Aplikace matematiky

Jozef Sumec; Vendelín Szabó

Algoritmy.43. TRTNV. Riešenie systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou

Aplikace matematiky, Vol. 22 (1977), No. 6, 470–472

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103722`

43. TRINV

RIEŠENIE SYSTÉMU LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC S TROJDIAGONÁLNOU MATICOU

Ing. JOZEF SUMEC, CSc., VENDELÍN SZABÓ, CSc., Ústav stavebníctva a architektúry SAV, Dúbravská cesta, 885 46 Bratislava.

Procedúra *TRINV* rieši priamou metódou systém lineárnych algebraických rovníc $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{r}$, kde $\mathbf{G}$ je štvorcová trojdiagonálna matica stupňa n, $\mathbf{x}$ a $\mathbf{r}$ sú stĺpcové matice stupňa n.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix},$$

a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú nenulové reálne prvky. Z formálnych dôvodov, vyplývajúcich z odvodenia uvažujú sa prvky $b_1 = c_n = 1$.

Zovšeobecnením riešenia pre symetrické trojdiagonálne matice [1] bolo odvodené riešenie pre všeobecné matice typu $\mathbf{G}$, ktoré dovoľuje vyjadrenie prvkov inverznej matice vo tvare súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna je závislá len od riadkového a druhá len od stĺpcového indexu. Riešenie potom píšeme vo tvare

$$x_i = V_i \sum_{k=1}^{i} U_k r_k + U1_i \sum_{k=i+1}^{n} V1_k r_k .$$

Jednou z výhod takéhoto spôsobu výpočtu je, že pre uloženie prvkov inverznej matice namiesto $n \,.\, n$ je treba len $4n$ pamäťových miest.

procedure *TRINV*(*a*, *b*, *c*, *r*, *eps*, *det*, *n*, *VON*);
value *eps*, *n*;
integer *n*;
real *det*, *eps*;
array *a*, *b*, *c*, *r*;
label *VON*;

comment 1.: Prvky a_i, b_i, c_i sa načítavajú po diagonálach v poradí $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$. V priebehu výpočtu sa do masívu $a[1 : n]$ dosadí riešenie systému. Z ďalších formálnych parametrov r znamená vektor pravej strany systému rovníc, *det* hodnotu determinantu a n stupeň matice **G**, *eps* je kladná konštanta, ktorej hodnota sa rádove rovná zaokruhlovacej chybe počítača, *VON* je návestie, kde počítač pokračuje, ak hodnota $abs(b1)$ je relatívne malé číslo;

```
begin integer i, j;
      real b1, b2;
      array u, v, u1, v1[1 : n];
      v[n] := (−1) ↑ n;
      v[n − 1] := −a[n] ⊗ v[n]/b[n];
      for i := n − 2 step − 1 until 1 do
      v[i] := −(a[i + 1] ⊗ v[i + 1] + c[i + 1] ⊗ v[i + 2])/b[i + 1];
      b1 := −a[1] ⊗ v[1] − c[1] ⊗ v[2];
      b2 := 1;
      for i := 1 step 1 until n do
      b2 := b2 ⊗ b[i];
      det := b1 ⊗ b2;
      if abs(b1) ≦ eps then goto VON;
```

comment 2.: Ak hodnota $abs(b1)$ je blízka nule, nastane prerušenie výpočtu a skok z tela procedúry na návestie *VON*;

```
      u[1] := −1/b1;
      u[2] := −a[1] ⊗ u[1]/b[2];
      for i := 3 step 1 until n do
      u[i] := −(a[i − 1] ⊗ u[i − 1] + c[i − 2] ⊗ u[i − 2])/b[i];
```

comment 3.: Nasleduje testovanie prvkov matice **G**. Ak je matica nesymetrická, uskutoční sa skok na návestie *A*1;

```
      for i := 1 step 1 until n − 1 do
      if b[i + 1] ≠ c[i] then goto A1;
      for i := 1 step 1 until n do
      begin v1[i] := v[i];
            u1[i] := u[i]
      end;
      goto A2;
   A1: v1[n] := v[n];
      v1[n − 1] := −a[n] ⊗ v1[n]/c[n − 1];
      for i := n − 2 step − 1 until 1 do
      v1[i] := −(a[i + 1] ⊗ v1[i + 1] + b[i + 2] ⊗ v1[i + 2])/c[i];
      u1[1] := 1/(a[1] ⊗ v1[1] + b[2] ⊗ v1[2]);
      u1[2] := −a[1] ⊗ u1[1]/c[1];
      for i := 3 step 1 until n do
      u1[i] := −(a[i − 1] ⊗ u1[i − 1] + b[i − 1] ⊗ u1[i − 2])/c[i − 1];
```

comment 4.: Nasleduje priame riešenie systému $\mathbf{Gx} = \mathbf{r}$. Vo výpočte sa použijú prvky pomocných polí u, v, $u1$, $v1$. Prvky polí a, b, c, r sa počas výpočtu menia;

```
A2: for i := 1 step 1 until n do
      begin a[i] := u[i] ⊗ r[i];
            b[i] := v1[i] ⊗ r[i]
      end;
      r[n] := 0;
      for i := n - 1 step -1 until 1 do
      r[i] := r[i + 1] + b[i + 1];
      c[1] := a[1];
      for i := 2 step 1 until n do
      c[i] := a[i] + c[i - 1];
      for i := 1 step 1 until n do
      a[i] := v[i] ⊗ c[i] + u1[i] ⊗ r[i]
end procedury TRINV;
```

Procedúru TRINV môžeme ľahko upraviť na procedúru, ktorá počíta prvky inverznej matice $\mathbf{G}^{-1}$. Pre tento účel zmeníme telo procedúry nasledovne:

a) z formálnych parametrov v hlavičke procedúry *TRINV* sa vynechá parameter r,
b) príkazy – **comment** 4. ... až **end** procedury *TRINV*; – sa nahradia nasledovnými príkazmi

comment 4.: V poli $b[1 : n]$ bude uložený vždy i-ty riadok inverznej matice. Vzhľadom nato je treba vhodne upraviť tlač;

```
      for i := 1 step 1 until n do
      for j := 1 step 1 until n do
      if j ≦ i then b[j] := v[i] ⊗ u[j]
               else b[j] := u1[i] ⊗ v1[j]
end procedury TRINV;
```

Popísaná procedúra umožňuje priamym spôsobom získať:

a) ľubovolný prvok riešenia systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou,
b) hodnotu determinantu matice,
c) ľubovolný prvok inverznej matice.

Algoritmus bol pôvodne napísaný a vyskúšaný v jazyku FORTRAN IV pre počítač CDC 3300 a do revidovaného jazyka ALGOL 60 len prepísaný.

Procedúra TRINV bola používaná pri výpočte numerických derivácií pomocou splajn-funkcií z funkčných hodnôt, nameraných experimentálne na diskrétnej množine bodov nezávisle premennej.

Literatúra

[1] *Б. Бурхбергер, Г. А. Емеляненко:* Методы обращения трехдиагональных матриц. ЖВММФ, 13 (1973), 546–554.