist. Die Minimalisierung der verwendeten Materialienanzahl führt zugleich zur Abfallminimalisierung, bzw. zur Gewinnmaximierung. Diese Etappe von Aufgaben über die Stangenmaterialteilung führt deshalb auf die Applikation der linearen Programmierung folgenderweise:

Jeder Schnittplan wird durch n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ charakterisiert, wobei a_i eine Anzahl der Zuschnittsstücke einer bestimmten Art aus der gegebenen Menge der in Betracht gezogenen verschiedenen Zuschnittsarten ist. Alle Schnittpläne bilden eine Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Typ $(n \times m)$, wobei m die Anzahl aller Matrixspalten von $\boldsymbol{A}$

und damit auch die Anzahl aller in Betracht gezogener Schnittpläne ist. Sei $b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n$ eine Folge von n Zahlen, wobei b_i die Stückanzahl der entsprechenden Zuschnittsarten sind, die zu schneiden sind, und x_j für $j = 1, 2, \ldots, m$ sei die Variable, die die Realisierungsanzahl des j-ten Schnittplans ausdrückt. Um die Optimalzusammenstellung der Schnittpläne (die die Anzahl von verbrauchten Materialien und damit auch das Abfallprozent minimalisiert) zum gegebenen Verzeichnis n verschiedener Zuschnitsarten zu bestimmen, heißt es die Optimallösung der Aufgabe der linearen Programmierung zu bestimmen, die folgende Form aufweist:

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \min$
x_j = nichtnegative, ganze Zahl

Ungleichungen vom Typ $\geqq$ wurden bei der Konstruktion des mathematischen Modells für die Bestimmung der Optimalzusammenstellung der Schnittpläne deshalb verwendet, daß sie die Auswahl auf alle Schnittpläne verbreiten, die sich als weniger zweckmäßig erweisen, als die direkt in die Lösung einbegriffenen Pläne. Die Zweckfunktion $z = \sum_{i=1}^{m} x_i = \min$ ist ein Ausdruck für die Minimalisierung der Anzahl verwendeter Ausgangsmaterialien, die für die Herstellung einer durch die Folge von n-Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ausgedrückten Menge von einzelnen Zuschnittsarten notwendig sind. Eine andere mögliche Zweckfunktion ist z. B. die Funktion $z = o_1x_1 + o_2x_2 + \ldots + o_mx_m = \min$, in der die Koeffizienten o_i entweder das Abfallprozent aus dem zuständigen Schnittplan ausdrücken, oder den in mm^2 ausgedrückten Abfall usw.

Diese, sowie jede andere Aufgabe der linearen Progammierung läßt sich durch die Simplexmethode lösen und zwar durch Rechentechnikeinsatz, da bereits einige wertvolle Programme für die Realisierung der mathematischen Algorithmen mittels automatischer Rechenanlagen zur Verfügung stehen.

Mit Rücksicht darauf, daß für die Praxis ein verhältnismäßig großes Problem in der Lösung der 1. Etappe der Aufgaben über die Stangenmaterialteilung besteht (da in den meisten Betrieben dieses Problem auf nichtmathematische, zufällige Weise gelöst wird) wollen wir uns in diesem Aufsatz eben mit dem Problem der Bestimmung des Katalogs der Schnittpläne zum gegebenen Verzeichnis von n verschiedenen Zuschnitten befassen. Diese Problematik in den Aufgaben über die Stangenmaterialteilung führt uns zur Konstruktion des Systems von 2 Ungleichheiten mit n Unbekannten, mit der Ergänzungsvoraussetzung daß die Unbekannten nichtnegative ganze Zahlen sind. (Siehe das System von Ungleichheiten I.) Es gibt schon eine Menge von verschiedenen Methoden (z. B. die Methoden der Lösung der diophantischen Gleichungen – die auf dem

Prinzip des Euklidschen Algorithmus aufgebaute Methode, die auf Grund des Eulerschen Satzes gebildete Methode über die Teilbarkeit der Zahlen u. a.) für die Bestimmung ganzzahliger, nichtnegativer Lösungen des Gleichungssystems bzw. der Ungleichheiten, jedoch die Berechnungserfahrungen aus der Praxis sind zur Zeit ungenügend. Das System von Ungleichheiten I weist eine Spezialform sowie einige weitere Besonderheiten auf, die sich vorteilhaft für die Bildung der Spezialverfahren bei der Bestimmung aller seiner ganzzahligen nichtnegativen Lösungen ausnützen lassen. Das Ziel dieses Beitrags besteht darin, alle diese Besonderheiten sowie die auf ihrem Grund entstandene Methode der Lösung zu beschreiben. Diese Methode läßt sich verhältnismäßig einfach mittels Rechentechnik bearbeiten. Es hängt vom Leser ab, ob er die betreffende Methode für vorteilhaft halten wird, oder nicht.

DIE BILDUNG EINES KATALOGS ALLER MÖGLICHEN SCHNITTPLÄNE ZUM GEGEBENEN ZUSCHNITTSVERZEICHNIS

In der ersten Reihe ist es notwendig einige Fachbegriffe zu erläutern.

Das Grundformat – eine Stange (ein Rohr) gebildet aus dem Ausgangsmaterial, die eine vorher festgelegte Länge hat.

Der Schnittplan – Anweisung der Grundformatsteilung auf die Teile, d. h. auf die Zuschnitte der gegebenen Länge.

Der Hauptgesichtspunkt für die Bildung der Schnittpläne ist die Kombination von verschiedenen Zuschnittsarten ins Grundformat. Wenn einzelne Zuschnitte von verschiedener Länge der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet werden, wobei der k-te Zuschnitt die Länge c_k hat und das Grundformat die Länge D, besitzt so gilt die Aufgabe der Bildung eines Katalogs aller Schnittpläne, bei Realisierung deren der kleinste Abfall entsteht, als es die Länge des kürzesten von den in Betracht gezogenen Zuschnitte aufweist als äquivalent mit der Aufgabe „alle ganzzahlige, nichtnegative (weiterhin nur GN) Lösungen des folgenden Systems von Ungleichheiten zu bestimmen:

I.
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n \leqq D$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n \geqq D - d$$

Hierbei sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ Unbekannte, wobei x_i die Anzahl der auf dem Grundformat hintereinandergelegten Zuschnitte P_i ist". Die Konstante d ist eine zweckmäßig vorher festgelegte Zahl, deren Wahl voll von der Länge D des Grundformats abhängt und vom Gewinnprozent unter das man nicht sinken kann. Es sollte eben diese Ungleichheit gelten:

(1)
$$d < \min(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Für die einzelne Variablen x_i gelten Begrenzungen:

$$\text{II.} \qquad 0 \leqq x_i \leqq [D/c_i],$$

wo $[D/c_i]$ der untere ganze Teil des Quotienten D/c_i ist.

Das System von Ungleichheiten I, die Beziehungen II berüchsichtigend, kann folgenderweise geschrieben werden:

$$\text{III.} \qquad D - d \leqq \mathbf{c}^T . \mathbf{x} \leqq D$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{M},$$

wo unter dem Produkt $\mathbf{c}^T . \mathbf{x}$ das Skalarprodukt von Vektoren $\mathbf{c}^T$ und $\mathbf{x}$ zu verstehen ist, wobei $\mathbf{c}^T$ ein n-dimensionaler Zeilenvektor ist:

$$(2) \qquad \mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

und die Vektoren $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{M}$ sind n-dimensionale GN Spaltenvektoren:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} [D/c_1] \\ [D/c_2] \\ \vdots \\ [D/c_n] \end{bmatrix}.$$

Das System von Ungleichheiten III bzw. das ursprüngliche System I könnte man mittels Zusatzvariablen in ein Gleichungssystem übertragen und dieses als ein System von diophantischen Gleichungen zu lösen. Da das in Betracht gezogene System von Ungleichheiten III einige spezielle Eigenschaften aufweist, wollen wir das Problem der Ganzzahligkeit und Nichtnegativität bei der Lösung dieses Systems auf eigene Weise analysieren.

„Um alle GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III zu bestimmen“ bedeutet es „die Menge β aller GN Vektoren $\mathbf{x} \leqq \mathbf{M}$ zu testen, und davon nur diejenige zu wählen, die den folgenden Ungleichheiten entsprechen: $D - d \leqq \mathbf{c}^T . \mathbf{x} \leqq D$“. Diese Weise des Suchens von GN Lösungen ist für $n > 2$, was die Zeit angeht, anspruchsvoll, denn die Menge β enthält insgesamt:

$$S = ([D/c_1] + 1) \times ([D/c_2] + 1) \times \ldots \times ([D/c_n] + 1)$$

GN Vektoren (wenn man vorläufig alle GN Vektoren $\mathbf{x}$ in Betracht zieht, für die $\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{M}$ gilt). Deshalb wollen wir versuchen – was die Elementenanzahl angeht – eine möglichst kleinste Untermenge der Menge β zu bestimmen, daß für die Bestimmung aller GN Lösungen $\mathbf{x}$ des Systems III genügend ist nur Vektoren dieser Untermenge zu überprüfen.

Der Einfachheit wegen wollen wir die Zuschnitte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in der Weise ordnen, daß deren Ausmaße $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine wachsende Folge positiver Zahlen bilden. Dementsprechend bilden auch die Summen S_1, $S_2, \ldots, S_n$, wobei $S_k =$

$= \sum_{i=1}^{k} c_i$, eine wachsende Folge positiver Zahlen. Im Falle daß $S_n > D$, existiert eben 1 Index $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ so, daß $S_\alpha \leqq D < S_{\alpha+1}$. Wenn $S_n \leqq D$, dann ist der Index $\alpha = n$.

Satz 1. 1. *Die Menge der GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III bilden n-dimensionale GN Vektoren, die höchstens α von Null verschiedene Komponenten enthalten, wo $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ein solcher Index ist, daß die Ungleichheit $S_\alpha \leqq D < S_{\alpha+1}$, oder $\alpha = n$ gilt, wenn $S_n \leqq D$ ist.*

2. *Dabei gilt:*

a) *Vektoren mit einer von Null verschiedenen Komponente haben diese Komponente, die dem Maximum der zuständigen Veränderlichen gleicht,*

b) *Vektoren mit 2, 3, ..., α von Null verschiedenen Komponenten können höchstens eine Komponente mit dem Maximalwert haben.*

c) *Im Falle, daß $c_1 < c_{\alpha+1} - c_\alpha$ und überdies hinauf auch die Ungleichheiten*

$$S_\alpha < D - d\,, \quad S_\alpha + c_1 > D \tag{3}$$

gelten, bzw. wenn $c_1 \geqq c_{\alpha+1} - c_\alpha$ und überdies hinauf auch die Ungleichheiten

$$S_\alpha < D - d\,, \quad S_{\alpha+1} - c_\alpha > D \tag{4}$$

gelten, kann keiner von den n-dimensionalen GN Vektoren, die α von Null verschiedene Komponenten haben, eine GN Lösung des Systems III sein.

Beweis: Die Behauptung des 1. Teils des Satzes ist aus den sich vor dem Satz befindenden Erwägungen ersichtlich. Der Teil 2a) ergibt sich direkt aus den Eigenschaften des Systems von Ungleichheiten III, da auf Grund der Koeffizientenordnung $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und entsprechend dem Schema (1) für die Zahl d die Ungleichung $d < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ gilt. Wir wollen den Teil 2b) beweisen.

Beweisen wir zuerst, daß wenn $c_i \leqq D$ ist, so gilt die folgende Ungleichheit:

$$c_i \,.\, [D/c_i] > D/2 \tag{5}$$

b$_1$) Wenn D/c_i eine ganze Zahl ist, so ist

$$c_i \,.\, [D/c_i] = c_i \,.\, D/c_i = D > D/2$$

b$_2$) Wenn D/c_i keine ganze Zahl ist, so kann D folgende Form aufweisen:

$$D = k \,.\, c_i + z_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

wo k eine natürliche Zahl $k \geqq 1$ und $z_i < c_i$ ist. Für den Ausdruck $c_i \,.\, [D/c_i]$ gilt:

$$c_i \,.\, [D/c_i] = c_i \,.\, [(k \,.\, c_i + z_i)/c_i] = c_i \,.\, [k + z_i/c_i] = k \,.\, c_i\,,$$

d.h. $\quad c_i \,.\, [D/c_i] = k \,.\, c_i\,.$

Aber es ist $k \, . \, c_i > D/2$, deshalb $c_i \, . \, [D/c_i] > D/2$. Wenn eben eine entgegengesetzte Ungleichheit $k \, . \, c_i \leqq D/2$ gelten sollte, kommen wir zum Widerspruch, daß $k < 1$ ist.

$$2k \, . \, c_i \leqq D$$

$$2k \, . \, c_i \leqq k \, . \, c_i + z_i$$

$$k \, . \, c_i \leqq z_i$$

$$k \leqq z_i/c_i < 1$$

$$k < 1$$

Auf Grund der Ungleichheit (5) gilt auch die Ungleichheit

$$c_i \, . \, [D/c_i] + c_j \, . \, [D/c_j] > D \, , \tag{6}$$

die der 1. Ungleichheit des Systems III widerspricht. Dementsprechend jeder GN Vektor, der wenigstens 2 von Null verschiedene Komponenten hat und stellen eine GN Lösung des Systems III dar, kann am meisten 1 Komponente des Maximalwertes haben. Beweis des Teils 2c).

Sei mit $\boldsymbol{\varrho}_\alpha$ die Menge aller GN Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}$ bezeichnet, die α von Null verschiedene Komponenten haben und für jede Komponente x_i die Ungleichheit

$$0 \leqq x_i \leqq [D/c_i] \, , \quad \text{d. h.} \quad \boldsymbol{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \boldsymbol{M}$$

gilt.

Zu jedem Vektor $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\varrho}_\alpha$ ordnen wir das Skalarprodukt $\mathbf{c}^T \, . \, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, . \, x_i$ zu. Die Vektoren $\mathbf{x}$ ordnen wir in die Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ so, daß die Skalarprodukte dieser mit dem Vektor $\mathbf{c}^T$ eine nichtfallende Folge $\boldsymbol{P}'_\alpha$ bilden. Der erste mögliche GN Vektor in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ ist der Vektor $\mathbf{x}^\circ$, der α Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ hat, die der Zahl 1 gleichen und andere sind seine Nullkomponenten, denn für das Skalarprodukt ist $\mathbf{c}^T \, . \, \mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^{\alpha} c_i = \min_{\mathbf{x} \in \varrho_\alpha} (\mathbf{c}^T \, . \, \mathbf{x}) = S_\alpha$.

c_1) Wenn $c_1 < c_{\alpha+1} - c_\alpha$, dann nach dem $\mathbf{x}^0$ ersten weiteren möglichen GN Vektor in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ geht folgender Vektor nach:

$$\mathbf{x}^1 = [2, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]^T \, ,$$

weil $\mathbf{c}^T \, . \, \mathbf{x}^1 = \sum_{i=1}^{\alpha} c_i + c_1 = S_\alpha + c_1$, wo $c_1 = \min(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Unter der Voraussetzung, daß die Ungleichheiten (3) erfüllt sind, kann keiner der Vektoren $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$, sowie kein anderer in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ diesem nachfolgender GN Vektor eine GN Lösung des Systems III sein.

c_2) Wenn $c_1 > c_{\alpha+1} - c_\alpha$, dann dem $\mathbf{x}^0$ ersten weiteren möglichen GN Vektor in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ folgt der folgende Vektor:

$$\mathbf{x}^2 = [1, 1, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T,$$

denn es ist $\mathbf{c}^T . \mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^{\alpha-1} c_i + c_{\alpha+1} = S_{\alpha+1} - c_\alpha = S_\alpha + (c_{\alpha+1} - c_\alpha)$, wo $c_{\alpha+1} - - c_\alpha = \min (c_j - c_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ und $j = \alpha + 1, \ldots, n$.

Wenn $c_1 = c_{\alpha+1} - c_\alpha$, dann kommt es nicht darauf an, welcher der Vektoren $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ die 2. und welcher die 3. Stelle in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$ einnimmt, denn das Skalarprodukt dieser mit dem Vektor $\mathbf{c}^T$ ist einander gleich.

Deshalb unter der Voraussetzung, daß die Ungleichheit $c_1 \geqq c_{\alpha+1} - c_\alpha$ gilt und zugleich andere Ungleichheiten (4) erfüllt sind, kann keiner der Vektoren $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^0$ sowie kein anderer diesen nachfolgender GN Vektor $\mathbf{x}$ in der Folge $\boldsymbol{P}_\alpha$, eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III sein.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 durchgeführt.

Mit dem Zeichen $\boldsymbol{\beta}'$ bezeichen wir eine Untermenge der Menge und reihen wir in diese alle diejenigen n-dimensionalen GN Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}$ ein, die den Behauptungen des Satzes 1 entsprechen. Für die GN Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}'$ mit einer von Null verschiedenen Komponente, die dem Maximum der zuständigen Veränderlichen gleicht, können 2 Fälle vorkommen:

1) Wenn $c_i . [D/c_i] \geqq D - d$ ist, so ist der Vektor $\mathbf{x}$ mit einer Komponntee $x_i \neq 0$, die $[D/c_i]$ gleicht, eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III, oder

2) wenn $c_i . [D/c_i] < D - d$ ist, so ist der in Betracht gezogene Vektor $\mathbf{x}$ keine GN Lösung des Systems III.

In den beiden Fällen gilt eine scharfe Ungleichheit:

$$c_i . ([D/c_i] + 1) > D.$$

Deshalb der GN Vektor $\mathbf{x}$ mit einer Komponente $x_i \neq 0$, die $[D/c_i] + 1$ gleicht, kann nicht eine GN Lösung des Systems Ungleichheiten III sein, und somit kein GN Vektor $\mathbf{x}$, (dessen erste $(i - 1)$ Komponenten der Null gleichen, $x_i \neq 0$ und für dessen Komponenten $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ die Ungleichheiten:

$$x_i + [c_{i+1}/c_i] . x_{i+1} + [c_{i+2}/c_i] . x_{i+2} + \ldots + [c_n/c_i] . x_n \geqq [D/c_i] + 1$$

gilt) kann nicht zur Menge der GN Lösungen des Systems gehören, denn es ist

$$\mathbf{c}^T . \mathbf{x} = \sum_{k=i}^{n} c_k . x_k = c_i . \sum_{k=i}^{n} (c_k/c_i) . x_k \geqq c_i . \sum_{k=1}^{n} [c_k/c_i] . x_k \geqq$$
$$\geqq c_i . ([D/c_i] + 1) > D.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung des folgenden Satzes.

Satz 2. *Für die Summen einzelner Komponenten der GN Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}'$, die die GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III sind, müssen folgende Ungleichheiten erfüllt werden:*

$$\begin{aligned}
x_1 + [c_2/c_1] \,.\, x_2 + [c_3/c_1] \,.\, x_3 + \dots + [c_n/c_1] \,.\, x_n &\leqq [D/c_1] \\
.\, x_2 + [c_3/c_2] \,.\, x_3 + \dots + [c_n/c_2] \,.\, x_n &\leqq [D/c_2] \\
&\vdots \\
x_{n-1} + [c_n/c_{n-1}] \,.\, x_n &\leqq [D/c_{n-1}] \\
x_n &\leqq [D/c_n]
\end{aligned} \tag{7}$$

Mit dem Zeichen $\boldsymbol{\beta}''$ bezeichnen wir eine Untermenge der Menge $\boldsymbol{\beta}' \in \boldsymbol{\beta}$, die nur der Ungleichheit (7) entsprechende GN Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}'$ enthält. Weiterhin wollen wir die Gruppen $\mathbf{X}$ von Vektoren $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\beta}''$ so bilden, daß die in die gleiche Gruppe $\mathbf{X}$ gehörenden Vektoren $\mathbf{x}$ sich voneinander nur durch eine Komponente x_1 unterscheiden. Damit bekommen wir eine Zerlegung von GN Vektoren der Menge $\boldsymbol{\beta}''$ in Klassen. Die Ordnung der Klassen wird folgenderweise definiert:

Definition 1. *Die Klasse $\mathbf{X}'$, die durch eine Unterfolge $x_2', x_3', \dots, x_n'$ bestimmt ist, folgt der Klasse $\mathbf{X}$ nach, die durch eine Unterfolge $x_2, x_3, \dots, x_n$ bestimmt ist, wenn die Zahlen*

$$c' = x_n' x_{n-1}' \dots x_2' \quad und \quad c = x_n x_{n-1} \dots x_2 \,,$$

geschrieben in g-adischen System, für $g \geqq [D/c_1] + 1$, die Ungleichheit $c' > c$ erfüllen.

Die Ordnung der GN Vektoren $\mathbf{x}$ in den Klassen definiert man folgenderweise:

Definition 2. *Der Vektor $\mathbf{x}'$ folgt in der Klasse $\mathbf{X}$ dem Vektor $\mathbf{x}$ nach, wenn für seine ersten Komponenten x_1' und x_1 die Ungleichheit $x_1' < x_1$ gilt.*

Die Elementenfolge der Menge $\boldsymbol{\beta}''$, die durch eine nach Definition 1 und 2 gegebene Ordnung bestimmt ist, bezeichnen wir γ. Dementsprechend repräsentiert die erste Klasse der Vektoren $\mathbf{x}$ in der Folge γ eine Klasse $\mathbf{X}^0$, die durch eine Nullunterfolge bestimmt wird, und die erste mögliche GN Lösung des Systems III ist der 1. Vektor $\mathbf{x}^0$ der Klasse $\mathbf{X}^0$, d. h. GN Vektor, dessen erste Komponente $x_1 = [D/c_1]$ ist. Kein anderer Vektor der Klasse $\mathbf{X}^0$ kann die GN Lösung des Systems III sein. Wenn $[D/c_2] \geqq 1$, nach der Klasse $\mathbf{X}^0$ folgt die Klasse $\mathbf{X}^1$, die durch die Unterfolge $1, 0, \dots, 0$ bestimmt ist, und die folgende GN Lösung nach dem Vektor $\mathbf{x}^0$, kann nur der Vektor $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}^1$ sein, dessen erste Komponente x_1^1 folgende Ungleichheit erfüllt

$$0 \leqq x_1^1 \leqq [D/c_1] - [c_2/c_1] \,.$$

Auf Grund der definierten Klassen- und Vektorenordnung $\mathbf{x}$ in der Folge γ, und da die Zahlen $d, c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine wachsende Folge bilden, können auch weitere Behauptungen über GN Vektoren $\mathbf{x} \in \gamma$ bewiesen werden, die entweder GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III sind, oder gar keine Lösungen darstellen. Der Kürze halber, wollen wir sie ohne Beweise anführen.

Satz 3. *In jeder Klasse* $\mathbf{X}$ *der Vektoren* $\mathbf{x} \in \gamma$ *kann höchstens ein GN Vektor existieren, der eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III ist.*

Bemerkung 1. Die Behauptung des Satzes 3 gilt für beliebige Komponenten x_i der GN Vektoren $\mathbf{x} \in \gamma$. D. h. in jeder Gruppe der GN Vektoren $\mathbf{x} \in \gamma$, die sich nur durch eine Komponente x_i voneinander unterscheiden, für $i = 1, 2, \ldots, n$, kann höchstens ein GN Vektor existieren, der eine GN Lösung des Systems III ist.

Satz 4. *Wenn in der Klasse* $\mathbf{X}$ *der Vektoren* $\mathbf{x} \in \gamma$ *2 hintereinander folgende GN Vektoren*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= [x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n]^T, \\ \mathbf{x}^2 &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \end{aligned} \tag{8}$$

existieren so, daß

$$\mathbf{c}^T . \mathbf{x}^1 > D \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T . \mathbf{x}^2 < D - d \tag{9}$$

ist, wobei für die Komponente x_1 *die Ungleichung* $x_1 \geqq [c_2/c_1]$ *gilt, dann existiert in der Klasse* $\mathbf{X}$ *kein Vektor, der eine* GN *Lösung des Systems III wäre und es gilt:*

a) *wenn der Quotient* c_2/c_1 *nicht ganzzahlig ist und die Ungleichheit*

$$x_2 + 1 + [c_3/c_2] . x_3 + \ldots + [c_n/c_2] . x_n \leqq [D/c_2] \tag{10}$$

gilt, so kann in der nachfolgenden durch Unterfolge $(n - 1)$ *der Komponenten* $x_2 + 1, x_3, \ldots, x_n$ *bestimmten Klasse* $\mathbf{X}'$, *nur der Vektor* $\mathbf{x}'$ *eine GN Lösung des Systems III sein, für dessen* 1. *Komponente die Gleichung*

$$x_1' = x_1 + 1 - \{c_2/c_1\} = x_1 - [c_2/c_1] \tag{11}$$

gilt.

b) *Wenn der Quotient* $(c_2 x_2 - c_3)/c_1$ *nicht ganzzahlig ist und die Ungleichheiten*

$$\begin{aligned} x_2 + 1 + [c_3/c_2] . x_3 + \ldots + [c_n/c_2] . x_n &> [D/c_2] \\ x_3 + 1 + [c_4/c_3] . x_4 + \ldots + [c_n/c_3] . x_n &\leqq [D/c_3] \end{aligned} \tag{12}$$

gelten, so kann in der nachfolgenden durch Unterfolge $(n - 1)$ *der Komponenten* $0, x_3 + 1, x_4, \ldots, x_n$ *bestimmten Klasse* $\mathbf{X}''$, *nur der Vektor* $\mathbf{x}''$ *eine GN Lösung des Systems III sein, für dessen* 1. *Komponente*

$$x_1'' = x_1 + 1 + [(c_2 . x_2 - c_3)/c_1] = x_1 + \{(c_2 . x_2 - c_3)/c_1\} \tag{13}$$

gilt.

Bemerkung 2. Es kann bewiesen werden, daß wenn im Satz 4 im Fall a) der Quotient c_2/c_1 ganzzahlig wäre, so ist in der Klasse $\mathbf{X}'$ kein Vektor eine GN Lösung und wenn im Fall b) der Quotient $(c_2 \,.\, x_2 - c_3)/c_1$ ganzzahlig wäre, so ist in der Klasse $\mathbf{X}''$ kein Vektor eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III.

Durch eckige Klammern wird der ganze Unterteil bezeichnet und der ganze Oberteil des entsprechenden Quotienten durch geschweifte Klammern.

Die Bedingung für die Komponente x_1 des Vektors $\mathbf{x}^2 \in \mathbf{X}$, daß $x_1 \geqq [c_2/c_1]$, ist im Satz 4 nur deswegen angeführt, daß ein weiterer spezieller Fall für $0 \leqq x_1 < [c_2/c_1]$ ausführlich im nachfolgen Satz 5 analysiert wird.

Satz 5. *Wenn in der Klasse $\mathbf{X}$ der Vektoren $\mathbf{x} \in \gamma$. die durch die Unterfolge der $(n-1)$ Komponenten $0, 0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, wo $2 \leqq k \leqq n$ und $x_k \neq 0$, 2 hintereinanderfolgende GN Vektoren*

$$\mathbf{x}^1 = [x_1 + 1, 0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T,$$
$$\mathbf{x}^2 = [x_1, 0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$$

existieren so, daß

$$\mathbf{c}^T \,.\, \mathbf{x}^1 < D \quad \textit{und} \quad \mathbf{c}^T \,.\, \mathbf{x}^2 < D - d\,, \tag{15}$$

wobei $0 \leqq x_1 < [c_2/c_1]$, dann gibt es in der Klasse $\mathbf{X}$ keinen Vektor, der eine GN Lösung des Systems III wäre und es gilt:

a) *wenn der Quotient $(c_k \,.\, x_k - c_{k+1}) - c_1$ nicht ganzzahlig ist und die Ungleichheiten*

$$\begin{gathered} 2 \leqq k \leqq n-1 \\ x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \,.\, x_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \,.\, x_n \leqq [D/c_{k+1}] \end{gathered} \tag{16}$$

gelten, so die dem $\mathbf{X}$ nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, ist die durch die Unterfolge der $(n-1)$ Komponenten $0, 0, \ldots \ldots, 0, 0, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, \ldots, x_n$ bestimmte Klasse $\mathbf{X}'$ und die Lösung kann nur der Vektor $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$ sein, dessen 1. Komponente die Gleichung

$$x_1' = [(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1] + 1 = \{(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1\} \tag{17}$$

erfüllt.

b) *Wenn der Quotient $(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ nicht ganzzahlig ist und die Ungleichheiten*

$$\begin{gathered} 2 \leqq k \leqq n-2 \\ x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \,.\, x_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \,.\, x_n > [D/c_{k+1}] \\ x_{k+2} + 1 + [c_{k+3}/c_{k+2}] \,.\, x_{k+3} + \ldots + [c_n/c_{k+2}] \,.\, x_n \leqq [D/c_{k+2}] \end{gathered} \tag{18}$$

gelten, so ist die dem $\boldsymbol{X}$ *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, die durch die Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten bestimmte Klasse* $\boldsymbol{X}''$ *und die GN Lösung kann nur so ein Vektor* $\mathbf{x}'' \in \boldsymbol{X}''$ *sein, dessen* 1. *Komponente die Gleichung*

$$x_1'' = \left[(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1\right] + 1 = \tag{19}$$
$$= \left\{(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1\right\}$$

erfüllt.

c) *Wenn folgende Ungleichheiten gelten*

$$k \geqq n-1 \tag{20}$$
$$x_n = \left[D/c_n\right],$$

so kann in der Folge γ *kein dem Vektor* $\mathbf{x}^2 \in \boldsymbol{X}$ *nachfolgender Vektor mehr eine GN Lösung sein.*

Bemerkung 3. Es kann bewiesen werden, daß wenn im Satz 5 im Fall a) der Quotient $(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1$ ganzzahlig wäre, so gebe es in der Klasse $\boldsymbol{X}'$ keine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III und dgl. wenn im Fall b) der Quotient $(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ ganzzahlig wäre, so möchte in der Klasse $\boldsymbol{X}''$ keine GN Lösung des Systems III existieren.

Folgende 2 Sätze geben uns eine spezielle Auskunft über die letzten Vektoren in den Klassen, wobei es aus der Definition 2 ersichtlich ist, daß in jeder Klasse $\boldsymbol{X}$ der letzte Vektor ein solcher ist, für dessen 1. Komponente $x_1 = 0$ ist.

Satz 6. *Wenn für den letzten Vektor* $\mathbf{x}$ *der Klasse* $\boldsymbol{X}$, die durch *Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird, wo* $2 \leqq k \leqq n-1$, $x_k \neq 0$, *folgende Ungleichheit gilt*

$$\mathbf{c}^T \,.\, \mathbf{x} > D\,, \tag{21}$$

so ist in der Klasse $\boldsymbol{X}$ *kein Vektor, der eine GN Lösung des Systems III wäre und es gilt:*

a) *unter der Voraussetzung, daß*

$$2 \leqq x \leqq n-1 \tag{22}$$
$$x_{k+1} + 1 + \left[c_{k+2}/c_{k+1}\right] . \, x_{k+2} + \ldots + \left[c_n/c_{k+1}\right] . \, x_n \leqq \left[D/c_{k+1}\right]$$

gilt, ist die dem $\boldsymbol{X}$ *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, die Klasse* $\boldsymbol{X}'$, *die durch Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, 0, 0, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird und die GN Lösung* $\mathbf{x}' \in \boldsymbol{X}'$ *kann nur ein Vektor sein dessen* 1. *Komponente* x_1' *folgende erfüllt:*

a₁) (23) $x_1' \leqq \left[(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1\right]$, *wenn der Quotient* $(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1$ *nicht ganzzahlig ist oder*

a$_2$) (24) $x_1' \leqq (c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1 - 1$,

wenn der Quotient $(c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1$ *ganzzahlig ist.*

b) *Unter der Voraussetzung,* daß

$$2 \leqq k \leqq n - 2$$

$$(25) \qquad \begin{aligned} x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \,.\, x_{k+2} + \ldots + [c_n/x_{k+1}] \,.\, x_n &> [D/c_{k+1}] \\ x_{k+2} + 1 + [c_{k+3}/c_{k+2}] \,.\, x_{k+3} + \ldots + [c_n/x_{k+2}] \,.\, x_n &\leqq [D/c_{k+2}] \end{aligned}$$

gilt, ist die dem **X** *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, ist die Klasse* **X**$''$, *die durch Unterfolge der* $(n - 1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, 0, 0, x_{k+2} + 1, x_{k+3}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird und die GN Lösung* $\mathbf{x}'' \in \mathbf{X}''$ *kann nur ein Vektor sein, dessen* 1. *Komponente* x_1'' *folgendes erfüllt*:

b$_1$) (26) $x_1'' \leqq [(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1]$,

wenn der Quotient $(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ *nicht ganzzahlig ist oder*

b$_2$) (27) $x_1'' \leqq (c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1 - 1$,

wenn der Quotient $(c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ *ganzzahlig ist.*

c) *Unter der Voraussetzung, daß*

$$(28) \qquad \begin{aligned} k &= n - 1 \\ x_n &= [D/c_n] \end{aligned}$$

gilt, kann in der Folge γ *kein dem Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *nachfolgender Vektor eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III sein.*

Satz 7. *Wenn für den letzten Vektor* **x** *der Klasse* **X**, *die durch die Unterfolge der* $(n - 1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, x_i = 1, 0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird, wo für Indexe i, k folgende Ungleichheiten gelten*:

$$(30) \qquad 2 \leqq i \leqq k - 1 \quad \textit{und} \quad 3 \leqq k \leqq n ,$$

die Ungleichheit erfüllt wird

$$(31) \qquad \mathbf{c}^T \,.\, \mathbf{x} > D ,$$

so ist in der Klasse **X** *kein Vektor, der eine GN Lösung des Systems III wäre und es gilt:*

a) *unter der Voraussetzung, daß*

$$(32) \qquad \begin{aligned} 2 &\leqq i \leqq k - 1 \\ 3 &\leqq k \leqq n - 1 \end{aligned}$$

$$x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \,.\, x_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \,.\, x_n \leqq [D/c_{k+1}] ,$$

ist die dem $\mathbf{X}$ *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III vorkommen kann, die Klasse* $\mathbf{X}'$, *die durch Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, x_{k+1}+1, x_{k+2}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird und eine GN Lösung* $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$ *kann nur ein Vektor sein, dessen* 1. *Komponente* x_1' *folgende Ungleichheit erfüllt:*

a$_1$) (33) $x_1' \leqq [(c_i + c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1]$,

wenn der Quotient $(c_i + c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1$ *nicht ganzzahlig ist oder*

a$_2$) (34) $x_1' \leqq (c_i + c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1 - 1$,

wenn der Quotient $(c_i + c_k \,.\, x_k - c_{k+1})/c_1$ *ganzzahlig ist.*

b) *Unter der Voraussetzung, daß*

$$2 \leqq i \leqq k-1$$

$$3 \leqq k \leqq n-2$$

(35) $$x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \,.\, c_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \,.\, x_n > [D/c_{k+1}]$$

$$x_{k+2} + 1 + [c_{k+3}/c_{k+2}] \,.\, c_{k+3} + \ldots + [c_n/c_{k+2}] \,.\, x_n \leqq [D/c_{k+2}] ,$$

ist die dem $\mathbf{X}$ *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III vorkommen kann, so eine Klasse* $\mathbf{X}''$, *die durch Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, x_{k+2}+1, x_{k+3}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird und die GN Lösung* $\mathbf{x}'' \in \mathbf{X}''$ *kann nur ein Vektor sein, dessen* 1. *Komponente folgende Ungleichheit erfüllt*:

b$_1$) (36) $x_1'' \leqq [(c_i + c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1]$,

wenn der Quotient $(c_i + c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ *nicht ganzzahlig ist oder*

b$_2$) (37) $x_1'' \leqq (c_i + c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1 - 1$,

wenn der Quotient $(c_i + c_k \,.\, x_k + c_{k+1} \,.\, x_{k+1} - c_{k+2})/c_1$ *ganzzahlig ist.*

c) *Unter der Voraussetzung, daß*

(38) $$2 \leqq i \leqq k-1 \qquad k \geqq n-1 \qquad x_n = D/c_n ,$$

kann in der Folge γ *kein dem Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *nachfolgender Vektor eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III sein.*

Satz 8. *Wenn der Vektor*

$$\mathbf{x} = [x_1, 0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T, \tag{39}$$

wobei

$$0 \leqq x_1 < [c_2/c_1], \quad 2 \leqq k \leqq n, \quad x_k \neq 0,$$

eine GN Lösung des Systems der Ungleichheiten III ist, so:

a) *unter der Voraussetzung, daß*

$$\begin{gathered} 2 \leqq k \leqq n-1 \\ x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \cdot x_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \cdot x_n \leqq [D/c_{k+1}], \end{gathered} \tag{40}$$

ist die dem **X** *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, die Klasse* **X**$'$, *die durch Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots$ $\ldots, 0, 0, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird.*

b) *Unter der Voraussetzung, daß*

$$2 \leqq k \leqq n-2$$

$$\begin{gathered} x_{k+1} + 1 + [c_{k+2}/c_{k+1}] \cdot x_{k+2} + \ldots + [c_n/c_{k+1}] \cdot x_n < [D/c_{k+1}] \\ x_{k+2} + 1 + [c_{k+3}/c_{k+2}] \cdot x_{k+3} + \ldots + [c_n/c_{k+2}] \cdot x_n \leqq [D/c_{k+2}], \end{gathered} \tag{41}$$

ist die dem **X** *nachfolgende Klasse, in der eine GN Lösung des Systems III vorkommen kann, so eine Klasse* **X**$''$, *die durch die Unterfolge der* $(n-1)$ *Komponenten* $0, \ldots, 0, 0, 0, x_{k+2} + 1, x_{k+3}, \ldots, x_n$ *bestimmt wird.*

c) *Unter der Voraussetzung, daß*

$$k \geqq n-1, \quad x_n = [D/c_n] \tag{42}$$

ist, kann in der Folge γ *kein dem Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *nachfolgender Vektor eine GN Lösung des Systems von Ungleichheiten III sein.*

Auf Grund dieser verhältnismäßig eingehender Analyse der Eigenschaften der GN Vektoren, die GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III sein können, ist es möglich folgendes behaupten:

für die Bestimmung aller GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten III genügt es:

1. mit Hilfe der Sätze 1 und 2 und der Definitionen 1 und 2 die Folge der Vektoren γ zu bestimmen und

2. mit Hilfe der Sätze 3 bis 8 einen Algorithmus der Testung für die Bestimmung auszuarbeiten, ob ein gegebener Vektor $\mathbf{x} \in \gamma$ eine GN Lösung des Systems III ist oder nicht.

Die Sätze 3 bis 8 ermöglichen so einen Algorithmus der Testung auszuarbeiten, nach dem nur in wenigen Fällen der Vektoren $\mathbf{x}$ eine direkte Kontrolle der Erfüllung der Ungleichheiten III durch Einsetzung notwendig ist. Für die Illustration wollen wir eine konkretes Beispiel anführen.

Beispiel 1. Alle GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten zu bestimmen:

$$1600 \leqq 200x_1 + 360x_2 + 500x_3 + 650_4 + 700x_5 + 875x_6 \leqq 1750$$

Lösung: Die Maximalwerte einzelner Veränderlichen sind hintereinander 8, 4, 3, 2, 2, 2 und der Index $\alpha = 4$. Die Ausgangsmenge $\boldsymbol{\beta}$ bildet insgesamt $9 \times 5 \times 4 \times \times 3 \times 3 \times 3 = 4860$ GN Vektoren. Aus dieser Menge $\boldsymbol{\beta}$ auf Grund des Satzes 1 ist es gar nicht notwendig 768 Vektoren $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\beta}$ zu testen, die 6 Nichtnullkomponenten haben und 1696 Vektoren $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\beta}$, die 5 Nichtnullkomponenten haben, d.h. es ist nicht notwendig über 50% der Vektoren der ursprünglichen Ausgangsmenge $\boldsymbol{\beta}$ zu überprüfen. Entsprechend dem Satz 2 müssen einzelne Komponenten der geprüften Vektoren das Systems von Ungleichheiten erfüllen:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 &\leqq 8 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 &\leqq 4 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leqq 3 \\
x_4 + x_5 + x_6 &\leqq 2 \\
x_5 + x_6 &\leqq 2 \\
x_6 &\leqq 2
\end{aligned}$$

Durch die Sätze 3–8 scheiden wir aus der Menge der geprüften Vektoren noch die Mehrzahl von GN Vektoren aus, die keine GN Lösungen des gegebenen Systems von Ungleichheiten sein können. Durch direkte Einsetzung genügt es übrigens nur 69 von GN Vektoren zu testen d. h. 1,4% von GN Vektoren der ursprünglichen Menge $\boldsymbol{\beta}$. Daraus stellen 31 von GN Vektoren die Menge der GN Lösung dar.

Der ganze Testalgorithmus für die Lösung des Beispiels 1 ist ausführlich in der Tabelle 1 beschrieben, wobei die dick gedruckten Vektoren die gesuchte GN Lösungen sind. Der Einfachkeit des mathematischen Ausdruckt entsprechend sind alle geprüften Vektoren in der horizontalen Lage geschrieben und die einzelnen Komponenten sind nicht durch ein Komma getrennt. Es handelt sich im Grunde um Spaltenvektoren. Bei jedem geprüften Vektor befindet sich eine Nummer des Satzes, durch Applikation dessen wir einen weiteren GN Vektor bekamen, der durch direkte Einsetzung ins gegebene System von Ungleichheiten zu testen war. Dabei sind die Vektoren einer und derselben Klasse hintereinander geschrieben und die Vektoren aus 2 verschiedenen, in der Folge γ hintereinanderfolgenden, Klassen sind durch eine leere Zeile abgetrennt.

Bemerkung 4. Mit Hilfe aller Behauptungen der Sätze 1–8 habe ich ein einfaches Entwicklungsdiagramm und Programm in TESLA FORTRAN gebildet. Mit Hilfe dieser Sprache läßt sich durch einfaches Testverfahren verhältnismäßig schnell jede GN Lösung des Systems von Ungleichheiten bestimmen. Unter anderem habe ich ein Systems von Ungleichheiten mit 22 Unbekannten gelöst und durch das angeführte Programm gewann ich in 45 min eine Tabelle, die insgesamt 4789 Lösungen des gegebenen Systems von Ungleichheiten enthält. Da es mit Hilfe dieses Programms möglich ist alle GN Lösungen des Systems von Ungleichheiten auch mit 50 Unbekannten bestimmen zu können, werden ins Programm die sog. Wiederholungspunkte nach jeder 1000. gefundenen Lösung eingeführt, damit es möglich ist das Programm zu unterbrechen und erneut die Berechnungen fortzusetzen.

Tabelle 1

Vektor	Satz	Vektor	Satz	Vektor	Satz	Vektor	Satz	Vektor	Satz
800000	3	**302000**	3	211100		030010	6	310001	
				111100	3			**210001**	3
710000	} 4	212000	} 4			**201010**	3		
610000		112000		021100	6			120001	} 5
						111010	} 5	020001	
520000	3	**022000**	3,8	102100		011010			
				002100	3,8			201001	} 4
430000		203000				002010	3,8	101001	
330000	3	**103000**	3	**200200**	3				
						200110	3	**011001**	3,8
240000		013000	7	110200					
140000	3			**010200**	3,8	110110		002001	6
		500100	3			**010110**	3,8		
601000	3			001200	7			**100101**	3
		410100				001110	7		
511000		**310100**	3	500010	3			010101	7
411000	3					200020			
		220100	} 4	410010		**100020**	3	100011	} 5
321000		**120100**		310010	3			000011	
221000	3					010020	7		
		030100	3,8	220010				**000002**	3,8
131000	} 5			**120010**	3	**400001**	3		
031000		**301100**	3						

Literatur

[1] *Korda* und Koll.: Mathematische Methoden in der Ekonomie Praha, SNTL, 1967.
[2] *Rollo J.:* Praktische Beispiele aus der Operationsanalyse Praha, SNTL 1973.
[3] *Gass S. I.:* Lineare Programmierung, Methoden und Applikationen ALFA, Bratislava 1972.

Súhrn

ÚLOHY O DELENÍ TYČOVÉHO MATERIÁLU

MÁRIA PÔBIŠOVÁ

Hlavným cieľom tejto publikácie bolo rozriešenie 1. etapy úloh, týkajúcich sa delenia tyčového materiálu, pričom za 2. etapu týchto úloh považujeme výber optimálnej skladby rezných plánov, minimalizujúcej % odpadu. V článku sa zaoberám určením katalógu všetkých rezných plánov k danému zoznamu prírezov. Táto problematika v úlohách o delení tyčového materiálu nás vedie ku konštrukcii sústavy 2 nerovností o n neznámych s doplňujúcim predpokladom, že neznáme sú nezáporné, celé čísla. Táto sústava nerovností má špeciálny tvar a niektoré iné zvláštnosti, ktoré sa dajú výhodne využiť pre vytvorenie špeciálnych postupov pri určení všetkých jej celočíselných, nezáporných riešení. Cieľom tohto článku je popísať práve všetky tieto zvláštnosti a na základe nich vzniknutú metódu riešení, ktorá sa pomerne jednoducho dá spracovať aj vo výpočtovej technike. Ostáva na čitateľoch samotných, či príslušnú metódu prijmú za výhodnú alebo nie.

Tu uvedený matematický model riešenia 1. etapy úloh o delení tyčového materiálu sa dá výhodne využiť aj pri riešení úloh, týkajúcich sa plošného delenia tabuľového materiálu.

Adresse des Autors: Mária Pôbišová, prom. matematik Vysoká škola lesnícka a drevárska, Štúrova ul. č. 4, 960 53 Zvolen.