Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 2, 126–142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103575

ÜBER DIE OPTIMIERUNG EINES ZWEIPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHRENS

Miroslav Šisler

(Eingegangen 12. mai 1974)

In der Arbeit wird die Konvergenzgeschwindigkeit eines in den Arbeiten [2], [3] untersuchten zweiparametrigen Iterationsverfahrens mit der Konvergenzgeschwindigkeit des Oberrelaxations-Verfahrens verglichen. Das Iterationsverfahren ist folgenderweise definiert: es sei das lineare Gleichungssystem mit n Unbekannten

$$x = Bx + b \tag{1}$$

gegeben, wobei B im allgemeinen eine nichtsymmetrische $n \times n$ Blockmatrix ist, deren Diagonalblöcke Nullmatrizen sind. Es sei ferner

$$B = L + U$$

wo L bzw. U die untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist. Das untersuchte Iterationsverfahren wird dann durch die Formel

$$x_{\nu+1} = T(\alpha, \beta)\, x_\nu + P(\alpha, \beta)\, b \tag{2}$$

definiert, wo α, β reele von Null verschiedene Parameterwerte sind und wo

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta) &= (\alpha E + \beta L)^{-1} \left[(\alpha - 1) E + (\beta + 1) L + U\right], \\ P(\alpha, \beta) &= (\alpha E + \beta L)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

ist.

In der Arbeit [2] wurde bewiesen, dass günstig gewählten Parameterwerte α, β gewisse bekannte Iterationsverfahren entsprechen, wie z. B. das Jacobi-Verfahren, das Gauss-Seidelsche Verfahren, das Oberrelaxations-Verfahren u. a.

Ähnlicherweise wie in den Arbeiten [2], [3] werden wir voraussetzen, dass ein n-dimensionaler Vektorraum R existiert, welcher durch die direkte Summe der Unterräume $v_1, \ldots, v_m$ $(m \leqq n)$ gebildet wird; dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) die Matrix $\mathbf{B}$ bildet den Vektorraum R in R ab;

b) es existieren positive teilerfremde ganze Zahlen h, k mit $h + k = p \leqq m$, wobei für die Matrizen $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ die Beziehungen

$$\mathbf{L}\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i+h},$$
$$\mathbf{U}\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i-k}, \quad i = 1, \ldots, m$$

gelten (dabei setzt man $\mathrm{v}_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$).

Unter diesen Bedingungen wurde in der Arbeit [2] der folgende Satz bewiesen, der den Zusammenhang zwischen Eigenwerten der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ für $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ ausdrückt. (Man bemerke, dass dann das Iterationsverfahren (2) dem Jacobi-Verfahren (1) entspricht.)

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Bedingung*

$$(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k \tag{4}$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, dann ist jede der Beziehung (4) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Man untersuche nun den Fall, wenn $\beta = -1$ ist. Die Formel (4) definiert dann (wie schon aus der Arbeit [2] bekannt ist) das gewöhnliche Oberrelaxations-Verfahren. In dem Speziellfall, wenn $p = 2$, $h = k = 1$ ist und die Eigenwerte μ_i^2 der Matrix $\mathbf{B}^2$ reell und nichtnegativ sind, gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Es sei $\varrho(\mathbf{B}) = M < 1$, wo $\varrho(\mathbf{B})$ der Spektralradius der Matrix $\mathbf{B}$ ist. Dann ist $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \mu_i^2 = M^2$ und der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1))$ der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, -1)$ nimmt seinen Minimalwert für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ an, wobei*

$$\min_{\alpha \neq 0} \varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \tag{5}$$

gilt.

Dieser Satz folgt leicht aus (4) und ist auch z. B. in [1] bewiesen (hier setzt man $\alpha = 1/\omega$).

Ähnlicherweise wie in dem Satz 2 werden wir überall dieser Arbeit voraussetzen, dass $p = 2$, $h = k = 1$ ist, und das die Ungleichungen $0 \leqq \mu_i^2 < 1$, $i = 1, \ldots, n$ gelten, wo μ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ sind (die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$ sind also reell und nichtnegativ). Dabei wird mit M bzw. m eine solche positive bzw. nichtnegative Zahl bezeichnet, dass $M^2 = \max\limits_i \mu_i^2$ bzw. $m^2 = \min\limits_i \mu_i^2$ ist. Wir werden uns mit der Frage befassen, für welche Werte von α, β die Ungleichung

$\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt, d. h. für welche Punkte $[\alpha, \beta]$ die durch die Formel (2) definierte Methode in Hinsicht auf den Satz 2 wenigstens so schnell wie das Oberrelaxations-Verfahren konvergiert.

Bevor wir den Hilfssatz 1 formulieren werden, führen wir zuerst einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

Man definiere die Funktionen b_1, b_2, b_3, B_1, B_2 der Veränderlichen α wie folgt:

$$(6) \quad b_1(\mu_i, \alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\, M^2(1 - \mu_i^2) + 4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - M^2) - 4\alpha M^2 \sqrt{(1 - M^2)}]/2\mu_i^2 M^2 \sqrt{(1 - M^2)}\,,$$

$$(7) \quad b_2(\mu_i, \alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\, M^2(1 - \mu_i^2) + 4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 4\alpha M^2]/2\mu_i^2 M^2\,,$$

$$(8) \quad b_3(\mu_i, \alpha) = [(1 - \alpha)^2/\mu_i^2] - [\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2/\mu_i^2(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2] - 1\,,$$

$$(9) \quad B_1(\mu_i, \alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2\,,$$

$$(10) \quad B_2(\mu_i, \alpha) = -2\alpha(1 + \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2\,.$$

Man bezeichne ferner durch das Symbol $\Omega(\mu_i)$ die Menge von solchen Punkten $[\alpha, \beta]$, für die alle Wurzeln λ der Gleichung

$$(11) \qquad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = \mu_i^2(1 + \beta - \lambda\beta)$$

(die einen Spezialfall der Gleichung (4) für $p = 2$, $h = k = 1$ darstellt) im Absolutbetrag kleiner als die Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind. Es gilt dann der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *Es sei* $\mu_i^2 > 0$. *Dann gilt*

a) $[\alpha, \beta] \in \Omega(\mu_i)$ *dann und nur dann, wenn*

$$(12) \qquad \beta \leqq b_1(\mu_i, \alpha)\,, \quad \beta \leqq b_2(\mu_i, \alpha)\,, \quad \beta \geqq b_3(\mu_i, \alpha)$$

ist;

b) *Die Menge* $\Omega(\mu_i)$ *ist die Vereinigung zweier disjunkter Bereiche* $\Omega_1(\mu_i)$, $\Omega_2(\mu_i)$, *wobei für* $[\alpha, \beta] \in \Omega_1(\mu_i)$ $\alpha < 0$ *und für* $[\alpha, \beta] \in \Omega_2(\mu_i)$ $\alpha > 0$ *ist;*

c) *Die im Absolutbetrag maximale Wurzel der Gleichung* (11) *gleicht der Zahl* $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ *genau dann, wenn der Punkt* $[\alpha, \beta]$ *ein Grenzpunkt der Menge* $\Omega(\mu_i)$ *ist;*

d) *Der Bereich* $\Omega_1(\mu_i)$ *enthält genau die Punkte* $[\alpha, \beta]$, *für die*

$$(13) \quad -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2\sqrt{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \,.\, \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$$

gilt, wobei für

$$(14) \qquad \alpha \leqq -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(15) \qquad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_1(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq B_2(\mu_i, \alpha) \leqq b_1(\mu_i, \alpha)$$

(*die Gleichheitszeichen gelten nur für den linken Randpunkt des Intervalls* (13) *und für*

$$(16) \qquad \alpha \geqq -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(17) \qquad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_2(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq B_2(\mu_i, \alpha) \leqq b_2(\mu_i, \alpha)$$

gelten (*die Gleichheitszeichen gelten nur für den rechten Randpunkt des Intervalls* (13)).

e) *Der Bereich* $\Omega_2(\mu_i)$ *enthält genau die Punkte* $[\alpha, \beta]$, *für die*

$$(18) \quad \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} \leqq \alpha \leqq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt{(1 - M^2)}$$

gilt, wobei für

$$(19) \qquad \alpha \leqq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(20) \qquad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_2(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq B_1(\mu_i, \alpha) \leqq b_2(\mu_i, \alpha)$$

(*die Gleichheitszeichen gelten nur für den linken Randpunkt des Intervalls* (18) *und für*

$$(21) \qquad \alpha \geqq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(22) \qquad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_1(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leqq B_1(\mu_i, \alpha) \leqq b_1(\mu_i, \alpha)$$

gelten (*die Gleichheitszeichen gelten nut für den rechten Randpunkt des Intervals* (18)).

Die Gestalt und Lage der Bereiche $\Omega_1(\mu_i)$ und $\Omega_2(\mu_i)$ ist aus der Abb. 1 ersichtlich.

Beweis. Es sei $\mu_i^2 > 0$. Man untersuche angesichts des Satzes 1 die Wurzeln der Gleichung (11). Die Gleichung (11) schreibt man in der Form

$$(23) \qquad \lambda^2\alpha^2 + \lambda[2(1 - \alpha)\alpha + \mu_i^2\beta] + (1 - \alpha)^2 - \mu_i^2(1 + \beta) = 0 .$$

Angesichts (9) und (10) gilt für die Diskriminante der Gleichung (23) die Beziehung

$$\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\mu_i^2\beta + 4\alpha^2\mu_i^2 = \mu_i^2(\beta - B_1(\mu_i, \alpha))\,(\beta - B_2(\mu_i, \alpha))\,.$$

Hiervon folgt, dass die Gleichung (23) nur reele Wurzeln besitzt, wenn die Ungleichungen

(24) $$\beta \geqq B_1(\mu_i, \alpha)\,, \quad \beta \geqq B_2(\mu_i, \alpha)$$

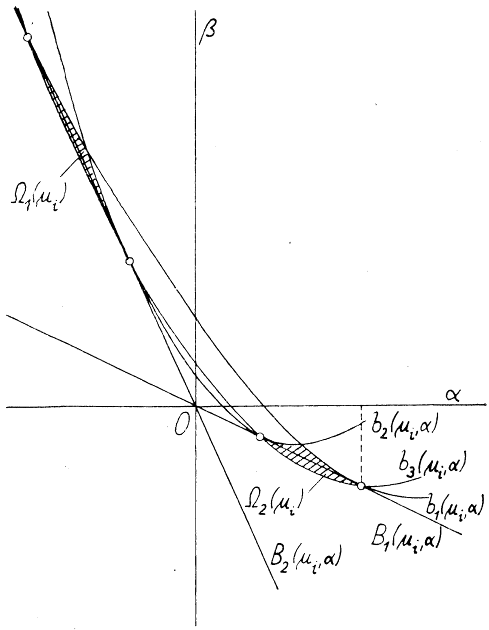

Abb. 1

oder die Ungleichungen

(25) $$\beta \leqq B_1(\mu_i, \alpha)\,, \quad \beta \leqq B_2(\mu_i, \alpha)$$

gleichzeitig gelten.

Die Graphen der Funktionen B_1, B_2 sind durch den Koordinatenursprung gehende Geraden, deren Anstieg negativ ist. Es gilt dabei, dass für $\alpha < 0$, $B_1(\mu_i, \alpha) < B_2(\mu_1, \alpha)$ und für $\alpha > 0$ $B_2(\mu_i, \alpha) < B_1(\mu_i, \alpha)$ ist. Aus (24) und (25) folgt sofort, dass die Gleichung (23) reele Wurzeln dann und nur dann besitzt, wenn

(26) $$\alpha < 0 \quad \text{und} \quad \beta \geqq B_2(\mu_i, \alpha) \quad \text{oder} \quad \beta \leqq B_1(\mu_i, \alpha)$$

gilt und wenn

(27) $$\alpha > 0 \quad \text{und} \quad \beta \leqq B_2(\mu_i, \alpha) \quad \text{oder} \quad \beta \geqq B_1(\mu_i, \alpha)$$

gilt. In den übrigen Punkten der Ebene $[\alpha, \beta]$ (ausser den Achsen $\alpha = 0$, $\beta = 0$) hat die Gleichung (11) zwei komplex adjungierte Wurzeln.

Nun werden wir uns mit der Frage befassen, für welche Punkte $[\alpha, \beta]$ aus den Mengen (26) und (27) der Absolutbetrag der reelen Wurzeln der Gleichung (23) kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist, d. h. wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$(28) \qquad [-2(1 - \alpha)\alpha - \mu_i^2\beta \pm \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}]/2\alpha^2 \leqq \\ \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}],$$

$$(29) \qquad -[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \\ \leqq [-2(1 - \alpha)\alpha - \mu_i^2\beta \pm \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha\mu_i^2)}]/2\alpha^2$$

gelten. Durch die Umformung der Ungleichung (28) bekommt man die Ungleichung

$$(30) \qquad \pm M^2 \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)} \leqq \\ \leqq 2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} + \mu_i^2 M^2\beta .$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nichtnegativ sein muss, folgt aus der Ungleichung

$$2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} + \mu_i^2 M^2\beta \geqq 0$$

die Ungleichung

$$(31) \qquad \beta \geqq [4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2 .$$

Durch Potenzierung der Ungleichung (33) bekommt man nach Umformung angesichts (6) die Gleichung

$$(32) \qquad \beta \leqq b_1(\mu_i, \alpha) .$$

Ähnlicherweise bekommt man aus der Ungleichung (29) die Ungleichung

$$(33) \qquad 2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] + \mu_i^2 M^2\beta \leqq \\ \leqq \pm M^2 \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)} .$$

Aus der Bedingung

$$2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] + \mu_i^2 M^2\beta \leqq 0$$

folgt sofort, dass

$$(34) \qquad \beta \leqq [4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2$$

gilt, und durch Potenzierung der Ungleichung (33) bekommt man nach Umformung angesichts (7) die Ungleichung

(35) $$\beta \leqq b_2(\mu_i, \alpha) .$$

Es sei nun $\alpha < 0$. Die Gleichung (23) hat nach (26) reele Wurzeln für $\beta \geqq B_2(\mu_i, \alpha)$ und für $\beta \leqq B_1(\mu_i, \alpha)$. Man kann leicht feststellen, dass die Gerade $\beta = B_2(\mu_i, \alpha)$ die Tangente der Parabel $\beta = b_1(\mu_i, \alpha)$ mit dem Berührungspunkt

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/\sqrt{(1 - M^2)}$$

(das ist der linke Randpunkt des Intervalls (13)) und die Tangente der Parabel $\beta = b_2(\mu_i, \alpha)$ mit dem Berührungspunkt

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$$

darstellt (das ist der rechte Randpunkt des Intervalls (13); es gilt dabei $B_2(\mu_i, \alpha) \leqq$ $\leqq b_1(\mu_i, \alpha)$ und $B_2(\mu_i, \alpha) \leqq b_2(\mu_i, \alpha)$ für alle α. Angesichts (31) und der Ungleichung

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2 > B_1(\mu_i, \alpha) ,$$

die für alle $\alpha < 0$ gilt, muss $\beta > B_1(\mu_i, \alpha)$ gelten. Angesichts (26) kommen nur die Werte

(36) $$\beta \geqq B_2(\mu_i, \alpha)$$

in Betracht.

Man kann leicht beweisen, dass für $\alpha < -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$: : $\sqrt{(1 - M^2)}$ die Ungleichungen

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2 > B_2(\mu_i, \alpha) > b_1(\mu_1, \alpha)$$

und für $\alpha \geqq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/(1 - M^2)$ die Ungleichungen

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2 \leqq B_2(\mu_i, \alpha) \leqq b_1(\mu_i, \alpha)$$

gelten (die Gleichheit tritt nur im Falle $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$: : $\sqrt{(1 - M^2)}$ ein).

Die Ungleichungen (31), (32) und (36) gelten also gleichzeitig nur für $\alpha \geqq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/\sqrt{(1 - M^2)}$. Für diese Zahlen α ist dann

(37) $$B_2(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_1(\mu_i, \alpha) .$$

Analogisch kann man beweisen, dass die Ungleichungen (34), (35) und (36) gleichzeitig nur für $\alpha \leqq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$ gelten. Für diese α ist dann

(38) $$B_2(\mu_i, \alpha) \leqq \beta \leqq b_2(\mu_i, \alpha) .$$

Für die Zahl α gilt also (13).

Dadurch ist bewiesen, dass die Gleichung (23) nun für α aus dem Interval (13) reele Wurzeln besitzt, die im Absolutbetrag kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind, wobei für β gleichzeitig (37) und (38) gilt.

Es ist nun leicht festzustellen, dass sich die Parabeln $b_1(\mu_i, \alpha)$, $b_2(\mu_i, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt[4]{(1 - M^2)}$, der zu dem Intervall (13) angehört, schneiden (vgl. (14) und (16)), wobei für α aus dem Intervall (14) $b_1(\mu_i, \alpha) \leqq$ $\leqq b_2(\mu_i, \alpha)$ und für α aus dem Intervall (16) $b_2(\mu_i, \alpha) \leqq b_1(\mu_i, \alpha)$ gilt. Es gilt also für α aus dem Intervall (15) die Ungleichung (37) und für α aus dem Intervall (16) die Ungleichung (38).

Man befasse sich ferner mit der Frage, für welche Parameterwerte α, β die Quadrate der Absolutbeträge der komplexen Wurzeln der Gleichung (13) kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind. Aus (23) folgt also die Bedingung

$$(39) \qquad [(1 - \alpha)^2 - \mu_i^2(1 + \beta)]/\alpha^2 \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]^2 \, [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]^2 \, .$$

Aus (39) folgt sofort angesichts (8) die Ungleichung

$$(40) \qquad \beta \geqq b_3(\mu_i, \alpha) \, .$$

Der Graph der Funktion b_3 ist eine Parabel, die die Gerade $\beta = B_2(\mu_i, \alpha)$ in den Randpunkten des Intervalls (13) schneidet, wobei für alle α aus dem Intervall (13) die Ungleichungen

$$B_1(\mu_i, \alpha) < b_3(\mu_i, \alpha) \leqq B_2(\mu_i, \alpha)$$

gelten.

Für $\alpha > 0$ verläuft der Beweis ganz analogisch. Dadurch ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mu_i = 0$. *Dann ist* $[\alpha, \beta] \in \Omega(\mu_i)$ *dann und nur dann, wenn*

$$(41) \qquad \tfrac{1}{2}\,[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]/\sqrt{(1 - M^2)} \, ,$$

$\beta \neq 0$ *beliebig, gilt.*

Beweis. Falls man in der Gleichung (11) $\mu_i = 0$ setzt, bekommt man sofort die Beziehung $(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = 0$, sodass $\lambda = (\alpha - 1)/\alpha$ die zweifache reele Wurzel der Gleichung (11) (d. h. (23)) ist. Man kann leicht beweisen, dass die Ungleichung

$$-[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \lambda \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

für (41) erfüllt ist, wodurch der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Es sei* $\mu_i^2 > 0$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$ *und es sei* Ω *die Menge der Punkte* $[\alpha, \beta]$, *für die* $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ *gilt. Dann gilt:*

a) $[\alpha, \beta] \in \Omega$ *dann und nur dann, wenn die Ungleichungen*

$$(42) \qquad b_3(m, \alpha) \leqq \beta \, , \quad \beta \leqq b_1(M, \alpha) \, , \quad \beta \leqq b_2(M, \alpha)$$

gleichzeitig gelten.

b) *Die Menge Ω ist die Vereinigung zweier disjunkten Bereiche Ω_1, Ω_2, wobei für $[\alpha, \beta] \in \Omega_1$ $\alpha < 0$ und für $[\alpha, \beta] \in \Omega_2$, $\alpha > 0$ ist.*

c) $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ *dann und nur dann, wenn $[\alpha, \beta]$ ein Grenzpunkt der Menge Ω ist.*

d) *Man bezeichne*

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\sqrt{(1 - M^2)}} \, . \tag{43}$$

$$. \frac{-(M^2 - m^2) + [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\,[m^2 - (1 - \sqrt{(1 - M^2)})]}{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]} \, ,$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2} \, , \tag{44}$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}\}} \, . \tag{45}$$

$$. \{-(M^2 - m^2) - [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{[(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 -}$$

$$\overline{- m^4 + 2m^2\sqrt{(1 - M^2)}\,(1 - \sqrt{(1 - M^2)})]}\} \, ,$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}\}} \, . \tag{46}$$

$$. \{-(M^2 - m^2) + [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{[(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 -}$$

$$\overline{- m^4 + 2m^2\sqrt{(1 - M^2)}\,(1 - \sqrt{(1 - M^2)})]}\} \, .$$

Die Mengen Ω_1 und Ω_2 sind dann folgenderweise definiert:

I. *Es sei $m^2 \leqq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und $\Omega_2 = \{[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -1]\}$.*

II. *Es sei $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 < 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})\,(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}) : [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und Ω_2 ist die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die*

$$\alpha_2^{(2)} \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)} \tag{47}$$

und

$$b_3(m, \alpha) \leqq \beta \leqq b_1(M, \alpha) \tag{48}$$

gilt.

III. *Es sei $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})\,(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und Ω_2 ist die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die*

(49) $$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)}$$

und (48) *gilt.* (*Die Zahl* $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)}$ *gleicht dabei für die betrachtete Zahl* m^2 *der Zahl* $\alpha_2^{(2)}$.)

IV. *Es sei*

$$\frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} < m^2 <$$
$$< \frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}}.$$

Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ *und* Ω_2 *ist durch die Ungleichungen*

(50) $$a \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)}$$

definiert, wo a jene von der Zahlen $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ *ist, die im Intervall* $(\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \cdot \sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ *liegt, wobei für*

(51) $$a \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

(52) $$b_3(m, \alpha) \leqq \beta \leqq b_2(M, \alpha)$$

gelten und für

(53) $$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)}$$

(48) *gilt.*

V. *Es sei* $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} + {}^4\sqrt{(1 - M^2)^3}]$. *Dann ist* $\Omega_1 = \{[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\,{}^4\sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}[\sqrt{(1 - M^2)}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) + 2\sqrt[4]{(1 - M^2)}]/(1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\}$ *und* Ω_2 *ist durch die Ungleichungen* (50), (51), (52), (53), (48) *definiert.*

VI. *Es sei* $2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}] < m^2 < M^2$. *Dann ist* Ω_1 *durch die Ungleichungen*

(54) $$\alpha_1^{(1)} \leqq \alpha \leqq \alpha_1^{(2)}$$

definiert, wobei für

(55) $$\alpha_1^{(1)} \leqq \alpha \leqq -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

(48) *gilt und für*

(56) $$-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq \alpha_1^{(2)}$$

(52) *gilt.*

Die Menge Ω_2 ist ferner durch die Ungleichungen

$$\alpha_2^{(2)} \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)} \tag{57}$$

definiert, wobei für

$$\alpha_2^{(2)} \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \tag{58}$$

(52) *gilt und für*

$$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \alpha < \alpha_2^{(1)} \tag{59}$$

(48) *gilt.*

VII. *Es sei $m^2 = M^2$. Dann ist Ω_1 durch die Ungleichungen*

$$-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \alpha < -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} \tag{60}$$

definiert, wobei für

$$-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \alpha \leqq -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \tag{61}$$

(48) *ist und für*

(62)

$$-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} = \alpha_1^{(2)}$$

(52) *ist.* (*Die Zahl* $-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, *bzw.* $-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}$ *gleicht dabei der Zahl* $\alpha_1^{(1)}$, *bzw.* $\alpha_1^{(2)}$ *für* $m^2 = M^2$.)

Die Menge Ω_2 ist ferner durch die Ungleichungen

$$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \tag{63}$$

definiert, wobei für

$$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \tag{64}$$

(52) *gilt und für*

$$\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)} \tag{65}$$

(48) *gilt.* (*Die Zahl* $\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}$ *gleicht dabei der Zahl* $\alpha_2^{(2)}$ *für* $m^2 = M^2$.)

Die Gestalt der Menge Ω ist für den fall VI aus der Abb. 2 sichtbar.

Beweis. Aus dem Hilfssatz 1 folgt, dass

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega(\mu_i) = \bigcap_{i=1}^{n} [\Omega(\mu_1) \cup \Omega(\mu_2)] = [\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_1(\mu_i)] \cup [\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_2(\mu_i)] \tag{66}$$

gilt. Es sei $[\alpha, \beta]$ ein beliebiger Punkt, für den $\alpha > \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist. Dann folg aus (18), dass $[\alpha, \beta] \notin \Omega_2(M)$ und umsomehr $[\alpha, \beta] \notin \Omega_1(M)$ ist. Es ist also nach (66) $[\alpha, \beta] \notin \Omega$ für $\alpha > \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$. Im folgenden wir werden also voraussetzen, dass $\alpha \leqq \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist.

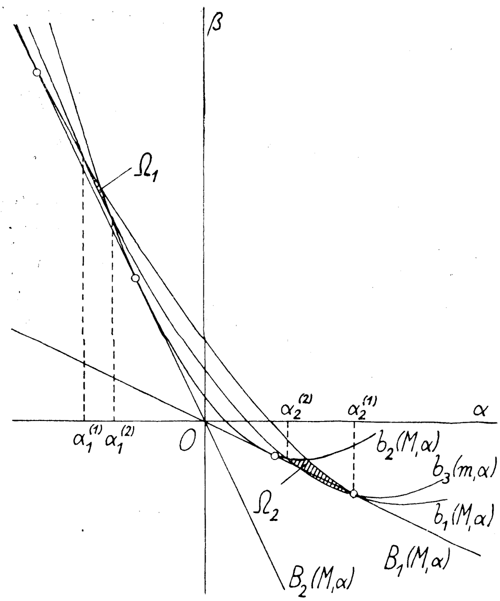

Abb. 2

Für diese Zahlen α kann man leicht beweisen, dass für $\mu_i^2 < \mu_j^2$ die Ungleichungen

$$b_1(\mu_j, \alpha) < b_1(\mu_i, \alpha),$$
$$b_2(\mu_j, \alpha) < b_2(\mu_i, \alpha),$$
$$b_3(\mu_j, \alpha) \leqq b_3(\mu_i, \alpha)$$

gelten, wobei die Gleichheit in der letzten Ungleichung nur für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt.

Mit Hinsicht auf die letzten drei Ungleichungen und die Ungleichungen (12) aus dem Hilfssatz 1 folgt sofort, dass die Menge $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega(\mu_i)$ genau die Punkte $[\alpha, \beta]$ enthält, für die

$$(67) \qquad \beta \leqq b_1(M, \alpha), \quad \beta \leqq b_2(M, \alpha), \quad \beta \geqq b_3(m, \alpha)$$

gilt.

Man untersuche nun den Verlauf der Funktionen $b_1(M, \alpha)$, $b_2(M, \alpha)$. Man weiss aus dem Beweis des Hilfssatzes 1, dass b_1 und b_2 konvexe Parabeln sind. Es sei nun $\alpha < 0$. Die Gerade $\beta = B_2(M, \alpha)$ ist dann die Tangente der Parabel $b_1(M, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und die Tangente der Parabel $b_2(M, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}$, wobei für alle $\alpha < 0$ $B_2(M, \alpha) \leqq \leqq b_1(M, \alpha)$ und $B_2(M, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha)$ gilt. Die Parabeln $b_1(M, \alpha)$ und $b_2(M, \alpha)$ schneiden sich dabei im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)}$ und es gelten dabei die Ungleichungen

$$-\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] < -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} < \\ < -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}\,.$$

Es sei jetzt $\alpha > 0$. Die Gerade $\beta = B_1(M, \alpha)$ ist dann die Tangente der Parabel $b_1(M, \alpha)$ im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und der Parabel $b_2(M, \alpha)$ im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)}$, wobei sich beide Parabeln im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\,{}^4\sqrt{(1 - M^2)}$ schneiden. Es gelten dabei die Ungleichungen $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt{(1 - M^2)} < \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M)^2} < \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und $b_1(M, \alpha) \geqq B_1(M, \alpha)$, $b_2(M, \alpha) \geqq B_1(M, \alpha)$.

Man kann nach einfachen Berechnungen feststellen, dass sich die Graphen der Funktionen $b_1(M, \alpha)$ und $b_3(m, \alpha)$ im allgemeinen in Punkten schneiden, die die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$4\alpha^2 \sqrt{(1 - M^2)}\,[m^2 - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})] + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})(M^2 - m^2) + \\ + (1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2\,[m^2 \sqrt{(1 - M^2)} - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)] = 0$$

darstellen. Das sind aber die durch die Formeln (43) und (44) definierten Zahlen. $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$.

Man kann ferner leicht feststellen, dass sich die Graphen der Funktionen $b_2(M, \alpha)$ und $b_3(m, \alpha)$ im allgemeinen in Punkten schneiden, die die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(68)

$$4\alpha^2[m^2 - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}] + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})(M^2 - m^2) + \\ (1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2\,[m^2(1 - M^2) - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)] = 0$$

darstellen. Das sind aber die durch die Formeln (45) und (46) definierten Zahlen $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$.

Wir werden jetzt verschiedene Fälle unterscheiden.

A. Es sei $m^2 \leqq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann ist $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] < \alpha_1^{(1)}$ und in Hinsicht auf die Konvexität der Funktionen b_1, b_3 gilt für $\alpha \leqq \alpha_2^{(1)}$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) \geqq b_1(M, \alpha)$, wobei die Gleichheit nur für $\alpha = \alpha_2^{(1)}$ eintritt. Angesichts (67) gilt dann die Feststellung I des Satzes 3.

B. Es sei $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 \leqq 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}) : : [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - {}^4\sqrt{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\sqrt[4]{(1 - M^2)} \leqq \leqq \alpha_1^{(1)} < \alpha_2^{(1)}$. Für $\alpha < \alpha_1^{(1)}$ gilt dann in Hinsicht auf die Konvexität der Funktionen b_1, b_3 die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_1(M, \alpha)$, sodass angesichts (67) $\Omega_1 = \Phi$ ist.

In dem Intervalle $\alpha_1^{(1)} \leqq \alpha \leqq \alpha_2^{(1)}$, d. h. (47), gilt dann $b_3(m, \alpha) \leqq b_1(M, \alpha) \leqq \leqq b_2(M, \alpha)$ und aus (67) folgt (48), wodurch die Feststellung II des Satzes 3 bewiesen ist. Der Fall III ist ein Spezialfall dieses Falles. Für $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) . . (1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$ ist nämlich $\alpha_1^{(1)} = = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}\sqrt[4]{(1 - M^2)}]$.

C. Es sei

$$\frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{\sqrt{(1 - M^2)^3}})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} < m^2 <$$

$$< \frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} .$$

Aus der Gleichung (68) kann man nach der Einsetzung für α beweisen, dass eine von ihren Wurzeln $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$ immer im Intervalle $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ liegt (wir haben diese Wurzel mit a bezeichnet) und die andere Wurzel (man bezeichne sie b) im Intervalle $(-\infty, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) . . \sqrt[4]{(1 - M^2)})$ oder im Intervalle $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}, \infty)$ liegt. Falls $b \in \in (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}, \infty)$ ist, gilt dann für alle $\alpha < 0$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > > b_2(M, \alpha)$, sodass nach (67) $\Omega_1 = \Phi$ ist. Falls $b \in (-\infty, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) . . \sqrt[4]{(1 - M^2)})$ ist, dann gilt für $\alpha \in (-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)}, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)})$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_2(M, \alpha)$ und für $\alpha \in (-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_1(M, \alpha)$, da $\alpha_1^{(1)} > -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)}$ ist. In beiden Fällen gilt nach (67) $\Omega_1 = \Phi$.

Falls ferner $\alpha > 0$ ist, gelten offensichtlich für α aus dem Intervalle (50) die Ungleichungen (51), (52), (53) und (48), wodurch die Feststellung IV des Satzes 3 bewiesen ist.

D. Es sei

$$\frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} \leqq m^2 \leqq M^2 .$$

Dann gilt

$$\alpha_1^{(1)} \in \langle -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt[4]{(1 - M^2)} \rangle ,$$

$$\alpha_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) ,$$

$$\alpha_1^{(2)} \in \langle -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt[4]{(1 - M^2)}, -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} \rangle ,$$

$$\alpha_2^{(2)} \in \langle \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)}, \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt[4]{(1 - M^2)} \rangle$$

und es gelten also die folgenden Ungleichungen:

für α aus dem Intervall (55) ist $b_3(m, \alpha) \leqq b_1(M, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha)$,

für α aus dem Intervall (56) ist $b_3(m, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha) \leqq b_1(M, \alpha)$,

für α aus dem Intervall (58) ist $b_3(m, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha) \leqq b_1(M, \alpha)$,

für α aus dem Intervall (59) ist $b_3(m, \alpha) \leqq b_1(M, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha)$.

Daraus folgt angesichts (64) die Festellung VI des Satzes 3. Die Feststellungen V und VII folgen aus dem obigen Beweis als Spezialfälle.

Satz 4. *Es sei* $\mathbf{B}$ *eine singuläre Matrix. Dann nimmt der Spektralradius* $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$ *seinen Minimalwert, der der Zahl* $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + (1 - M^2)]$ *gleich ist, für* $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, $\beta = -1$.

Bemerkung 1. In diesem Falle ist in Hinsicht auf den Satz 2 das Oberrelaxations-Verfahren optimal.

Beweis. In Hinsicht auf die Voraussetzung des Satzes hat die Matrix $\mathbf{B}$ mindestens einen Eingewert, der der Zahl 0 gleich ist. Es sei m eine solche positive Zahl, dass $m^2 = \min \mu_i^2$ für alle positive Eingenwerte der Matrix $\mathbf{B}^2$ ist, und es sei ferner M eine solche positive Zahl, dass $M^2 = \max \mu_i^2$ ist. Die Menge Ω (d. h. die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]$: : $[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt) ist die Durchschnittsmenge der Mengen $\Omega(\mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Es gilt ferner, dass

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega(\mu_i) = [\bigcap_{\mu_i \neq 0}^{n} \Omega(\mu_i)] \cap \Omega(0)$$

ist. Die Memge $\bigcap_{\mu_i \neq 0} \Omega(\mu_i)$ ist nun durch den Satz 3 gegeben und die Menge $\Omega(0)$ ist im Hilfssatze 2 definiert. Es ist klar, dass die Durchschnittsmenge dieser Mengen einen einzigen Punkt $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, $\beta = -1$ (von m unabhängig) enthält. Da dieser Punkt gleichzeitig einen Grenzpunkt der Menge Ω darstellt, gilt $\varrho(\mathbf{T}(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -1)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, wodurch der Satz 4 bewiesen ist.

Satz 5. *Es sei* $\mathbf{B}$ *eine nichtsinguläre Matrix und* $m = M < 1$ (*d. h. alle Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{B}$ *liegen auf der Kreislinie mit dem Mittelpunkte im Koordinatenursprung*). *Dann ist* $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ *für* $[\alpha, \beta] \in \Omega = \Omega_1(M) \cup \Omega_2(M)$. (*Dabei ist* $\Omega_1(M) = \Omega_1$ *und* $\Omega_2(M) = \Omega_2$, *wo die Mengen* Ω_1, Ω_2 *durch die Ungleichungen* (60), (61), (48), (62), (52) *aus dem Satze* 3 *definiert sind.*) *Man definierte nun die Punkte* $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$ *folgenderweise*:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sqrt{(1 - M^2)}\,, & \beta_1 &= 2\sqrt{(1 - M^2)}/[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]\,, \\ \alpha_2 &= \sqrt{(1 - M^2)}\,, & \beta_2 &= -2\sqrt{(1 - M^2)}/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]\,. \end{aligned}$$

Dann ist $[\alpha_1, \beta_1] \in \Omega_1(M)$, $[\alpha_2, \beta_2] \in \Omega_2(M)$ *und*

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_1, \beta_1)) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_2, \beta_2)) = 0\,.$$

Beweis. Die Bereiche $\Omega_1(M)$, $\Omega_2(M)$ stimmen mit den Bereichen Ω_1, Ω_2 aus dem Satz 3 für $m = M$ (der Fall VII) überein. Wir beweisen, dass der Punkt $[\alpha_1, \beta_1]$ im Bereich Ω_1 liegt. Die Zahl α_1 liegt offensichtlich im Intervall (60) und der Punkt $[\alpha_1, \beta_1]$ liegt auf der Geraden $\beta = B_2(M, \alpha)$. Da nach dem Hilfssatz 1 $B_2(M, \alpha) \leqq \leqq b_1(M, \alpha)$, $B_2(M, \alpha) \leqq b_2(M, \alpha)$ und $b_3(M, \alpha) \leqq B_2(M, \alpha)$ im Intervall (60) gilt, ist die Feststellung bewiesen. Ähnlicherweise beweist man, dass der Punkt $[\alpha_2, \beta_2]$ im Bereiche Ω_2 liegt (der Punkt $[\alpha_2, \beta_2]$ liegt nämlich auf der Geraden $B_1(M, \alpha)$).

Wenn man in der Gleichung (11) $\mu_i^2 = M^2$, $[\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$ setzt, bekommt man die Gleichung

$$\begin{gathered} (1 + \sqrt{(1 - M^2)} - \lambda\sqrt{(1 - M^2)})^2 = \\ = M^2[1 + 2\sqrt{(1 - M^2)}/(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 2\lambda\sqrt{(1 - M^2)}/(1 - \sqrt{(1 - M^2)})] \end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered} (1 + \sqrt{(1 - M^2)} - \lambda\sqrt{(1 - M^2)})^2 = \\ = (1 + \sqrt{(1 - M^2)})\,(1 + \sqrt{(1 - M^2)} - 2\lambda\sqrt{(1 - M^2)})\,, \end{gathered}$$

die eine zweifache Wurzel $\lambda = 0$ besitzt. Eine ähnliche Situation tritt für $[\alpha, \beta] = = [\alpha_2, \beta_2]$ ein. Dadurch ist der Satz 5 bewiesen.

Bemerkung 2. Die Gestalt der Menge Ω aus dem Satz 5 ist aus der Abb. 2 klar (solange allerdings $\mu_i^2 = M^2$ ist).

Die Menge Ω aus dem Satz 3, wo $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}$ gilt, ist durch verhältnismässig komplizierte Ungleichungen definiert, die von der Zahl m abhängen. Deshalb wird im folgenden Satz eine einfacher definierte Menge gesucht, die die Menge Ω enthält.

Satz 6. *Es sei* I_1 *das zweidimensionale Intervall*

$$-\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leqq \alpha \leqq -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}\,,$$

$$(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}/(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \leqq \beta \leqq (1 + \sqrt{(1 - M^2)}) : \\ :(1 - \sqrt{(1 - M^2)})$$

und I_2 das zweidimensionale Intervall

$$\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)} \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \\ -1 \leqq \beta \leqq -\sqrt{(1 - M^2)}.$$

Es sei $\mathbf{B}$ eine nichtsinguläre Matrix und es gelte im Punkte $[\alpha, \beta]$ die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$. Dann ist $[\alpha, \beta] \in I_1 \cup I_2$.

Der Beweis des Satzes 6 folgt sofort aus dem Satz 3.

Literaturverzeichnis

[1] *Varga, R. S.*: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.

[2] *Šisler, M.*: Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Aplikace matematiky, 18, 1973, 325—332.

[3] *Šisler, M.*: Über die Konvergenz eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens. Aplikace matematiky, 18, 1973, 452—461.

Souhrn

O OPTIMALISACI JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci se porovnává rychlost konvergence jisté iterační metody, definované v práci [2] téhož autora, závislé na volitelných reálných parametrech α, β a superrelaxační metody, která je speciálním případem zmíněné dvouparametrické metody. V rovině parametrů $[\alpha, \beta]$ jsou nalezeny oblasti, pro které zkoumaná dvouparametrická metoda konverguje rychleji, než metoda superrelaxační.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.