Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Über Stabilitätsbereiche bei parametrischen linearen Optimalitätsproblemen

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 5, 311–335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103598

ÜBER STABILITÄTSBEREICHE BEI PARAMETRISCHEN LINEAREN OPTIMALITÄTSPROBLEMEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen 20. März 1974)

Die vorgelegte Arbeit schliesst in gewissem Sinne an die Arbeit [2] an, wo das Problem einer geeigneten Charakterisierung, bzw. die Möglichkeit der Berechnung des maximalen Lösbarkeitsbereiches des Optimalitätsproblems

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})} \{f(\mathbf{x})\}!\,, \tag{1.1}$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} |c_\alpha| > 0\,, \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha = b_r\,, \quad x_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1, \ldots, m\,; \quad \alpha = 1, \ldots, n)\}\,, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \text{ }^{1)} \tag{1.4}$$

behandelt wurde. Es ging hier also um eine spezielle Optimalitätsaufgabe mit Parametern in der Koeffizientenmatrix der linearen Restriktionen. Für die praktische Anwendung kommen oft parametrische Optimierungsprobleme einer allgemeinerer Form in Frage. Jedoch ist das oben gestellte Problem und seine qualitative Untersuchung untentbehrlich für die Aufstellung einer allgemeineren Stabilitätstheorie in dem fraglichen Sinne.

In dieser Arbeit wird eine geeignete Beschreibung und Bestimmung eines Stabilitätsbereiches der optimalen Lösungsmenge des Problems (1.1), der einem festgewählten Parameterpunkt ${}_0\boldsymbol{\lambda}$ angehört, angegangen. Ein lokaler Stabilitätsbereich wird hier auf ähnliche Art wie der in der Theorie der linearen parametrischen Optimierung mit Parametern in der Zielfunktion, bzw. in den rechten Seiten der linearen Restriktionen geeignet definiert. Wir gehen dabei von der folgenden Vorstellung aus:

[1]) Im Gegensatz zu dem Zustandsraum werden wir einen Parameterraum mit einem Strich links oben an dem betreffenden Symbol bezeichnen.

Falls für einen festgewählten Punkt $_0\lambda$ das Problem (1.1) lösbar ist, so stellt die Menge der optimalen Punkte eine bestimmte abgeschlossene Seite $B(_0\lambda)$ einer bestimmten Dimension $_0d$ $(0 \leqq {_0d})$ des konvexen Polyeders $\mathfrak{M}(_0\lambda)$ dar. Diese Seite ist durch eine Indexmenge $I(_0\lambda) \subset \{1, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $x_\alpha = 0$ $(\alpha \in I(_0\lambda))$ für alle Punkte $\mathbf{x} \in B(_0\lambda)$ eindeutig charakterisiert. Es geht nun um die Menge aller Punkte λ, für die das Problem (1.1) lösbar ist, wobei die Menge der optimalen Lösungen dieselbe (durch die Menge $I(_0\lambda)$ festgelegte) Charakteristik besitzt. Vom geometrischen Standpunkt aus bedeutet es dann

1) die Menge $S'(I(_0\lambda))$ derjenigen Punkte λ zu bestimmen, für die das konvexe Polyeder $\mathfrak{M}(\lambda)$ eine Seite $B(\lambda)$ besitzt, wobei diese Seite $B(\lambda)$ durch dieselbe Indexmenge $I(_0\lambda)$ charakterisiert wird und darüber hinaus dieselbe Dimension $_0d$ wie die Seite $B(_0\lambda)$ hat;

2) aus der Menge $S'(I(_0\lambda))$ eine solche Teilmenge $C(_0\lambda)$, für die die Seite $B(\lambda)$ des Polyeders $\mathfrak{M}(\lambda)$ zugleich die Menge der optimalen Lösungen des Problems (1.1) darstellt, auszuwählen. Eine solche Menge $C(_0\lambda)$ heisst dann der zu dem Punkt $_0\lambda$ zugehörige Stabilitätsbereich bezüglich des Problems (1.1).

Im Kapitel 1 wird das unter 1) angegebene Problem gelöst. Das Kapitel 2 betrifft die Untersuchung der Menge $C(_0\lambda)$.

Die Frage der Berechnung der Menge $C(_0\lambda)$ in konkreten Fällen wird hier nicht näher angegangen und sie wird in einer späteren Arbeit beantwortet, in der zugleich weitere Fragestellungen, die das Optimalitätsproblem (1.1) angehen, beantwortet werden (z. B. die Existenz einer Einteilung des Lösbarkeitsbereiches in eine endliche Anzahl von Stabilitätsbereichen und die Eigenschaften einer solchen Einteilung, die Charakteristik der Lösungsfunktion über dem ganzen Lösbarkeitsbereich, bzw. über einzelne Stabilitätsbereiche).

Im Gegensatz zu anderen Arbeiten, die sich mit ähnlicher Problematik beschäftigen, wird hier bei den Untersuchungen und Beweisführungen an keiner Stelle irgendeine Berechnungsmethode (z. B. die Simplexmethode) benutzt. Die Entartungsfälle werden in der dargestellten Theorie einbezogen.

KAPITEL 1

Es sei (1.1) das gegebene parametrische lineare Optimierungsproblem. Für jedes λ bezeichnen wir

$$(1.5) \qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}(\lambda) \mid f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\lambda)} \{f(\mathbf{x})\}\}.$$

Falls für ein festgewähltes $_0\lambda \in {}'\mathbf{E}_m$ die Bedingung $\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(_0\lambda) \neq \emptyset$ erfüllt ist, so gibt es eindeutig eine Indexmenge $I(_0\lambda) \subset \{1, \ldots, n\}$ mit

$$(1.6) \qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(_0\lambda) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(_0\lambda) \mid x_\alpha = 0 \ (\alpha \in I(_0\lambda))\} \neq \emptyset\,,$$

wobei offenbar die Menge $I({}_0\lambda)$ die grösste Indexmenge mit der Eigenschaft (1.6) ist[2]), d. h. es existiert mindestens ein Punkt ${}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda)$, so dass ${}_0x_\alpha > 0$ $(\alpha \in \in \{1, \ldots, n\} \setminus I({}_0\lambda))$ gilt.

Wir definieren für ein beliebiges λ die Menge

$$B(\lambda) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\lambda) \mid x_\alpha = 0 \ (\alpha \in I({}_0\lambda))\} \tag{1.7}$$

und eine weitere Menge

$$S(I({}_0\lambda)) = \{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \mid B(\lambda) \neq \emptyset\} \tag{1.8}$$

und wir werden zuerst die Eigenschaften dieser Mengen untersuchen.

Behauptung 1.1. *Im Falle* $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$ *gilt* $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$.

Beweis. Falls $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$, so gilt nach (1.6) $\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda) = \{\mathbf{o}\}$, woraus – nach (1.3) – sich notwendig $\sum_{r=1}^{m} |b_r| = 0$ ergibt und es ist daher laut (1.7) $B(\lambda) = \{\mathbf{o}\} \neq \emptyset$ für alle λ. Nach Definition (1.8) folgt daraus $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$.

Behauptung 1.2. *Im Falle* $\sum_{r=1}^{m} |b_r| = 0$ *gilt* $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$.

Beweis. Aus $\sum_{r=1}^{m} |b_r| = 0$ ergibt sich nach (1.3) $\mathbf{o} \in \mathfrak{M}(\lambda)$ für alle λ und aus (1.7) ergibt sich $\mathbf{o} \in B(\lambda)$ für alle λ voraus nach (1.8) $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$ folgt.

Bemerkung 1.1. In den folgenden Untersuchungen wird $I({}_0\lambda) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$ und $\sum_{r=1}^{m} |b_r| > 0$ vorausgesetzt, wobei die restlichen zwei Fälle durch die Bemerkung 1.5 und 1.6 in die Theorie eingeschlossen werden.

Bemerkung 1.2. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, kann man $\{1, \ldots, n\} \setminus I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, s\}$ voraussetzen.

Um die Menge $S(I({}_0\lambda))$ aus (1.8) charakterisieren zu können, führen wir den euklidischen Raum ${}'\mathbf{E}_{m+1}$, der mit den kartesischen Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ versehen ist, ein. Durch die Relationen

$$\lambda_r = b_r \xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} (-a_{r\alpha})\, \xi_\alpha \quad (r = 1, \ldots, m),$$

$$\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha\,, \quad (\xi_0, \xi_\alpha) \in {}'\mathbf{E}_{s+1}\,,$$

[2]) Siehe [3].

ist eine bestimmte lineare Abbildung des Raumes $\mathbf{E}_{s+1}$ in den Raum $'\mathbf{E}_{m+1}$ festgelegt. Wir definieren in $'\mathbf{E}_{m+1}$ die Menge

$$(1.9)\qquad K = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_{m+1} \;\Big|\; \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha \quad (r = 1, \ldots, m)\,,$$
$$\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\,, \quad \xi_0 > 0\,, \quad \xi_\alpha \geqq 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s)\Big\}.$$

Behauptung 1.3. *Die Menge K aus (1.9) ist eine nicht leere und konvexe Menge, wobei ihre Abschliessung $\bar{K}$ einen polyedrischen Kegel mit einem Scheitel $\boldsymbol{\lambda} = (0, \ldots, 0, 1)$ in $'\mathbf{E}_{m+1}$ darstellt. Es gilt* rel. int $\bar{K} \subset K$.

Beweis. Da für die Abschliessung $\bar{K}$ der Menge K

$$(1.10)\qquad \bar{K} = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_{m+1} \;\Big|\; \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha\,, \quad \lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\,,$$
$$\xi_0, \xi_\alpha \geqq 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s;\; r = 1, \ldots, m)\Big\}$$

gilt mit

$$(1.11)\qquad \text{rel. int}\,\bar{K} = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_{m+1} \;\Big|\; \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha\,,$$
$$\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\,, \quad \xi_0, \xi_\alpha > 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s;\; r = 1, \ldots, m)\Big\},$$

so ergibt sich daraus unmittelbar die Behauptung.

Behauptung 1.4. *Die Menge $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ ist eine nicht leere konvexe Menge in $'\mathbf{E}_m$ und sie lässt sich als Durchschnitt der Menge K aus (1.9) mit der Hyperebene*

$$(1.12)\qquad R = \big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_{m+1} \;\big|\; \lambda_{m+1} = 0\big\}$$

darstellen. Ihre Abschliessung $\bar{S}(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ ist ein konvexes Polyeder in $'\mathbf{E}_m$.

Beweis. Wegen $B({}_0\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ ist ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ und daher $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) \neq \emptyset$. Es sei $\boldsymbol{\lambda} \in S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ beliebig gewählt. Nach (1.8) ist $B(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ und nach (1.7) und Bemerkung 1.2

$$(1.13)\qquad B(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_s \;\Big|\; \sum_{\alpha=1}^{s}(a_{r\alpha} + \lambda_r)\,x_\alpha = b_r\,, \quad x_\alpha \geqq 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s;\; r = 1, \ldots, m)\Big\} \neq \emptyset\,.$$

Nach Voraussetzung (Bem. 1.1) ist $\sum_{r=1}^{m}|b_r| > 0$ und daher gilt für jeden Punkt $\mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\lambda})$

$$\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha > 0\,.$$

Daraus ergibt sich, dass man das Gleichungssystem aus der Beschreibung (1.13) der Menge $B(\lambda)$ äquivalent in der Form

$$\lambda_r = \frac{b_r - \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha} x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha} \quad (r = 1, \ldots, m)$$

schreiben kann. Daraus und aus (1.8) folgt weiter, dass sich die Menge $S(I({}_0\lambda))$ folgendermassen parametrisch beschreiben lässt:

$$(1.14) \qquad S(I({}_0\lambda)) = \Big\{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \,\Big|\, \lambda_r = \frac{b_r - \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha} x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha}\,, \quad x_\alpha \geqq 0\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha > 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\Big\}.$$

Wir definieren

$$(1.15) \qquad \xi_0 = \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha}\,, \quad \xi_\alpha = \frac{x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, s)\,.$$

Offenbar gilt

$$(1.16) \qquad \xi_0 > 0\,, \quad \xi_\alpha \geqq 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s)\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha = 1$$

für alle $\mathbf{x}$ mit $x_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$, $\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha > 0$. Die Relationen (1.15) stellen eine ein-eindeutige Abbildung der Menge

$$(1.17)_a \qquad N_1 = \Big\{\xi \in \mathbf{E}_{s+1} \,\Big|\, \xi_0 > 0,\ \xi_\alpha \geqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha = 1 \ (\alpha = 1, \ldots, s)\Big\}$$

auf die Menge

$$(1.17)_b \qquad N_2 = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_s \,\Big|\, x_\alpha \geqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha > 0 \ (\alpha = 1, \ldots, s)\Big\}\ ^{3})$$

dar. Dies hat zur Folge, dass sich die Menge $S(I({}_0\lambda))$ aus (1.14) auch in der Form

$$(1.18) \qquad S(I({}_0\lambda)) = \Big\{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \,\Big|\, \lambda_r = b_r \xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} (-a_{r\alpha})\, \xi_\alpha,\ \xi_0 > 0,\ \xi_\alpha \geqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha = 1$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\Big\}$$

beschreiben lässt. Aus (1.18), (1.9) und (1.12) ergibt sich

$$S(I({}_0\lambda)) = K \cap R \neq \emptyset\,.$$

[3]) Der Beweis dieser Behauptung ist klar.

(wobei die Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ als lineare Koordinaten in der Hyperebene R aufgefasst werden). Danach Behauptung 1.3 die Menge K eine konvexe Menge ist und R eine Hyperebene in $'\mathbf{E}_{m+1}$ ist, stellt die Menge $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ als deren nicht leerer Durchschnitt ebenfalls eine nicht leere konvexe Menge dar.

Die Menge

$$\bar{S}(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \,\Big|\, \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha\,, \quad \xi_0, \xi_\alpha \geqq 0\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha = 1$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\Big\}$$

hat dann offenbar die Eigenschaft $\bar{S}(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \bar{K} \cap R \neq \emptyset$, d. h. (nach Beh. 1.3) sie stellt den Durchschnitt des polyedrischen Kegels $\bar{K}$ mit der Hyperebene R in $'\mathbf{E}_{m+1}$ dar und daher ist $\bar{S}(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ ein konvexes Polyeder auch in $'\mathbf{E}_m$.

Definition 1.1. *Wir definieren für alle $\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m$ die Menge*

$$B'(\boldsymbol{\lambda}) = \big\{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) \,\big|\, x_\alpha = 0 \ (\alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda})),\ x_\alpha > 0 \ (\alpha = 1, \ldots, s)\big\} \tag{1.19}$$

und weiter die Menge

$$S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \,\big|\, B'(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\big\}. \tag{1.20}$$

Bemerkung 1.3. Die Menge $B'(\boldsymbol{\lambda})$ mit $B'(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ aus (1.19) hat offenbar die Eigenschaft $B'(\boldsymbol{\lambda}) = \text{rel. int}\, B(\boldsymbol{\lambda})$, wo $B(\boldsymbol{\lambda})$ die Bedeutung aus (1.7) hat. Eine solche Menge $B'(\boldsymbol{\lambda})$ stellt eine (offene) Seite des Polyeders $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$ dar und $B(\boldsymbol{\lambda})$ ist die entsprechende Abgeschlossene Seite von $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$. Falls die Menge $B(\boldsymbol{\lambda})$ sich auf einen einzigen Punkt reduziert, so gilt $B(\boldsymbol{\lambda}) = B'(\boldsymbol{\lambda})$; im Falle $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$ gilt dann $B(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$ und $B'(\boldsymbol{\lambda}) = \text{rel. int}\, \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$.

Behauptung 1.5. *Die Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ aus (1.20) ist eine nicht leere und konvexe Menge in $'\mathbf{E}_m$ mit der Eigenschaft $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \text{rel. int}\, S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$.*

Beweis. Offenbar gilt (nach (1.9), (1.12) und Beh. 1.4)

$$\text{rel. int}\, S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \text{rel. int}\,(K \cap R) = \text{rel. int}\, \bar{K} \cap R$$

und daher

$$\text{rel. int}\, S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \,\Big|\, \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha\,, \quad \xi_0, \xi_\alpha > 0\,,$$
$$\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha = 1 \quad (\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\Big\}, \tag{1.21}$$

woraus unmittelbar rel. int $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) \neq \emptyset$ folgt. Betrachtet man wiederum die ein-

eindeutige Abbildung (1.15) der Menge N_1 aus $(1.17)_a$ auf die Menge N_2 aus $(1.17)_b$, so kann wegen (1.19) geschrieben werden

$$\text{rel. int}\, S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \mid \lambda_r = \frac{b_r}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{-a_{r\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha} x_\alpha\,, \quad x_\alpha > 0$$

$$(\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\} = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \mid B'(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\}$$

und daher (nach (1.20))

$$(1.22) \qquad \text{rel. int}\, S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) \neq \emptyset\,.$$

Da die Menge $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ eine konvexe Menge ist, so hat diese Eigenschaft auch die Menge rel. int $S(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ und nach (1.22) also die Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$.

Bemerkung 1.4. Aus Behauptung 1.5 ergibt sich als Folgerung die Gleichheit

$$(1.23) \qquad S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \text{rel. int}\, \bar{K} \cap R\,.$$

Behauptung 1.6. *Es gilt* $\boldsymbol{\lambda}_0 \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$.

Beweis. Sei $\mathbf{x}' \in B({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ein Punkt mit der Eigenschaft $x'_\alpha > 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$. Nach der Zuordnung (1.15) ordnen wir dem Punkt $\mathbf{x}'$ eindeutig den Punkt (ξ'_0, ξ'_α), der dann die Eigenschaft

$$\xi'_0 > 0\,, \quad \xi'_\alpha > 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s)\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{s} \xi'_\alpha = 1$$

besitzt, zu. Man kann dann die Gleichungen aus der Beschreibung der Menge $B({}_0\boldsymbol{\lambda})$ in der Form

$${}_0\lambda_r = b_r \xi'_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} (-a_{r\alpha})\, \xi'_\alpha \quad (r = 1, \ldots, m)$$

schreiben, wobei $\xi'_0, \xi'_\alpha > 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$ gilt. Definiert man

$${}_0\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s} \xi'_\alpha = 0\,,$$

so ergibt sich daraus und aus (1.11) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, 0) \in \text{rel. int}\, \bar{K}$ und nach (1.12) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, 0) \in R$, woraus weiter – nach Bemerkung 1.4 – ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ folgt.

Behauptung 1.7. *Es gilt* $\dim B(\boldsymbol{\lambda}) = \dim B'(\boldsymbol{\lambda}) = {}_0d$ *für alle* $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ *mit* ${}_0d = \dim B({}_0\boldsymbol{\lambda})$.

Beweis. Es sei $\boldsymbol{\lambda}'' \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ beliebig. Nach (1.20) ist $B'(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \emptyset$ und nach (1.19) gibt es einen Punkt $\mathbf{x}'' \in \mathbf{E}_s$ derart, dass

$$\sum_{\alpha=1}^{s} (a_{r\alpha} + \lambda''_r)\, x''_\alpha = b_r\,, \quad x''_\alpha > 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)$$

gilt. Daraus ergibt sich für die betreffende Menge $B(\boldsymbol{\lambda}'')$

$$B(\boldsymbol{\lambda}'') = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_s \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{s} (a_{r\alpha} + \lambda_r'')\, x_\alpha = b_r,\ x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\right\}$$

(1.24) $$\dim B(\boldsymbol{\lambda}'') = \dim B'(\boldsymbol{\lambda}'') = \dim L'' ,$$

wobei L'' der lineare Unterraum in $\mathbf{E}_s$ mit der Beschreibung

$$L'' = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_s \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{s} (a_{r\alpha} + \lambda_r'')\, x_\alpha = b_r \quad (r = 1, \ldots, m)\right\} \neq \emptyset$$

ist. Wir bezeichnen

(1.25) $$d(\boldsymbol{\lambda}'') \equiv \dim B(\boldsymbol{\lambda}'') .$$

Definieren wir nun im Raum $\mathbf{E}_{s+1}$, der mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_s, z$ versehen ist, die Menge

$$B^*(\boldsymbol{\lambda}'') = \Big\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{s+1} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha} x_\alpha + \lambda_r'' z = b_r , \quad \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha - z = 0 , \quad x_\alpha, \quad z \geqq 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s;\ r = 1, \ldots, m)\Big\} .$$

Bezeichnet man

$$z'' = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha'' ,$$

wo $\mathbf{x}'' \in \mathbf{E}_s$ der am Anfang des Beweises angegebene Punkt ist, so gilt $(\mathbf{x}'', z'') \in$ $\in B^*(\boldsymbol{\lambda}'')$ mit $x_\alpha'' > 0$, $z'' > 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$. Es ist daher

$$\dim B^*(\boldsymbol{\lambda}'') = \dim L^* ,$$

wo L^* der lineare Unterraum mit der Beschreibung

(1.26) $$L^* = \Big\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{s+1} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha} x_\alpha + \lambda_r'' z = b_r , \quad \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha - z = 0$$

$$(r = 1, \ldots, m)\Big\} = \Big\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{s+1} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{s} (a_{r\alpha} + \lambda_r'')\, x_\alpha = b_r , \quad z = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha \quad (r = 1, \ldots, m)\Big\}$$

ist. Daraus und aus (1.25) folgt dann

$$L^* = \Big\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{E}_{s+1} \,\Big|\, \mathbf{x} \in L'',\ z = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha\Big\} ,$$

d. h. der lineare Unterraum $L^* \subset \mathbf{E}_{s+1}$ stellt das Bild des linearen Unterraumes $L'' \subset \mathbf{E}_s$ bei der regulären linearen Abbildung $x_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$, $z = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha$ aus $\mathbf{E}_s$ in $\mathbf{E}_{s+1}$ dar. Hieraus folgt

$$\dim L'' = \dim L^* ,$$

und nach (1.24), (1.25) erhält man

$$\dim L^* = d(\lambda'').$$

Daraus und aus (1.26) ergibt sich dann

$$\text{(1.27)} \qquad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & \lambda_1'' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & \lambda_m'' \\ 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} = s + 1 - d(\lambda'').$$

Wegen $\lambda'' \in S'(I({}_0\lambda))$, gilt nach (1.21), (1.22)

$$\lambda_r'' = b_r\xi_0'' + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha'', \quad \xi_0'', \xi_\alpha'' > 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha'' = 1 \quad (\alpha = 1, \dots, s;\ r = 1, \dots, m)$$

und durch einsetzen in (1.27) erhält man

$$s + 1 - d(\lambda'') = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & b_1\xi_0'' + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{1\alpha})\,\xi_\alpha'' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & b_m\xi_0'' + \sum_{\alpha=1}^{s}(-a_{m\alpha})\,\xi_\alpha'' \\ 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & b_1\xi_0'' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & b_m\xi_0'' \\ 1 & \dots & 1 & -1 + \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha'' \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & b_m \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv {}_0h \geqq 1.$$

Daraus folgt

$$d(\lambda'') = s + 1 - {}_0h,$$

wobei ${}_0h$ eine natürliche von der Wahl des Punktes $\lambda'' \in S'(I({}_0\lambda))$ unabhängige Zahl ist und es gilt daher für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ (also auch für den Punkt ${}_0\lambda$) nach (1.24), (1.25) die Gleichung

$$\text{(1.28)} \qquad {}_0d = \dim B({}_0\lambda) = \dim B(\lambda) = \dim B'(\lambda) = s + 1 - {}_0h.$$

Behauptung 1.8. *Es gilt* $\dim S(I({}_0\lambda)) = \dim S'(I({}_0\lambda)) = s - {}_0d$.

Beweis. Nach Behauptung 1.4 ist $S(I({}_0\lambda)) = K \cap R \neq \emptyset$ und daher

$$\text{(1.29)} \qquad \dim S(I({}_0\lambda)) = \dim (K \cap R).$$

Bezeichnen wir

$$d^* \equiv \dim K\,.$$

Im Falle $d^* = m + 1$ folgt aus (1.29) (da R eine Hyperebene in $'\mathbf{E}_{m+1}$ ist und nach Beh. 1.6 und (1.23) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, 0) \in \text{rel. int}\,\overline{K} \cap R$ gilt)

$$\dim S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = m = d^* - 1\,.$$

Angenommen, es sei $d^* \leqq m$. Nach Beweis der Beh. 1.6 gilt $({}_0\boldsymbol{\lambda}, 0) \in \text{rel. int}\,\overline{K}$, woraus mit Hinsicht auf (1.11)

$$d^* = \dim L, \tag{1.30}$$

wo L der durch

$$L = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_{m+1} \,\Big|\, \lambda_r = b_r\xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} (-a_{r\alpha})\,\xi_\alpha\,, \tag{1.31}$$

$$\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha \quad (r = 1, \dots, m)\Big\}$$

beschriebene lineare Unterraum ist, folgt. Da $K \not\subset R$ gilt, gilt ebenfalls $L \not\subset R$ und daher

$$\dim S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \dim (K \cap R) = \dim (L \cap R) = d^* - 1\,.$$

In den beiden Fällen gilt also

$$\dim S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = d^* - 1\,. \tag{1.32}$$

Nach (1.30), (1.31) und (1.28) erhält man

$$d^* = \text{Rang}\begin{pmatrix} b_1 & -a_{11} & \dots & -a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & -a_{m1} & \dots & -a_{ms} \\ 0 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & b_m \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = {}_0h = s + 1 - {}_0d$$

und nach (1.32) folgt daraus mit Hinsicht auf Beh. 1.5

$$\dim S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = \dim S(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = s - {}_0d\,. \tag{1.33}$$

Folgerung 1.1. Ist $B({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{{}_0\mathbf{x}\}$, so ist bekanntlich ${}_0\mathbf{x}$ eine Ecke des Polyeders $\mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Falls diese Ecke ${}_0\mathbf{x}$ eine reguläre Ecke von $\mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ist, so gilt $s = m$, $\dim B({}_0\boldsymbol{\lambda}) = {}_0d = 0$ und aus (1.33) folgt $\dim S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = m$.

Folgerung 1.2. Falls $B({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{{}_0\mathbf{x}\}$ und ${}_0\mathbf{x}$ eine entartete Ecke des Polyeders $\mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ist, so gilt $s < m$, ${}_0d = 0$ und daher ist nach (1.33) $\dim S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) < m$.

Folgerung 1.3. Im Falle $B({}_0\lambda) = \mathfrak{M}({}_0\lambda)$, wobei $\mathfrak{M}({}_0\lambda)$ ein reguläres konvexes Polyeder ist, gilt $s = n$ und nach (1.33) $\dim S'(I({}_0\lambda)) = n - \dim \mathfrak{M}({}_0\lambda)$.

Folgerung 1.4. Falls $B({}_0\lambda)$ eine reguläre ${}_0d$-dimensionale Seite des konvexen Polyeders $\mathfrak{M}({}_0\lambda)$ ist, so gilt $s = m + {}_0d$ und aus (1.33) ergibt sich $\dim S'(I({}_0\lambda)) = m$.

Folgerung 1.5. Ist anderseits $\dim S'(I({}_0\lambda)) = m$, so folgt aus (1.33) $s - {}_0d = m$. Da allgemein zwischen den Elementen s und ${}_0d$ die Beziehung $s \leqq m + {}_0d$, im Falle einer entarteten Seite des Polyedres $\mathfrak{M}({}_0\lambda)$ dann die Beziehung $s < m + {}_0d$ gilt, so muss unter unserer Annahme die Menge $B({}_0\lambda)$ eine reguläre ${}_0d$-dimensionale Seite von $\mathfrak{M}({}_0\lambda)$ sein.

Bemerkung 1.5. Am Anfang dieses Kapitels haben wir den Fall $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$ aus der Bem. 1.1 ausgeschlossen. Lässt man auch diesen Spezialfall zu, so ist $B({}_0\lambda) = \{\mathbf{o}\}$ und auch $B(\lambda) = \{\mathbf{o}\}$ für alle $\lambda \in {}'\mathbf{E}_m$. Daraus folgt $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$ und wir definieren zusätzlich $S'(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$.

Bemerkung 1.6. Betrachtet man den zweiten am Anfang dieses Kapitels ausgeschlossenen Fall $\sum_{r=1}^{m} |b_r| = 0$ aus Bem. 1.1, und zwar unter der Voraussetzung $I({}_0\lambda) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, dann gilt $S(I({}_0\lambda)) = {}'\mathbf{E}_m$ und die Menge $S'(I({}_0\lambda))$ aus (1.20) wird durch

$$S'(I({}_0\lambda)) = \{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \mid \lambda_r = \sum_{\alpha=1}^{s} (-a_{r\alpha})\, \xi_\alpha\,, \quad \xi_\alpha > 0\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha = 1 \quad (\alpha = 1, \ldots, s)\}$$

beschrieben. Die Beziehung

$$S'(I({}_0\lambda)) = \text{rel. int}\, S(I({}_0\lambda))$$

ist hier offenbar nicht erfüllt. Dagegen gelten die Behauptungen 1.6, 1.7 auch in diesem Spezialfall. Statt der Behauptung 1.8 kommt nun nur die Behauptung

$$\dim S'(I({}_0\lambda)) = s - {}_0d$$

in Frage. Die Beweise verlaufen hier ganz ähnlich wie die bei den obigen Behauptungen.

KAPITEL 2

Definition 2.1. *Die Menge*

$$C({}_0\lambda) = \{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \mid B'(\lambda) \neq \emptyset,\ B(\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda)\} \tag{2.1}$$

heisst der dem Punkte ${}_0\lambda$ zugehörige Stabilitätsbereich der Lösung der Optimierungsaufgabe (1.1).

Die Überlegungen dieses Kapitels gehen eine geeignete Charakterisierung des Stabilitätsbereiches $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ an.

Wir definieren zuerst für jeden Punkt $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ (wobei die in (1.20) definierte Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ sich laut Beh. 1.5, Bem. 1.5 und Bem. 1.6 auf drei verschiedene Arten beschreiben lässt) die Menge

$$(2.2) \qquad \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha = b_r\,, \quad x_\alpha \geqq 0 \right.$$
$$\left. (r = 1, \ldots, m;\ \alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\right\}.$$

Nach (1.7), (1.3), (1.19), (1.20) und (2.2) gilt

$$\emptyset \neq B'(\boldsymbol{\lambda}) \subset B(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$$

für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ mit

$$\dim B(\boldsymbol{\lambda}) = \dim \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

wobei

(2.3) $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$ ... der lineare Unterraum der kleinsten Dimension mit $B(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$

ist, der durch

$$(2.4) \qquad \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha = b_r\,, \quad x_\alpha = 0 \right.$$
$$\left. (r = 1, \ldots, m;\ \alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\right\}$$

beschrieben wird. Aus (2.2) und (2.4) ergibt sich, dass $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$ eine Seite der kleinsten Dimension des konvexen Polyeders $\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ ist und sie ist die einzige Seite von $\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ mit dieser Eigenschaft.

Behauptung 2.1. *Für ein jedes $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ stellt die Menge $\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ einen polyedrischen Kegel in $\mathbf{E}_n$ mit der Scheitelmenge $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$ dar.*

Auf den einfachen Beweis dieser Behauptung wird hier verzichtet.

Behauptung 2.2. *Für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ gilt*

$$B(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda})\,,$$

wobei

$$\mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda}) \,\middle|\, f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^*(\lambda)} \{f(\mathbf{x})\}\right\}$$

bedeutet.

Beweis. Falls $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{1, \ldots, n\}$, so gilt $B(\boldsymbol{\lambda}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{o}\}$, $\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$ und daher gilt die Behauptung.

Im Falle $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$ ist $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$, $B(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$, $\dim \mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda}) =$

$= \dim \mathfrak{M}(\lambda)$ und die Behauptung gilt ebenfalls. In den übrigen Fällen wird der folgende Beweis angegeben: Wir setzen zuerst voraus, dass

$$B(\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in S'(I({}_0\lambda))$$

gilt. Daraus und aus (1.5), (1.7) ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* < \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha \quad \text{für} \quad \mathbf{x}^* \in B(\lambda) \quad \text{und alle} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\lambda)\,, \quad \mathbf{x} \notin B(\lambda)\,. \tag{2.5}$$

Da für alle $\mathbf{x} \in B(\lambda)$ der Wert der Zielfunktion derselbe ist, gilt nach (2.3)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* \quad \text{für} \quad \mathbf{x}^* \in B(\lambda) \subset \mathscr{L}(\lambda) \quad \text{und alle} \quad \mathbf{x} \in \mathscr{L}(\lambda)\,. \tag{2.6}$$

Um den Beweis indirekt zu führen, wird vorausgesetzt, dass es einen Punkt $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^*(\lambda)$, mit

$$\mathbf{x}' \notin \mathscr{L}(\lambda)\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x'_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* \tag{2.7}$$

gibt. Nach (2.6) gilt dann $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}'$. Wegen $\emptyset \neq B'(\lambda) \subset \mathscr{L}(\lambda)$, $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$, kann man, mit Hinsicht auf (2.6), annehmen, dass $\mathbf{x}^* \in B'(\lambda)$ ist. Nach (2.7), (2.4), (2.5) gilt dann $\mathbf{x}' \notin B(\lambda)$, $\mathbf{x}' \notin \mathfrak{M}(\lambda)$. Wir betrachten die offene Strecke

$$p = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + t(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*)\,, \quad t \in (0, 1)\}\,.$$

Da nach (1.19) der Punkt $\mathbf{x}^* \in B'(\lambda)$ die Eigenschaft

$$x_\alpha^* > 0 \quad (\alpha \notin I({}_0\lambda))\,, \quad x_\alpha^* = 0 \quad (\alpha \in I({}_0\lambda))$$

besitzt und für den Punkt $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^*(\lambda)$, $\mathbf{x}' \notin \mathscr{L}(\lambda)$

$$x'_\alpha \geqq 0 \quad (\alpha \in I({}_0\lambda))\,, \quad \sum_{\alpha \in I({}_0\lambda)} x'_\alpha > 0$$

gilt, gibt es einen Wert ${}_0t$, $0 < {}_0t < 1$ mit

$$\begin{aligned} x_\alpha({}_0t) &= x_\alpha^* + {}_0t(x'_\alpha - x_\alpha^*) = {}_0t x'_\alpha \geqq 0 \quad &(\alpha \in I({}_0\lambda))\,,\\ x_\alpha({}_0t) &= x_\alpha^* + {}_0t(x'_\alpha - x_\alpha^*) \geqq 0 &(\alpha \notin I({}_0\lambda))\,,\\ &\sum_{\alpha \in I({}_0\lambda)} x_\alpha({}_0t) > 0\,, \quad \mathbf{x}({}_0t) \neq \mathbf{x}^*\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Für den Punkt $\mathbf{x}({}_0t) \in p$ gilt weiter nach (1.19) und (2.2)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha({}_0t) = (1 - t) \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha^* + t \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x'_\alpha =$$
$$= (1 - t)\, b_r + t b_r = b_r \quad (r = 1, \ldots, m)\,.$$

Daraus und aus (2.8), (1.7) folgt dann

$$\mathbf{x}({}_0t) \in \mathfrak{M}(\lambda)\,, \quad \mathbf{x}({}_0t) \notin B(\lambda)\,,$$

woraus nach (2.5)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* < \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\, x_\alpha({}_0t) \tag{2.9}$$

folgt. Anderseits gilt aber für alle Punkte $\mathbf{x}(t) \in p$ nach (2.7)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\, x_\alpha(t) = (1-t)\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* + t\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x'_\alpha \leqq$$

$$\leqq (1-t)\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* + t\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^*$$

und daher auch

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\, x_\alpha({}_0t) \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^*\,,$$

was im Widerspruch mit (2.9) steht. Hiemit wurde die Gleichung $\mathscr{L}(\lambda) = \mathfrak{M}^*_{\mathrm{opt}}(\lambda)$ und daher die obige Behauptung 2.2 in einer Richtung bewiesen.

Um die zweite Richtung zu beweisen, geht man von der Voraussetzung

$$\mathscr{L}(\lambda) = \mathfrak{M}^*_{\mathrm{opt}}(\lambda) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in S'(I({}_0\lambda))$$

aus. Bei beliebig festgewähltem $\lambda \in S'(I(\lambda_0))$ gilt nach (1.7), (1.3), (2.4)

$$\mathscr{L}(\lambda) \cap \mathfrak{M}(\lambda) = B(\lambda)\,, \quad \emptyset \neq \mathfrak{M}(\lambda) \subset \mathfrak{M}^*(\lambda) \tag{2.10}$$

und nach unserer Annahme gilt dann $B(\lambda) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda)$. Gäbe es einen Punkt $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda)$ mit $\mathbf{x}' \notin B(\lambda)$, so würde nach (2.10) $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^*(\lambda)$, $\mathbf{x}' \notin \mathscr{L}(\lambda)$ gelten; da aber zugleich $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^*_{\mathrm{opt}}(\lambda)$ ist[4]), folgt daraus ein Widerspruch mit unserer Annahme. Dadurch ist der Beweis der Behauptung auch in der zweiten Richtung durchgeführt.

Behauptung 2.3. *Für alle* $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ *gilt*

$$B(\lambda) = \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda) \Leftrightarrow \mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset\,,$$

wobei

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r < c_\alpha \;\; (\alpha \in I({}_0\lambda))\,, \tag{2.11}$$

$$\sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r = c_\alpha \;\; (\alpha \notin I({}_0\lambda))\}$$

ist.

---

[4]) Wir benutzen hier den aus der konvexen Optimierung bekannten Satz, der besagt, dass ein lokales Minimum einer über einen konvexen Restriktionsbereich gegebenen konvexen Funktion zugleich ein absolutes Minimum (bezüglich dieser Restriktionsmenge) darstellt. Siehe [4].

Beweis. Nach Beh. 2.2 genügt es offenbar hier die Äquivalenz

$$\mathscr{L}(\lambda) = \mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\lambda) \Leftrightarrow \mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad \lambda \in S'(I({}_0\lambda))$$

zu beweisen,

Es gelte $\mathscr{L}(\lambda) = \mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\lambda)$ für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$, d. h. die linke Seite der obigen Äquivalenz. Für einen beliebigen Punkt

$$\mathbf{x}^* \in \mathscr{L}(\lambda) \tag{2.12}$$

finden die Ungleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha \geqq \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x^*_\alpha \quad \text{d. h.} \quad \sum_{\alpha=1}^{n} -c_\alpha(x_\alpha - x^*_\alpha) \leqq 0 \tag{2.13}$$

für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^*(\lambda)$ statt, d. h. für alle Punkte $\mathbf{x}$ mit

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha \leqq b_r \quad (r = 1, \ldots, m)\,, \\ &\sum_{\alpha=1}^{n} -\, (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, x_\alpha \leqq -\, b_r \quad (r = 1, \ldots, m)\,, \\ &-x_\alpha \leqq 0 \quad (\alpha \in I({}_0\lambda)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

gilt zugleich (2.13). Definiert man

$$\xi_\alpha = x_\alpha - x^*_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,,$$

so kann man die Ungleichungen (2.13) und (2.14) mit Hinsicht auf (2.12), (2.4) in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} -c_\alpha \xi_\alpha \leqq 0\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} (a_{r\alpha} + \lambda_\alpha)\, \xi_\alpha \leqq 0\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} -(a_{r\alpha} + \lambda_r)\, \xi_\alpha \leqq 0 \quad (r = 1, \ldots, m)\,,$$
$$-\xi_\alpha \leqq 0 \qquad (\alpha \in I({}_0\lambda))$$

schreiben. Nach dem Satz von Farkas[5]) gibt es dann Zahlen $u_r^+, u_r^- \geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m)$, $v_\beta \geqq 0$ $(\beta \in I({}_0\lambda))$ in der Weise, dass

$$-c_\alpha = \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -(a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r^- - v_\beta \delta_\alpha^\beta \tag{2.15}$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n;\ \beta \in I({}_0\lambda))$$

gilt. Setzt man noch $u_r^- - u_r^+ = u_r$ $(r = 1, \ldots, m)$, so folgt aus (2.15)

$$c_\alpha = \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r + v_\beta \delta_\alpha^\beta \ (\alpha = 1, \ldots, n;\ \beta \in I({}_0\lambda))\,. \tag{2.16}$$

---

[5]) Siehe [5].

Aus unserer obigen Annahme $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda})$ und aus der geometrischen Interpretation des Satzes von Farkas ergibt sich, dass der Vektor $-\mathbf{c} = (-c_\alpha)$ mit dem Anfangspunkt $\mathbf{x}^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$ in das Innere des zu dem Kegel $\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ zugehörigen Polarkegels ${}^P\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ gerichtet ist. Da der Polarkegel ${}^P\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ durch

$$
\begin{gathered}
{}^P\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \,\Big|\, x_\alpha - x_\alpha^* = \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r - v_\beta \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,, \\
\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m\,, \quad v_\beta \geqq 0 \quad (\beta \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\Big\}
\end{gathered}
$$

beschrieben ist, genügt es in der Formel (2.16) sich auf positive Zahlen v_β $(\beta \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ einzuschränken, um dem Vektor $-\mathbf{c} = (-c_\alpha)$ die vorgeschriebene Eigenschaft zu erteilen. Dann kann man die Relationen (2.16) in der Form

$$
\text{(2.17)} \qquad c_\alpha = \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r \;\; (\alpha \notin I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,, \quad c_\alpha > \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r \;\; (\alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))
$$

schreiben. Es existiert daher ein Punkt $\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m$ mit der Eigenschaft (2.17), woraus nach (2.11) $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ folgt.

Ist anderseits $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ bei einem festgewählten $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$, so liegt der Vektor $-\mathbf{c} = (-c_\alpha)$ im Inneren des Polarkegels ${}^P\mathfrak{M}^*(\boldsymbol{\lambda})$ und aus der entsprechenden geometrischen Interpretation des Satzes von Farkas ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie früher $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}^*_{\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Behauptung 2.4. *Definiert man die Menge*

$$
\text{(2.18)} \qquad D = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \,|\, \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\}\,,
$$

so gilt für den Stabilitätsbereich $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ *aus* (2.1)

$$
\text{(2.19)} \qquad C({}_0\boldsymbol{\lambda}) = S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) \cap D\,.
$$

Beweis. Die Behauptung 2.4 folgt unmittelbar aus (2.1), aus der Definition (1.20) und aus der Behauptung 2.3.

Behauptung 2.5. *Definieren wir für alle* $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ *in dem Raum* $\mathbf{E}_{m+1}$, *der mit den kartesischen Koordinaten* $u_1, \ldots, u_{m+1}$ *versehen ist, die Mengen*

$$
\begin{aligned}
\text{(2.20)} \qquad \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \,\Big|\, & \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} < c_\alpha \;\; (\alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,, \\
& \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \;\; (\alpha \notin I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,, \quad \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0\Big\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(2.21)} \qquad \mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \,\Big|\, & \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \;\; (\alpha \notin I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,, \\
& \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0\Big\}\,,
\end{aligned}
$$

so ergibt sich für die in (2.18) *eingeführte Menge D*

$$D = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \mid \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\} \tag{2.22}$$

und für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ *gilt*:

a) $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$;

b) *die Menge* $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ *ist ein linearer Unterraum in* $\mathbf{E}_{m+1}$, *dessen Dimension von der Wahl* $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ *nicht abhängt*;

c) *falls* $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ *für ein* $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ *ist, so gilt* $\dim \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \dim \mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$.

Beweis. Setzt man

$$u_{m+1} = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r \,,$$

so gehen die lineare Restriktionen aus der Definition (2.11) der Menge $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda})$ in die Relationen

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} < c_\alpha \;\; (\alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,, \quad \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \;\; (\alpha \notin I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\,,$$

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0$$

über, die eben die Menge $\mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda})$ aus (2.20) beschrieben und es gilt dann offenbar

$$\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\,, \tag{2.23}$$

d. h. die Behauptung (2.22).

Wir betrachten nun die folgenden Möglichkeiten:

α) Im Falle $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{1, \ldots, n\}$ lässt sich die Menge $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ aus (2.21) in der Form

$$\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0\} \tag{2.24}$$

schreiben, woraus folgt, dass in diesem Falle die Menge $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ für alle $\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m$ ein linearer m – dimensionaler Unterraum in $\mathbf{E}_{m+1}$ (d. h. eine Hyperebene in $\mathbf{E}_{m+1}$) ist. Führt man die Menge

$$\mathscr{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} < c_\alpha \;\; (\alpha \in I({}_0\boldsymbol{\lambda}))\}, \tag{2.25}$$

die offenbar von der Wahl $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ unabhängig ist, ein, so gilt für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ mit $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ (und daher auch nach (2.23) mit $\mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$) ebenfalls $\mathscr{H} \neq \emptyset$. Die Menge $\mathscr{H}$ stellt als Durchschnitt von endlich vielen offenen Halbräumen in $\mathbf{E}_{m+1}$

eine $(m + 1)$-dimensionale offene und konvexe Menge dar. Danach (2.20), (2.24), (2.25)

$$\mathfrak{N}^1(\lambda) = \mathscr{L}^1(\lambda) \cap \mathscr{H} \neq \emptyset \tag{2.26}$$

ist, folgt daraus $\dim \mathfrak{N}^1(\lambda) = m = \dim \mathscr{L}^1(\lambda)$.

β) Falls $I({}_0\lambda) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, so kann man (ohne die Allgemeinheit einzuschränken)

$$\{1, \ldots, n\} \setminus I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, s\}, \quad s \leqq n,$$

setzen. Aus (2.21) ergibt sich $\mathscr{L}^1(\lambda) \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1s} & \ldots & a_{ms} & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & 1 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1s} & \ldots & a_{ms} & 1 & c_s \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

gilt. Ähnlich wie im Beweis der Beh. 1.7 lässt sich nun zeigen, dass für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1s} & \ldots & a_{ms} & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m & -1 \end{pmatrix} = {}_0h = s + 1 - {}_0d$$

gilt (also unabhängig von der Wahl $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$), wobei die Zahlen ${}_0h$ und ${}_0d$ die Bedeutung aus (1.28) haben. Da der Ausgangspunkt ${}_0\lambda$ die Eigenschaft ${}_0\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$, $B({}_0\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$ hat, so gilt nach Beh. 2.3 $\mathfrak{N}({}_0\lambda) \neq \emptyset$ und nach (2.23) dann $\mathfrak{N}^1({}_0\lambda) \neq \emptyset$. Daraus und aus (2.20) und (2.21) ergibt sich $\mathscr{L}^1({}_0\lambda) \neq \emptyset$. Die Bedingung (2.27) ist daher für den Punkt ${}_0\lambda$ erfüllt. Da aber der Rang ${}_0h$ von der Wahl $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ nicht abhängt, so gilt $\mathscr{L}^1(\lambda) \neq \emptyset$ für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ und zugleich $\dim \mathscr{L}^1(\lambda) = \dim \mathscr{L}^1({}_0\lambda)$ ebenfalls für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$. Falls nun $\mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset$ für ein $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ ist (und nach (2.23) daher $\mathfrak{N}^1(\lambda) \neq \emptyset$), so folgt aus (2.21), (2.20), (2.25)

$$\mathfrak{N}^1(\lambda) = \mathscr{L}^1(\lambda) \cap \mathscr{H} \neq \emptyset \tag{2.28}$$

und daher $\mathscr{H} \neq \emptyset$. Daraus folgt nach (2.25) $\dim \mathfrak{N}^1(\lambda) = \dim \mathscr{L}^1(\lambda)$.

Behauptung 2.6. *Für alle λ von der Menge $C({}_0\lambda)$ aus (2.1) gilt*

$$\dim \mathfrak{N}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}^1(\lambda) = m + 1 - {}_0h = m - s + {}_0d,$$

wo ${}_0d = \dim B({}_0\lambda)$ ist.

Beweis. Es sei $\lambda \in C({}_0\lambda)$ beliebig festgewählt. Nach (2.19), (2.18) und (2.23) gilt dann $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$, $\mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset$, $\mathfrak{N}^1(\lambda) \neq \emptyset$ und nach Beh. 2.5 $\dim \mathfrak{N}^1(\lambda) =$

$= \dim \mathscr{L}^1(\lambda)$. Da die Menge $\mathfrak{N}^1(\lambda) \subset \mathbf{E}_{m+1}$ das Bild der Menge $\mathfrak{N}(\lambda) \subset \mathbf{E}_m$ bei der linearen regulären Abbildung

$$u_r = u_r \ (r = 1, \ldots, m), \quad u_{m+1} = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r$$

ist, ergibt sich daraus unmittelbar

$$\dim \mathfrak{N}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}^1(\lambda) .$$

Im Falle $I({}_0\lambda) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, betrachten wir einen zu dem linearen Unterraum $\mathscr{L}^1(\lambda)$ dualen linearen Unterraum ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$ in $\mathbf{E}_{m+1}$. Wählt man einen beliebigen Punkt $\mathbf{u}' \in \mathbf{E}_{m+1}$ fest, so gibt es genau einen zu dem Unterraum $\mathscr{L}^1(\lambda)$ dualen Unterraum ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$ mit $\mathbf{u}' \in {}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
{}^D\mathscr{L}^1(\lambda) = \Big\{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \ \Big| \ & u_r = u'_r + \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\eta_\alpha + \eta_0 \lambda_r \ (r = 1, \ldots, m), \\
& u_{m+1} = u'_{m+1} + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha - \eta_0 , \quad \eta_0, \eta_\alpha \in \mathbf{E}_1 \ (\alpha \in 1, \ldots, s)\Big\} .
\end{aligned}
$$

Die Dimension des dualen Unterraumes ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$ ist nach Beweis der Beh. 1.7 der Zahl

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{ms} & \lambda_m \\ 1 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix} = {}_0h$$

gleich, und zwar alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$. Daraus ergibt sich

$$\dim \mathfrak{N}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}^1(\lambda) = \dim \mathscr{L}^1(\lambda) = m + 1 - {}_0h$$

für alle $\lambda \in C({}_0\lambda)$, woraus nach (1.28) die Behauptung 2.6 folgt.

Im Falle $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$ kann man $s = 0$ setzen und nach dem Beweis der Beh. 1.1 ist ${}_0d = 0$. Im Teil α) des Beweises der Beh. 2.5 wurde für den betrachteten Fall $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$ die Gleichheit $\dim \mathscr{L}^1(\lambda) = m$ für alle $\lambda \in {}'\mathbf{E}_m = S'(I({}_0\lambda))$ bereits bewiesen. Es gilt daher die Behauptung 2.6 auch in diesem Spezialfall.

Behauptung 2.7. *Der euklidische Abstand $d(\mathscr{L}^1(\lambda), \mathbf{u}')$ des linearen Unterraumes $\mathscr{L}^1(\lambda)$ von einem festgewählten Punkt $\mathbf{u}' \in \mathbf{E}_{m+1}$ stellt eine über der Menge $S'(I({}_0\lambda))$ stetige Funktion in λ dar.*

Beweis. Wir wählen $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ beliebig fest und wir werden die zwei in Frage kommenden Möglichkeiten getrennt behandeln:

α) Fall $I({}_0\lambda) = \{1, \ldots, n\}$:

In diesem Falle stellt die Menge $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ eine Hyperebene in $\mathbf{E}_{m+1}$ mit der Beschreibung

$$\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0\}$$

dar und, da $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ gilt, so ist

$$d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}') = \frac{\left|\sum_{r=1}^{m} \lambda_r u'_r - u'_{m+1}\right|}{\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{m} (\lambda_r)^2 + 1\right)}},$$

woraus die Stetigkeit von $d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}')$ über $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ folgt.

β) Fall $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$:

In dem Gleichungssystem

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

aus der Definition (2.21) der Menge $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ wählen wir ein System von linear unabhängigen Gleichungen aus (indem die von ihnen abhängigen restlichen Gleichungen weggelassen werden). Seien es die Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \; (\alpha = 1, \ldots, s'), \quad s' \leqq s. \tag{2.29}$$

Die in (2.21) definierte Menge $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ $(\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})))$ wird dann durch

$$\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha, \; \sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0 \; (\alpha = 1, \ldots, s')\} \neq \emptyset \tag{2.30}$$

äquivalent beschrieben.

Wir werden hier wiederum zwei Fälle unterscheiden:

a) Falls für ein $\boldsymbol{\lambda}' \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda'_r u_r - u_{m+1} = 0 \tag{2.31}$$

von den Gleichungen in (2.29) linear abhängig ist, so ist – nach Beh. 2.5, (b) – die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r - u_{m+1} = 0$$

von den Gleichungen (2.29) für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ linear abhängig und die Menge $\mathscr{L}^1(\lambda)$ aus (2.21) wird in diesem Fall durch

$$\mathscr{L}^1(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + u_{m+1} = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, s')\}$$

beschrieben. Der Abstand $d(\mathscr{L}^1(\lambda), \mathbf{u}')$ ist in diesem Spezialfall von der Wahl $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$ unabhängig und er stellt eine über der Menge $S'(I({}_0\lambda))$ konstante und daher stetige Funktion dar.

b) Falls für ein $\lambda' \in S'(I({}_0\lambda))$ die Gleichung (2.31) zusammen mit den Gleichungen (2.29) ein System von linear unabhängigen Gleichungen bildet, so gilt diese Eigenschaft auch für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$, wie es sich leicht aus Beh. 2.5, (b) ergibt. Wir müssen auch hier zwei Fälle unterscheiden:

b_1) Im Falle $s' = m$ ist offenbar $\dim \mathscr{L}^1(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in S'(I({}_0\lambda))$. Die Gleichungen aus der Beschreibung der Menge $\mathscr{L}^1(\lambda)$ sind daher eindeutig lösbar, wobei deren Lösung $u_r = u_r(\lambda)$ $(r = 1, \ldots, m + 1)$ offenbar eine über der Menge $S'(I({}_0\lambda))$ stetige Vektorfunktion ist. Daraus folgt dass diese Eigenschaft ebenfalls der Abstand

$$d(\mathscr{L}^1(\lambda), \mathbf{u}') = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{m+1} (u_r(\lambda) - u_r')^2\right)}$$

hat.

b_2) Falls $s' < m$ ist, so gilt $1 \leqq \dim \mathscr{L}^1(\lambda) \leqq m - 1$. Um nun den Abstand $d(\mathscr{L}^1(\lambda), \mathbf{u}')$ zu bestimmen, betrachten wir den zu dem linearen Unterraum $\mathscr{L}^1(\lambda)$ dualen linearen Unterraum ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$, der den Punkt $\mathbf{u}'$ enthält. Bezeichnet man mit $\mathbf{u}''$ den einzigen Durchschnittspunkt von $\mathscr{L}^1(\lambda)$ und ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$, also $\{\mathbf{u}''\} = \mathscr{L}^1(\lambda) \cap \cap {}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$, so gilt

$$d(\mathscr{L}^1(\lambda), \mathbf{u}') = d(\mathbf{u}'', \mathbf{u}') .$$

Der lineare Unterraum ${}^D\mathscr{L}^1(\lambda)$ wird durch

$$(2.32) \qquad {}^D\mathscr{L}^1(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_{m+1} \mid u_r = u_r' + \sum_{\alpha=1}^{s'} a_{r\alpha}\eta_\alpha + \eta_0\lambda_r \quad (r = 1, \ldots, m),$$

$$u_{m+1} = u_{m+1}' + \sum_{\alpha=1}^{s'} \eta_\alpha - \eta_0 , \quad \eta_0, \eta_\alpha \in \mathbf{E}_1 \quad (\alpha = 1, \ldots, s')\}$$

beschrieben. Um den Durchschnittspunkt $\mathbf{u}''$ zu berechnen, eliminieren wir mit Hilfe der Gleichungen aus (2.32) in den Gleichungen aus der Beschreibung (2.30) der Menge $\mathscr{L}^1(\lambda)$. Wir erhalten hiedurch:

$$\sum_{\beta=1}^{s'} \left[\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} a_{r\beta} + 1\right] \eta_\beta + \eta_0\left[\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\lambda_r - 1\right] =$$

$$= c_\alpha - \left[\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r' + u_{m+1}'\right] \quad (\alpha = 1, \ldots, s') ,$$

$$\sum_{\beta=1}^{s'} \left[\sum_{r=1}^{m} a_{r\beta}\lambda_r - 1\right] \eta_\beta + \eta_0\left[\sum_{r=1}^{m} (\lambda_r)^2 + 1\right] = - \left[\sum_{r=1}^{m} \lambda_r u_r' - u_{m+1}'\right] ,$$

also ein Gleichungssystem von $s' + 1$ Gleichungen mit $s' + 1$ Unbekannten η_0, η_β ($\beta = 1, \ldots, s'$), von dem wir wissen, dass es eine einzige Lösung für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ besitzt. Diese Lösung

$$\eta_\beta = \eta_\beta(\boldsymbol{\lambda}), \quad \eta_0 = \eta_0(\boldsymbol{\lambda}) \quad (\beta = 1, \ldots, s')$$

stellt dann offenbar stetige Funktionen über der Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ dar. Der Punkt $\mathbf{u}''$ mit der Koordinaten

$$u''_r = u'_r + \sum_{\alpha=1}^{s'} a_{r\alpha}\, \eta_\alpha(\boldsymbol{\lambda}) + \lambda_r\, \eta_0(\boldsymbol{\lambda}) \quad (r = 1, \ldots, m),$$

$$u''_{m+1} = u'_{m+1} + \sum_{\alpha=1}^{s'} \eta_\alpha(\boldsymbol{\lambda}) - \eta_0(\boldsymbol{\lambda})$$

hängt also auch stetig von $\boldsymbol{\lambda}$ über der Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ ab und daher hat der Abstand $d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}')$ dieselbe Eigenschaft.

Behauptung 2.8. *Bezeichnet man mit $\mathscr{L}\,(S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})))$ den linearen Unterraum der kleinsten Dimension in $'\mathbf{E}_m$, der die Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ enthält, so stellt die Menge $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ aus (2.1) eine in $\mathscr{L}(S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})))$ offene Menge mit ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ dar.*

Beweis. Da nach (1.6) und Beh. 1.6 ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ und $\emptyset \neq B({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\boldsymbol{\lambda})$ gilt, folgt daraus nach (2.1) ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in C({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Es sei $\boldsymbol{\lambda}^* \in C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ beliebig. Nach (2.19) gilt dann

$$\boldsymbol{\lambda}^* \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})), \quad \boldsymbol{\lambda}^* \in D$$

und laut (2.18), (2.23) und (2.20) $\mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}^*) \neq \emptyset$. Es sei $\mathbf{u}^* \in \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}^*)$ beliebig. Aus (2.26), (2.28) ergibt sich

$$(2.33) \qquad \mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}^*) = \mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}^*) \cap \mathscr{H}, \quad \mathbf{u}^* \in \mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}^*) \neq \emptyset, \quad \mathbf{u}^* \in \mathscr{H} \neq \emptyset.$$

Wir betrachten nun zwei Möglichkeiten:

α) Fall $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$:

Betrachtet man die Menge $\mathscr{H}$ aus (2.25), so sieht man, dass diese Menge eine $(m + 1)$ – dimensionale offene und konvexe Menge in $\mathbf{E}_{m+1}$ ist. Es gibt daher (mit Hinsicht auf (2.33)) eine ε – Umgebung $\mathscr{U}^*(\varepsilon)$ des Punktes $\mathbf{u}^*$ in $\mathbf{E}_{m+1}$ mit $\mathscr{U}^*(\varepsilon) \subset \subset \mathscr{H}$. Nach (2.33) gilt dann $d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}^*), \mathbf{u}^*) = 0$. Da nach Beh. 2.7 der Abstand $d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}^*)$ eine stetige Funktion über der Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ darstellt, so gibt es zu dem fraglichen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ in der Weise, dass

$$(2.34) \qquad \boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})), \quad \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}^*) < \varepsilon$$

gilt. Da aber die Menge $S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ nach (1.21) und Beh. 1.5, eine in $\mathscr{L}(S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})))$ offene Menge ist, kann die Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so klein gewählt werden, damit

$$(2.35) \qquad \mathscr{U}^*(\delta_\varepsilon) \equiv \{\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) \mid \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*\| < \delta_\varepsilon\} \subset S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$$

gelte. Nach Beh. 2.5 folgt daraus $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{U}^*(\delta_\varepsilon)$ und nach (2.34) weiter

$$\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) \cap \mathscr{U}^*(\varepsilon) \neq \emptyset \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{U}^*(\delta_\varepsilon).$$

Wegen $\mathscr{U}^*(\varepsilon) \subset \mathscr{H}$ ist $\mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{U}^*(\delta_\varepsilon)$, woraus nach (2.35) und nach (2.19), (2.18), (2.23), (2.20)

$$\boldsymbol{\lambda} \in C({}_0\boldsymbol{\lambda}) \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{U}^*(\delta_\varepsilon)$$

folgt. Da aber $\boldsymbol{\lambda}^* \in C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ein beliebiger Punkt der Menge $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ war, folgt daraus, dass die Menge $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ eine in dem linearen Unterraum $\mathscr{L}(S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ offene Menge ist.

β) Fall $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$:

In diesem Spezialfall ergibt sich aus (2.21) und (2.20) $\mathfrak{N}^1(\boldsymbol{\lambda}) = \mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda})$ für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$. Da nach Beh. 2.5, (a), $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ für alle $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ gilt, so ist $C({}_0\boldsymbol{\lambda}) = S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ für $\boldsymbol{\lambda} \in S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda}))$ und die Menge $C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ist dann (nach Bem. 1.5) eine offene Menge bezüglich des linearen Unterraumes $\mathscr{L}(S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})))$.

Bemerkung 2.1. Aus Behauptung 2.8 und Behauptung 1.8 folgt für den Fall $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$

$$\dim C({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \dim S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = s - {}_0d.$$

Im Falle $I({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{1, \ldots, n\}$ gilt dann nach Bem. 1.5 und Beh. 2.8

$$\dim C({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \dim S'(I({}_0\boldsymbol{\lambda})) = m.$$

Behauptung 2.9. *Es gilt*

$$\boldsymbol{\lambda} \in C({}_0\boldsymbol{\lambda}) \Rightarrow C(\boldsymbol{\lambda}) = C({}_0\boldsymbol{\lambda}).$$

Beweis. Es sei ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in C({}_0\boldsymbol{\lambda})$ beliebig. Nach (2.1) gilt dann $\mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$. Ähnlich, wie es bei der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\boldsymbol{\lambda})$ aus (1.6) ist, kann man schreiben

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}({}_1\boldsymbol{\lambda}) \mid x_\alpha = 0 \quad (\alpha \in I({}_1\boldsymbol{\lambda}))\},$$

wobei die Indexmenge $I({}_1\boldsymbol{\lambda}) \subset \{1, \ldots, n\}$ die grösste Indexmenge mit dieser Eigenschaft ist. Wir definieren ähnlich wie im Falle des Punktes ${}_0\boldsymbol{\lambda}$ die Mengen

$$(2.36) \qquad B_1(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) \mid x_\alpha = 0 \quad (\alpha \in I({}_1\boldsymbol{\lambda}))\},$$

$$B_1'(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}) \mid x_\alpha = 0 \quad (\alpha \in I({}_1\boldsymbol{\lambda})), \quad x_\alpha > 0 \quad (\alpha \notin I({}_1\boldsymbol{\lambda}))\},$$

$$S'(I({}_1\boldsymbol{\lambda})) = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'\mathbf{E}_m \mid B_1'(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\},$$

$$\mathfrak{N}_1(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r < c_\alpha \quad (\alpha \in I({}_1\boldsymbol{\lambda})),$$

$$\sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_r)\, u_r = c_\alpha \quad (\alpha \notin I({}_1\boldsymbol{\lambda}))\},$$

$$D_1 = \{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \mid \mathfrak{N}_1(\lambda) \neq \emptyset\},$$

(2.37) $$C({}_1\lambda) = \{\lambda \in {}'\mathbf{E}_m \mid B_1'(\lambda) \neq \emptyset\,, \quad B_1(\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda)\} = S'(I({}_1\lambda)) \cap D_1\,.$$

Wegen ${}_1\lambda \in C({}_0\lambda)$ gilt nach (2.1)

(2.38) $$B'({}_1\lambda) \neq \emptyset\,, \quad B({}_1\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda)\,.$$

Nach Beh. 2.8 ist ${}_1\lambda \in C({}_1\lambda)$ und daher mit Hinsicht auf (2.37)

$$B_1'({}_1\lambda) \neq \emptyset\,, \quad B_1({}_1\lambda) = \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda)\,.$$

Daraus und aus (2.38) ergibt $B({}_1\lambda) = B_1({}_1\lambda)$, woraus nach (2.36) und (1.7)

$$I({}_1\lambda) = I({}_0\lambda)$$

folgt. Es gilt daher $B(\lambda) = B_1(\lambda)$, $B'(\lambda) = B_1'(\lambda)$ für alle $\lambda \in {}'\mathbf{E}_m$ und daraus weiter nach (2.36), (1.20)

$$S'(I({}_1\lambda)) = S'(I({}_0\lambda))\,.$$

Da dann auch (nach (2.11), (2.36))

$$\mathfrak{N}_1(\lambda) = \mathfrak{N}(\lambda)$$

für alle $\lambda \in {}'\mathbf{E}_m$ gilt, folgt daraus nach (2.1) und (2.37)

$$C({}_0\lambda) = C({}_1\lambda)\,.$$

Bemerkung 2.2. Aus der Behauptung 2.9 ergibt sich unmittelbar ${}_1\lambda, {}_2\lambda \in {}'\mathbf{E}_m$, ${}_1\lambda \neq {}_2\lambda$, $C({}_1\lambda) \neq C({}_2\lambda) \Rightarrow C({}_1\lambda) \cap C({}_2\lambda) = \emptyset$.

Bemerkung 2.3. Eine qualitative Untersuchung der Menge D aus (2.18), die zugleich eine nähere (geometrische) Charakteristik der Menge $C({}_0\lambda)$ aus (2.19) liefert, kann auf ähnliche Art und Weise wie die qualitative Untersuchung des Lösbarkeitsbereiches eines linearen parametrischen Optimierungsproblems aus den Arbeiten [1] und [2] durchgeführt werden.

Literatur

[1] *L. Grygarová:* Die Lösbarkeit eines linearen Optimierungsproblems unter Zufügung einer weiteren Restriktionsbedingung. Aplikace matematiky, 17 (1972), 352—387.

[2] *L. Grygarová:* Lösungsbereich von Optimierungsproblemen mit Parametern in den Koeffizienten der Matrix der linearen Restriktionsbedingungen. Aplikace matematiky, 17 (1972), 388—400.

[3] *F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz:* Theorie der linearen Optimierung. Akademie-Verlag, Berlin (1972).

[4] *Г. П. Кюнци, В. Крелле:* Нелинейное программирование. Издательство Советское радио, Москва 1965.
[5] *Д. Б. Юдин, Э. Г. Голштейн:* Задачи и методы линейного программирования. Издательство Советское радио, Москва 1964.

Souhrn

O OBORU STABILITY JEDNÉ ÚLOHY LINEÁRNÍHO PARAMETRICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Práce se týká určité třídy úloh lineárního parametrického programování $\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\lambda)} \{f(\mathbf{x})\}!$ s parametry v matici koeficientů příslušných lineárních omezení typu $\|a_{r\alpha} + \lambda_r\|$ $(r = 1, \ldots, m,\ \alpha = 1, \ldots, n)$. Jde o popis a kvalitativní rozbor tzv. oboru stability množiny optimálních řešení dané optimalizační úlohy příslušného pevné volbě parametrů $\boldsymbol{\lambda}$.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Libuše Grygarová,* CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.