SVAZEK 20 (1975) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 1

ITERATIONS CHAOTIQUES SERIE-PARALLELE POUR DES EQUATIONS NON-LINEAIRES DE POINT FIXE

F. ROBERT, M. CHARNAY, F. MUSY

(Reçu le 14 novembre 1973)

PLAN:

I. INTRODUCTION: UN EXEMPLE

Soit à résoudre dans R^4 une équation non linéaire de point fixe:

$$x = F(x)$$

qui se détaille en:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ x_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ x_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}$$

Considérons une suite S de parties de $(1, 2, 3, 4)$, par exemple: $(1, 2), (1, 3, 4), (2) \ldots$ Un vecteur de départ

$$x^0 = \left| \begin{matrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \xi_3^0 \\ \xi_4^0 \end{matrix} \right.$$

étant donné, quelconque, dans R^4, envisageons alors, pour résoudre numériquement (1), la construction de la suite suivante de vecteurs de R^4:

$$x^1 = \left| \begin{array}{l} \xi_1^1 = f_1(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0) = f_1(x^0) \\ \xi_2^1 = f_2(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0) = f_2(x^0) \\ \xi_3^1 = \xi_3^0 \\ \xi_4^1 = \xi_4^0 \end{array} \right.$$

puis:

$$x^2 = \left| \begin{array}{l} \xi_1^2 = f_1(x^1) \\ \xi_2^2 = \xi_2^1 \\ \xi_3^2 = f_3(x^1) \\ \xi_4^2 = f_4(x^1) \end{array} \right. ; \qquad x^3 = \left| \begin{array}{l} \xi_1^3 = \xi_1^2 \\ \xi_2^3 = f_2(x^2), \dots . \\ \xi_3^3 = \xi_3^2 \\ \xi_4^3 = \xi_4^2 \end{array} \right.$$

Une telle itération sera appelée *itération chaotique série parallèle* (en abrégé itération CSP), *conduite sur F, attachée à la suite S et partant de* x^0.

Si l'on prend pour suite S la suite:

$$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4), \text{etc} \dots$$

on retrouve évidemment la *méthode des approximations successives* conduite sur F:

$$x^{r+1} = F(x^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots .$$

C'est une itération qui n'est plus chaotique, et qui est entièrement „parallèlə“: 4 unités de calcul, chacune attachée à une composante, peuvent travailler simultanément pour conduire l'itération, en mettant à chaque pas leur résultat respectif dans une unité de mémoire commune.

Si les éléments de la suite S sont des particles de (1, 2, 3, 4) réduites à 1 élément, par exemple:

$$(2), (2), (1), (3), (4,) \dots$$

on obtient une itération chaotique qui est entièrement „série“ en ce sens qu'une seule unité de calcul est à utiliser à chaque pas. Si l'on considère la suite S suivante:

$$(1), (2), (3), (4), (1), (2), (3), (4), \text{etc} \dots$$

on obtient alors la méthode dite de *Gauss-Seidel non linéaire* pour résoudre (1). En regroupant les pas de 4 en 4, cette méthode s'écrit en effet ainsi:

$$\begin{aligned} \eta_1^{r+1} &= f_1(\eta_1^r, \eta_2^r, \eta_3^r, \eta_4^r), \\ \eta_2^{r+1} &= f_2(\eta_1^{r+1}, \eta_2^r, \eta_3^r, \eta_4^r), \\ \eta_3^{r+1} &= f_3(\eta_1^{r+1}, \eta_2^{r+1}, \eta_3^r, \eta_4^r), \\ \eta_4^{r+1} &= f_4(\eta_1^{r+1}, \eta_2^{r+1}, \eta_3^{r+1}, \eta_4^r). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étudier la convergence de tels procédés. Notre principal résultat (Théorème 4) s'énonce alors ainsi, pour l'exemple considéré ci-dessus:

S'il existe une matrice K (4.4) nonnégative et de rayon spectral $\varrho(K) < 1$ telle que:

$$\forall x, y \in R^4, \quad |F(x) - F(y)| \leqq K|x - y|$$

(autrement dit: *si F est contractant par rapport à la norme vectorielle type* sur R^4) alors:

a) F admet dans R^4 un point fixe unique $\xi = F(\xi)$;

b) pour tout vecteur x^0 de départ, et *pour toute suite S activant une infinité de fois chacune des 4 composantes*, l'itération CSP correspondante converge vers ξ.

En particulier, pour la méthode des approximations successives, ou pour la méthode non linéaire de Gauss-Seidel sur F, la condition imposée en b) à S est évidemment vérifiée: d'où la convergence de ces méthodes sous la seule condition de contraction de F (qui assure l'existence et l'unicité du point fixe cherché).

Dans le cas où F est affine sur R^n ($F(x) = Tx + h$, où T est une matrice (n, n) et h un élément de R^n, donnés) nous retrouverons certains résultats de Chazan-Miranker [2] Donnelly [3] et de [13]: dans ce cas la contraction de F par rapport à la norme vectorielle type sur R^n est simplement caractérisée par la condition $\varrho(|T|) < 1$.

On aura donc, dans ce contexte matriciel, le résultat suivant: si $\varrho(|T|) < 1$, l'équation affine de point fixe

$$x = Tx + h$$

admet (quel que soit h) une solution unique, vers laquelle converge toute itération CSP attachée à une suite S activant une infinité de fois chacune des n composantes.

En fait un contexte „naturel" d'analyse pour ces questions est celui d'un opérateur *p-contractant sur un produit d'espaces de Banach muni de la norme vectorielle canonique* (cf. Sec. 2). Ce contexte permet en effet de *traiter dans un même formalisme les méthodes par point et les méthodes par blocs dans R^n*, ainsi que les méthodes „abstraites" correspondantes dans des espaces fonctionnels.

Sous les conditions de convergence établies, on pourra donner (Sec. 5) un procédé algorithmique de contrôle de la convergence d'une itération CSP.

De plus, et toujours sous l'hypothèse de contraction de F, on verra qu'une itération CSP dont la suite S n'activerait pas une infinité de fois chaque composante converge encore, mais seulement vers un „point fixe partiel" de F, qui n'a aucune chance d'être le point fixe cherché: en ce sens, la condition imposée à S, de suffisante, devient aussi nécessaire.

II. CONTEXTE DE BASE: NORME VECTORIELLE CANONIQUE SUR UN PRODUIT D'ESPACES DE BANACH

On se donne, pour toute la suite, et sur le même corps (R ou C), k espaces de Banach X_i, de norme notée $\| \ \|_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Dans la plupart des applications que nous avons en vue, X_i est simplement un R^{λ_i}, muni d'une norme notée alors ϕ_i, ou même R lui-même muni de la valeur absolue.

On considère le produit topologique $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ tout x de X est par définition un k-uple:

$$x = (x_1, \ldots, x_k)$$

où $x_i \in X_i$, ($i = 1, 2, \ldots, k$). On notera W_i le sous-espace de X (fermé pour la topologie produit) des éléments de la forme $(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ avec x_i dans X_i.

Pour des raisons de commodité, on identifiera X_i et W_i, sans inconvénient puisqu'il y a isomorphisme topologique: précisément, tout élément $(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ de W_i, ($x_i \in X_i$) sera encore noté x_i.

Ainsi pour x dans X, on écrira indifféremment, selon le cas:

$$x = (x_1, \ldots, x_k), \quad x_i \in X_i$$

ou:

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad x_i \in W_i$$

avec $x_i = P_i x$, P_i désignant l'opérateur (linéaire, continu) de projection de X dans W_i, ($i = 1, 2, \ldots, k$) de sorte que:

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1 \quad (\text{identité sur } X).$$

Alors, l'application suivante de X dans R^k

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \to p(x) = \left| \begin{array}{l} \|x_1\|_1 \\ \vdots \\ \|x_k\|_k \end{array} \right.$$

est une norme vectorielle régulière de taille k sur X (cf. [12] [14]). p sera appelée la *norme vectorielle canonique sur le produit X.*

p étant de taille finie, la topologie définie par p sur X est équivalente à celle définie par la norme suivante, notée ϕ sur X (ϕ_∞ désigne la norme du max sur R^k):

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \to \phi(x) = \operatorname*{Max}_{i=1}^{k} \|x_i\|_i = [\phi_\infty \circ p](x)$$

C'est donc bien la topologie produit usuelle. Muni de p, X est complet comme produit d'espaces complets.

Exemples de base en dimension finie.

1) La norme vectorielle sur R^n qui, à tout x, fait correspondre

$$p(x) = |x|$$

(vecteur obtenu en remplaçant toutes les composantes de x par leur valeur absolue) est appelée la *norme vectorielle-type* sur R^n.

Cette norme vectorielle est l'instrument adéquat pour l'étude de la convergence des méthodes par point.

2) Décomposons tout vecteur de R^n en k blocs x_i de λ_i composantes $(\sum_1^k \lambda_i = n)$. Munissons chaque R^{λ_i} de la norme ϕ_i, d'où sur R^n ainsi décomposé, la norme vectorielle p suivante:

$$x = \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{matrix} \right. \rightarrow p(x) \left| \begin{matrix} \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ \phi_k(x_k) \end{matrix} \right. .$$

Cette norme vectorielle est l'instrument adéquat pour l'étude de la convergence des méthodes par blocs.

Ces deux exemples, basiques dans ce qui suit, sont évidemment cas particulier de la structure définie ci-dessus.

III. CONTRACTION EN NORME VECTORIELLE

§ 1. Soit F un opérateur sur un produit X d'espaces de Banach X_i, muni de la norme vectorielle canonique p. La définition suivante étend la notion usuelle de contraction[1]).

Définition. *F sera dit p-lipchitzien sur X s'il existe une matrice K nonnégative, (k, k) telle que*

$$\forall x, y \in X\,, \quad p(F(x) - F(y)) \leqq Kp(x - y)$$

l'inégalité étant comprise composante à composante entre vecteurs de R^k.

Une telle matrice K sera alors appelée matrice de Lipchitz de F. Elle n'est évidemment pas unique, toute matrice K' telle que $K' \geqq K$ convient aussi.

F sera dite p-contractant sur X s'il est p-lipchitzien sur X, et admet une matrice de Lipchitz K de rayon spectral $\varrho(K) < 1$.

Une telle matrice K sera alors appelée matrice de contraction de F. Elle n'est évidemment pas unique, toute matrice K' telle que $K' \geqq K$ (d'où $\varrho(K') \geqq \varrho(K)$) mais telle que $\varrho(K')$ reste <1, convient aussi.

---

[1]) La notion d'opérateur contractant „en norme vectorielle" semble remonter á [4]. Pour notre étude, le contexte délimité ci-dessus suffit: c'est celui d'une norme vectorielle *régulière* [12].

R e m a r q u e: tout opérateur p-lipchitzien sur X est évidemment uniformément continu.

Le théorème classique du point fixe s'étend alors sans difficulté:

Théorème 1. *Si F est p-contractant sur X, de matrice de contraction K, F admet dans X un unique point fixe $\xi = F(\xi)$, limite, pour x^0 quelconque dans X, de la suite:*

$$x^{r+1} = F(x^r)$$

[méthode des approximations successives sur F, partant de x^0] et l'on a alors l'estimation suivante en norme vectorielle:

$$p(x^r - \xi) \leqq K^r[I - K]^{-1}\, p(x^1 - x^0)\,.$$

I désignant l'identité, soit dans R^k, soit dans X, $I-F$ est alors une bijection bicontinue sur X et $(I-F)^{-1}$ est p-lipchitzien de matrice de Lipchitz $(I-K)^{-1}$. On a d'ailleurs:

$$\varrho[(I - K)^{-1}] = \frac{1}{1 - \varrho(K)} \geqq 1\,.$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème: la démonstration effective est aisée en étendant la démonstration classique pour le cas de la contraction „scalaire".

Notons, pour toute la suite, $f_i = P_i \circ F$ (on rappelle que P_i est la projection de X dans W_i, $i = 1, 2, \ldots, k$) de sorte que la relation:

$$y = F(x)\,, \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } X$$

s'écrit

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_k)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

La méthode des approximations successives sur F se détaille alors ainsi:

$$A.\,S.\quad \begin{array}{l} x_1^{r+1} = f_1(x_1^r, \ldots, x_k^r)\,, \\ \vdots \\ x_i^{r+1} = f_i(x_1^r, \ldots, x_k^r)\,, \quad x_i^0 \text{ pris quelconque dans } W_i,\ (i = 1, \ldots, k). \\ \vdots \\ x_k^{r+1} = f_k(x_1^r, \ldots, x_k^r)\,, \end{array}$$

§ 2. Le produit de deux opérateurs p-lipchitziens est évidemment un opérateur p-lipchitzien, puisque le produit de deux matrices nonnégatives est encore une matrice nonnégative. Par contre, le produit de deux opérateurs p-contractants n'est pas nécessairement, comme dans le cas scalaire, un opérateur p-contractant: en effet, le produit de deux matrices nonnégatives de rayon spectral <1 est une matrice nonnégative dont le rayon spectral peut *être* supérieur ou égal à 1:

$$K_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad K_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K_2K_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\varrho(K_1) = 0\,; \quad \varrho(K_2) = 0\,; \quad \varrho(K_2K_1) = 1\,.$$

Donnons néanmoins un résultat essentiel dans la suite:

Théorème 2. *Soit X un produit de k-espaces de Banach muni de la norme vectorielle canonique p.*

Soient $H_1, H_2, \ldots, H_r, \ldots$ une suite d'opérateurs p-lipchitziens sur X, de matrices de Lipchitz respectives $M_1, M_2, \ldots, M_r, \ldots$.

S'il existe un réel θ avec $0 \leqq \theta < 1$, et un vecteur $v > 0$ dans R^k (toutes composantes strictement positives) tels que:

$$M_r v \leqq \theta v\,, \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

alors les opérateurs H_r sont p-contractants, de matrices de contraction respectives M_r, et les opérateurs:

$$\Pi_r = H_r \circ \ldots \circ H_1\,, \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

sont p-contractants sur X, de matrices de contraction respectives:

$$M_r M_{r-1} \ldots M_1\,, \quad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

De plus, si tous les opérateurs H_r admettent un même (unique) point fixe ξ dans X, il en est de même des opérateurs Π_r. Alors Π_r converge ponctuellement vers l'opérateur constant π défini par:

$$\forall x \in X\,, \quad \pi(x) = \xi\,.$$

Démonstration. Elle repose sur le corollaire suivant du Théorème de Perron-Frobenius ([7] [14] [17]).

Théorème 3. *Soit M une matrice nonnégative (k, k) de rayon spectral $\varrho(M)$. Si l'on pose, pour tout $u > 0$ dans R^k:*

$$\tau_M(u) = \operatorname*{Max}_i \frac{[Mu]_i}{u_i}$$

on a:

$$\varrho(M) = \operatorname*{Inf}_{u>0} \tau_M(u)$$

[avec d'ailleurs, pour $U = \mathrm{diag}(u)$, et en notant S_∞ la norme de matrice engendrée par la norme du max *sur R^k:*

$$\tau_M(u) = S_\infty(U^{-1}MU)]\,.$$

[L'intérêt de ce résultat est d'être valable que M soit *ou non* irréductible.]

Les inégalités:

$$M_r v \leqq \theta v\,, \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

s'écrivent alors:

$$\tau_{M_r}(v) \leqq \theta\,, \quad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

D'où

$$\varrho(M_r) \leqq \tau_{M_r}(v) \leqq \theta < 1\,.$$

Ainsi les opérateurs H_r sont bien p-contractants, de matrices de contraction respectives M_r. Ils admettent alors chacun un unique point fixe.

Il vient alors, pour $\Delta = \operatorname{diag}(v)$

$$\Delta^{-1}M_r, \ldots, M_1\Delta = \Delta^{-1}M_r\Delta\,\Delta^{-1}M_{r-1}\Delta, \ldots, \Delta^{-1}M_1\Delta$$

d'où

$$S_\infty(\Delta^{-1}M_r, \ldots, M_1\Delta) \leqq S_\infty(\Delta^{-1}M_r\Delta)\,S_\infty(\Delta^{-1}M_{r-1}\Delta), \ldots, S_\infty(\Delta^{-1}M_1\Delta) =$$
$$= \tau_{M_r}(v)\,\tau_{M_{r-1}}(v). \ldots, \tau_{M_1}(v) \leqq \theta^r < 1$$

d'où

$$\varrho(M_r, \ldots, M_1) = \varrho(\Delta^{-1}M_r, \ldots, M_1\Delta) \leqq S_\infty(\Delta^{-1}M_r, \ldots, M_1\Delta) \leqq \theta^r < 1\,.$$

Ainsi, et pour tout r, la matrice $M_r, \ldots, M_1$ est de rayon spectral <1. Π_r étant évidemment p-lipchitzien, de matrice de Lipchitz $M_r, \ldots, M_1$, est donc en fait p-contractant.

Si de plus, tous les H_r admettent le même point fixe unique il est clair qu'il en va de même des Π_r. Considérons alors, pour x quelconque dans X, la quantité $p(\xi - \Pi_r(x))$. Il vient:

$$p(\xi - \Pi_r(x)) = p(\Pi_r(\xi) - \Pi_r(x)) \leqq M_r, \ldots, M_1 p(\xi - x)\,.$$

Notant toujours ϕ_∞ la norme du max sur R^k, il vient:

$$\phi_\infty(p(\xi - \Pi_r(x))) \leqq S_\infty(M_r, \ldots, M_1)\,\phi_\infty(p(\xi - x))\,.$$

C'est-à-dire, pour la norme ϕ définie sur X (cf. Sec. (2)):

$$\phi(\xi - \Pi_r(x)) \leqq S_\infty(M_r, \ldots, M_1)\,\phi(\xi - x)\,.$$

Or

$$S_\infty(M_r, \ldots, M_1) \leqq S_\infty(\Delta)\,S_\infty(\Delta^{-1}M_r, \ldots, M_1\Delta)\,S_\infty(\Delta^{-1}) \leqq S_\infty(\Delta)\,S_\infty(\Delta^{-1})\,\theta^r\,.$$

D'où, puisque $S_\infty(\Delta)\,S_\infty(\Delta^{-1}) = \operatorname{Max} v_i/\operatorname{Min} v_i = C$:

$$\phi(\xi - \Pi_r(x)) \leqq \theta^r C\,\phi(\xi - x)$$

la quantité $C \,.\, \phi(\xi - x)$ étant indépendante de r, il en résulte, puisque θ^r tend vers zéro, que l'on a, pour tout x dans X:

$$\lim_{r\to\infty} \Pi_r(x) = \xi \,.$$

Remarques.

1) On peut en fait prouver la convergence compacte des opérateurs Π_r vers l'opérateur π. Nous n'aurons besoin ici que de la convergence ponctuelle.

2) L'inégalité $S_\infty(M_r, \ldots, M_1) \leqq C\theta^r$ montre que la matrice $M_r, \ldots, M_1$ (de contraction de Π_r) converge vers la matrice nulle, qui est bien la matrice de contraction de l'opérateur constant π, limite de Π_r.

3) On voit bien ce que donne le résultat précédent dans le cas de la contraction „scalaire".

§ 3. Introduisons maintenant la notion, utile pour la suite, de „point fixe partiel" de F.

Soit F un opérateur sur X. Soit I une partie de $\{1, 2, \ldots, k\}$ et J son complémentaire. Soient

$$W_I = \bigoplus_{i\in I} W_i \quad \text{et} \quad W_J = \bigoplus_{j\in J} W_j \,.$$

Alors X est la somme directe topologique de W_I et W_J puisque

$$X = \bigoplus_{r=1}^{k} W_r \,.$$

Soit $x_I = \sum_{i\in I} x_i$, $(x_i \in W_i)$ un élément quelconque, fixé dans W_I.

On définit alors l'opérateur suivant, noté F_{x_I}, de W_J dans lui-même:

$$x_J = \sum_{j\in J} x_j \,, \quad (x_j \in W_j) \to F_{x_I}(x_J) = \sum_{j\in J} P_j\, F(x_I + x_J) \,.$$

Définition. *F_{x_I} est appelé trace de F sur W_J, à x_I fixé.*

Exemple. $k = 4$, $I = \{1, 3\}$, $J = \{2, 4\}$.

Alors pour $x_I = x_1 + x_3$ fixé $(x_1 \in W_1;\ x_3 \in W_3)$ F_{x_I} est défini par:

$$x_J = x_2 + x_4 \to F_{x_I}(x_j) = \left| \begin{matrix} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{matrix} \right. \quad \in W_J \,,$$

$$(x_2 \in W_2;\ x_4 \in W_4) \,.$$

De plus, pour $x_J = \sum x_j$, $(x_j \in W_j)$ dans W_J, on notera $p_J(x_J)$ le vecteur obtenu en supprimant

dans $p(x_J)$ toutes les composantes (qui sont évidemment nulles) d'indice i pris dans I. Il est clair que p_J est la norme vectorielle canonique (de taille $\lambda_J = \text{card}(J)$) sur W_J, considéré comme produit des espaces de Banach X_j où $j \in J$.

Exemple: $k = 4$, $I = \{1, 3\}$, $J = \{2, 4\}$.

Alors pour $x_J = x_2 + x_4$ dans W_J il vient:

$$p(x_J) = \left| \begin{matrix} \|\mathring{x}_2\|_2 \\ \|\mathring{x}_4\|_4 \end{matrix} \right.$$

et

$$p_J(x_J) = \left| \begin{matrix} \|x_4\|_2 \\ \|x_4\|_4 \, . \end{matrix} \right.$$

La proposition suivante n'a pas d'équivalent dans le cas de contraction „scalaire":

Proposition 1. *Si F est p-contractant sur X, de matrice de contraction K, alors pour tout x_I fixé dans W_I, l'opérateur F_{x_I} est p_J-contractant sur W_J, de matrice de contraction $\tilde{K}_J$: $\tilde{K}_J$ est la sousmatrice principale de K, obtenue en supprimant dans K lignes et colonnes d'indices $i \in I$.*

F_{x_I} admet alors dans W_J un unique point fixe η_J (qui dépend évidemment de x_I) et l'on a:

$$F(x_I + \eta_J) = F_{\eta_J}(x_I) + F_{x_I}(\eta_J) = F_{\eta_J}(x_I) + \eta \quad .$$

Démonstration. Soit donc $K = k(_{ij})$ la matrice de contraction de F considérée. Pour $x_I = \sum_{j \in J} x_i$ fixé dans W_I, soient:

$$x_J = \sum_{j \in J} x_J \quad \text{et} \quad y_J = \sum_{j \in J} y_j$$

deux éléments quelconques de W_J, ($x_j \in W_j$; $y_j \in W_j$). On a:

$$p(F(x_I + x_J) - F(x_I + y_J)) \leqq Kp(x_J - y_J)$$

d'où, pour $j \in J$

$$\|f_j(x_I + x_J) - f_j(x_I + y_J)\|_j \leqq \sum_{r \in I} k_{jr}\|x_r - x_r\|_r + \sum_{r \in J} k_{jr}\|x_r - y_r\|_r =$$

$$= \sum_{r \in J} k_{jr}\|x_r - y_r\|_r$$

soit globalement:

$$p_J(F_{x_I}(x_J) - F_{x_I}(y_J)) \leqq \tilde{K}_J p_J(x_J - y_J) \, .$$

Or $\tilde{K}_J$, sous matrice principale de la matrice nonnégative K est telle que $\varrho(\tilde{K}_J) \leqq \varrho(K) < 1$: d'où le résultat: F_{x_I} est p_J-contractant sur W_J, de matrice de contraction $\tilde{K}_J$.

F_{x_J} admet donc un unique point fixe η_J dans W_J, et les relations indiquées résultent alors des définitions.

Exemple. Dans l'exemple indiqué plus haut, il est clair que

$$\begin{vmatrix} \|f_2(x_1x_2x_3x_4) - f_2(x_1y_2x_3y_4)\|_2 \\ \|f_4(x_1x_2x_3x_4) - f_4(x_1y_2x_3y_4)\|_4 \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \|x_2 - y_2\|_2 \\ \|x_4 - y_4\|_4 \end{vmatrix}, \quad \tilde{K}_J = \begin{vmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{vmatrix}.$$

Définition. *Dans le contexte ci-dessus, l'élément $\eta = x_I + \eta_J$ de X sera appelé point fixe partiel de F dans W_J pour x_I fixé dans W_I.*

Exemple. Dans l'exemple précédent, $\eta = x_1 + \eta_2 + x_3 + \eta_4$ avec:

$$F(\eta) = \begin{vmatrix} f_1(x_1, \eta_2, x_3, \eta_4) \\ f_2(x_1, \eta_2, x_3, \eta_4) = \eta_2 \\ f_3(x_1, \eta_2, x_3, \eta_4) \\ f_4(x_1, \eta_2, x_3, \eta_4) = \eta_4 . \end{vmatrix}$$

§ 4. Examinons enfin, pour clore cette section consacrée à la p-contraction, le cas important où F est un opérateur affine sur X : $F(x) = Tx + h$, où $h \in X$ et où T est un opérateur linéaire sur X.

Il est simple de voir que, pour que F soit continu, il faut et il suffit qu'il soit p-lipchitzien, c'est-à-dire encore que T le soit. Or T étant linéaire, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une matrice B, nonnégative (k, k), avec

$$\forall x \in X\,, \quad p(Tx) \leqq Bp(x)\,.$$

Une telle matrice B est appelée *majorante de* T ([12] [14]). Posons $T_{ij} = P_i T P_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$: T_{ij} est une application linéaire de W_j dans W_i, et

$$T = \sum_{ij} T_{ij}\,.$$

Alors, dire que T admet une majorante B, c'est dire que T_{ij} est continu de W_j (normé par $\| \ \|_j$) dans W_i (normé par $\| \ \|_i$), $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. Notant alors $\|T_{ij}\|$ la norme correspondante de T_{ij}, il est facile de voir que la matrice nonnégative (k, k) $M(T) = (\|T_{ij}\|)$ est une majorante de T, et que toute majorante B de T est alors *caractérisée* par l'inégalité:

$$M(T) \leqq B\,.$$

L'application $T = M(T)$ est alors une norme vectorielle régulière de taille k^2 sur l'algèbre $L(X, X)$ des opérateurs linéaires continus sur X.

$$\forall T_1, T_2\,, \quad M(T_1 T_2) \leqq M(T_1)\, M(T_2)\,.$$

De plus, de l'inégalité: $M(T) \leqq B$ entre matrices nonnégatives, résulte la même inégalité sur les rayons spectraux: $\varrho(M(T)) \leqq \varrho(B)$. *Ainsi, si F est p-contractant, $M(T)$ est sa meilleure matrice de contraction.* D'où la:

Proposition 2. *Pour que l'opérateur affine* $F(x) = Tx + h$ [*où* $T \in L(X, X)$: *F est p-lipchitzien de matrice de Lipchitz* $M(T)$] *soit p-contractant, il faut et il suffit que* $\varrho(M(T) < 1$, $M(T)$ *étant alors la meilleure matrice de contraction de F. Alors F admet un unique point fixe* ξ *dans* X, *calculable par la méthode des approximations successives*: $x^{r+1} = F(x^r) = Tx^r + h$ *qui s'explicite ainsi*:

$$x_i^{r+1} = \sum_{j=1}^{k} T_{ij} x_j^r + h_i\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

avec $h = \sum_{i=1}^{k} h_i\,, \quad (h_i \in W_i)$.

De plus, $(I - T)^{-1}$ *existe dans* $L(X, X)$ *et l'on a*: $M[(I - T)^{-1}] \leqq [I - M(T)]^{-1}$. (*I désignant l'identité soit dans* X, *soit dans* R^k).

Le début de la proposition précédente s'établit sans difficulté. Quant au dernier point:

Si $\varrho(M(T)) < 1$, l'opérateur T lui-même est p-contractant. On sait alors que $(I - T)^{-1}$ existe et est p-lipchitzien de matrice de Lipchitz $[I - M(T)]^{-1}$ (cf. Theorème 1.) Or, T étant linéaire, $(I - T)^{-1}$ l'est aussi et ainsi $(I - T)^{-1} \in L(X, X)$. Sa matrice de Lipchitz $[I - M(T)]^{-1}$ est donc une majorante de $(I - T)^{-1}$ d'où par conséquent l'inégalité cherchée:

$$M[(I - T)^{-1}] \leqq [I - M(T)]^{-1}$$

puisque $M[(I - T)^{-1}]$ est la plus petite des majorantes de $(I - T)^{-1}$.

IV. ITÉRATIONS CHAOTIQUES SÉRIE-PARALLÈLE NON LINÉAIRES

§ 1. Soit donc X un produit de k espaces de Banach X_i, muni de la norme vectorielle canonique p, et soit F un opérateur p-contractant sur X, dont ξ désignera l'unique point fixe. On rappelle (Sec. III §1) que la relation $y = F(x)$ se détaille ainsi:

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_k)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

avec

$$y_i \in X_i\,, \; x_j \in X_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Soit alors J une partie non vide de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Définissons l'opérateur F_J sur X par:

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in X \to F_J(x) = (z_1, \ldots, z_k) \in X$$

avec

$$z_i = x_i \quad \text{si} \quad i \notin J\,, \quad z_j = f_j(x_1, \ldots, x_k) \quad \text{pour} \quad j \in J\,.$$

Remarques.

1) On a évidemment: $F = F_{\{1,2,\dots,k\}}$. Pour J vide, il est naturel de poser $F_\phi = I$ (identité sur X).

2) Soit I le complémentaire de la partie J de $\{1, 2, \dots, k\}$ considérée. Alors pour x quelconque dans X:

$$x = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \in J} x_j = x_I + x_J$$

il est clair, avec les notations du § 3 de la Sec. précédente, que:

$$F_J(x) = x_I + F_{x_I}(x_J) .$$

Considérons alors l'algorithme suivant: soit $S = \{J_1, J_2, \dots, J_r, \dots\}$ une suite de parties non vides de $\{1, 2, \dots, k\}$. Partant de x^0 quelconque dans X, considérons la suite suivante dans X, définie par la récurrence:

$$x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r) , \quad (r = 0, 1, 2, \dots) .$$

Définition. *Une telle suite sera appelée itération chaotique série-parallèle (itération CSP) de point fixe sur F, partant de x^0 et définie par la suite $S = \{J_1, J_2, \dots, J_r, \dots\}$ de parties de $\{1, 2, \dots, k\}$.*

La question est de savoir si une telle suite converge vers le point fixe unique ξ cherché de F dans X.

La motivation de cette question est de justifier de telles techniques numériques d'itération. utilisées effectivement. En particulier, dans une itération conduite sur une grille, pour la résolution approchée d'un problème aux limites discrétisé, on peut pratiquer utilement ces méthodes: Au lieu d'activer les itérations en balayant la grille dans un ordre systématique, on ne se prive pas d'itérer plus fréquemment en des noeuds de la grille où la convergence est lente qu'aux noeuds (par exemple voisins de bords du domaine) où la convergence est plus rapide: ceci, bien entendu, dans le but de diminuer le temps de calcul total.

Nous allons voir que ces techniques sont justifiées: précisément, sous la seule condition de p-contraction de F, et à condition que l'itération chaotique considérée „*n'abandonne jamais. définitivement une seule composante*", on prouvera la convergence du procédé vers l'unique point fixe ξ de F.

De plus, la notion de „point fixe partiel" de F, définie en Sec. III, § 3, permettra de voir ce qui se passe si, au contraire, pour F p-contractant, on enclanche une itération CSP qui n'itère qu'un nombre fini de fois sur certaine(s) composante(x): il y aura alors convergence vers un point fixe partiel de F, qui dépendra du vecteur de départ x^0.

§ 2. Il convient d'abord d'étudier les points fixes des opérateurs F_J, où J est une partie non vide de $\{1, 2, \dots, k\}$.

$K = (k_{ij})$ étant une matrice de contraction de F, on notera K_J la matrice nonnégative (k, k) obtenue ainsi:

1) K_J a même $j^{\text{ème}}$ ligne que K pour j pris dans J.

2) pour $i \notin J$, K_J a pour $i^{\text{ème}}$ ligne e_i^t, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de R^k, transposé.

Example. $k = 4$, $J = \{2, 4\}$,

$$K_J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{vmatrix} .$$

Remarques.

1) Pour $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ $K_J = K$ et $\varrho(K_J) = \varrho(K) < 1$;

2) pour J (non vide) et strictement inclus dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ il vient $\varrho K_J = 1$.

En effet, par une permutation des lignes de K_J, et la même permutation sur les colonnes, ce qui laisse le rayon spectral invariant, on se ramène à une matrice de la forme:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]$$

aù B et C sont deux matrices nonnégatives extraites de K, C étant d'ailleurs la matrice (carrée de taille $\lambda = \text{card}(J)$) notée $\tilde{K}_J$ en Sec. III § 3.

D'où $\varrho(K_J) = \text{Max}(1, \varrho(\tilde{K}_J))$. Or on a vu que $\tilde{K}_J$, sous matrice principale extraite de K (nonnégative) vérifie $\varrho(\tilde{K}_J) \leqq \varrho(K) < 1$, d'où:

$$\varrho(K_J) = 1 .$$

Lemme 1. *F_J est p-lipchitzien de matrice de Lipchitz K_J.*

La démonstration est élémentaire. A noter que dans l'inégalité

$$\forall x,\ y \in X,\ p(F_J(x) - F_J(y)) \leqq K_J\, p(x - y)$$

il y a égalité pour toutes les composantes d'indices $i \notin J$.

Lemme 2. *Si J est strictement inclus dans $\{1, 2, \ldots, k\}$, F_J admet une infinité de points fixes dans X, qui sont autant de points fixes partiels de F.*

En effet, soit I le complémentaire (non vide) de J dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ et soient

$$W_I = \bigoplus_{i \in I} W_I , \quad W_J = \bigoplus_{j \in J} W_j .$$

D'où $X = W_I \oplus W_J$ (cf. Sec. III § 3).

Soit alors $x_I = \sum_{i \in I} x_i$, $(x_i \in W_i)$ un élément quelconque de W_I. D'après la Proposition 1, F_{x_I} est p_J-contractant (de matrice de contraction $\tilde{K}_J$) sur W_J: soit η_J son unique point fixe (qui dépend évidemment de x_I) dans W_J. Alors $F_J(x_I + \eta_J) = x_I + F_{x_I}(\eta_J) = x_I + \eta_J$. $x_I + \eta_J$ est donc point fixe de F_J dans X, et il est facile de voir que tout point fixe de F_J est ainsi construit: il en existe donc une infinité, au choix du vecteur x_I. Ces points fixes de F_J sont donc points fixes partiels de F. ●

Remarque. *En particulier, l'unique point fixe ξ de F est évidemment point fixe de F_J, où J est une partie quelconque de $\{1, 2, \ldots, k\}$.*

§ 3. Nous sommes alors en mesure d'étudier la convergence d'une itération CSP. L'élaboration des résultats suivants est due à M. Charnay et F. Musy.

Lemme 3. *Soit $J_1, \ldots, J_r$ une séquence de parties non vides de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Posons:*

$$G_r = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_1}$$

Alors G_r est p-lipchitzien, de matrice de Lipchitz:

$$L_r = K_{J_r}, \ldots, K_{J_1}$$

La démonstration est évidente par composition d'opérateurs p-lipchitziens.

Lemme 4. *Soit $J_1, \ldots, J_r$ une séquence de parties non vides de $\{1, 2, \ldots, k\}$ d'où G_r et L_r définis ci-dessus. Alors pour tout indice i pris dans $\{1, 2, \ldots, k\}$* et *n'appartenant à aucune des parties $J_1, \ldots, J_r$ considérées, la $i^{\text{ème}}$ ligne de L_r est encore*

$$[0 \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} \ldots 0] = e_i^t .$$

A cause de la forme des matrices K_{J_s}, $(s \in \{1, 2, \ldots, r\})$, la démonstration se fait par récurrence de façon élémentaire.

Ainsi se trouve formalisé le fait que lorsqu'on active un opérateur F_J, seules sont modifiées les composantes prises dans J.

Voici maintenant un résultat important dans cette étude:

Lemme 5. *Il existe un vecteur v, positif dans R^k (toutes composantes strictement positives), qui ne dépend que de la matrice K de contraction de F, tel que: $\tau_K(v) < 1$ et vérifiant la propriété suivante: G_r et L_r étant définis comme ci-dessus, on a, pour tout indice i pris dans $J_1 \cup \ldots \cup J_r$:*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_r]_{ij} v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v) .$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après le Théorème 3, il existe, puisque K est une matrice nonnégative de rayon spectral $\varrho(K) < 1$, un vecteur $v > 0$ dans R^k tel que:

$$\varrho(K) \leqq \tau_K(v) < 1 .$$

Ce vecteur, qui ne dépend que de K, sera utilisé dans toute la suite. Démontrons alors par récurrence la propriété annoncée:

pour $r = 1$, $G_1 = F_{J_1}$ d'où $L_1 = K_{J_1}$.

Alors, pour i pris dans J_1, il vient, par définition de K_{J_1}:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[K_{J_1}]_{ij}\, v_j}{v_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{k_{ij} v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v) .$$

Soit alors $G_{r-1} = F_{J_{r-1}} \circ \ldots \circ F_{J_1}$, de matrice de Lipchitz:

$$L_{r-1} = K_{J_{r-1}}, \ldots, K_{J_1} .$$

Supposons, par hypothèse de récurrence, que pour tout i pris dans $J_1 \cup J_2, \ldots \ldots \cup J_{r-1}$, on ait:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{ij}\, v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v)$$

et montrons que, pour tout i pris dans $J_1 \cup \ldots \cup J_r$ on a aussi:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_r]_{ij}\, v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v) ;$$

a) *soit d'abord* $i \in J_1 \cup \ldots \cup J_{r-1}$ *avec* $i \notin J_r$; puisque $j \notin J_r$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de K_{J_r} est donc $[0 \ldots \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1} \ldots 0] = e_i^t$ (par définition de K_{J_r}). Et puisque:

$$L_r = K_{J_r} L_{r-1}$$

il est clair qu'alors L_r et L_{r-1} ont même $i^{ème}$ ligne, d'où:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_r]_{ij}\, v_j}{v_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{ij}\, v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v) .$$

b) Si $i \in J_r$ il vient, en notant toujours k_{ij} les éléments de K:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_r]_{ij}\, v_j}{v_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{[K_{J_r} L_{r-1}]_{ij}\, v_j}{v_i} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{k_{is} [L_{r-1}]_{sj}\, v_j}{v_i} = \sum_{s=1}^{k} k_{is} \sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{sj}\, v_j}{v_i}$$

qui se décompose en:

$$\sum_{s \in J_1 \cup \ldots \cup J_{r-1}} k_{is} \sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{sj} v_j}{v_i} + \sum_{s \notin J_1 \cup \ldots \cup J_{r-1}} k_{is} \sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{sj} v_j}{v_i}$$

or:

dans le premier terme de cette somme, et puisque $s \in J_1 \cup \ldots \cup J_{r-1}$, la quantité

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_{r-1}]_{sj} v_j}{v_i}$$

est majorée, d'après l'hypothèse de récurrence, par $\tau_k(v)\,(v_s/v_i)$, quantité elle-même majorée par v_s/v_i puisque $\tau_k(v) < 1$.

Dans le second terme de cetie somme, et puisque $s \notin J_1 \cup \ldots \cup J_{r-1}$, la quantité $[L_{r-1}]_{sj}$ est nulle pour $j \neq s$ et vaut 1 pour $j = s$ (Lemme 4).

La somme considérée est donc majorée au total par:

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{k_{is} v_s}{v_i}$$

quantité elle-même majorée, par définition, par $\tau_K(v)$.

Ceci achève la démonstration, valable que $J_1, \ldots, J_r$ soient *ou non* deux à deux disjointes. ●

Le lemme précédent a pour but d'établir alors la:

Proposition 3. *Soit $J_1, J_2, \ldots, J_r$ une séquence de parties non vides de $\{1, 2, \ldots, k\}$ telles que $J_1 \cup J_2, \ldots \cup J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.*
Soit $G_r = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_1}$, de matrice de Lipchitz

$$L_r = K_{J_r}, \ldots, K_{J_1} .$$

Alors: $\tau_{L_r}(v) \leqq \tau_K(v) < 1$, $\varrho(L_r) \leqq \varrho(K) < 1$ *et G_r est p-contractant sur X. Son unique point fixe est celui. noté ξ, de F.*

En effet, il vient, d'après le lemme précédent, et *pour tout i dans* $\{1, 2, \ldots, k\}$:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{[L_r]_{ij} v_j}{v_i} \leqq \tau_K(v) < 1$$

d'où, par définition de $\tau_{L_r}(v)$:

$$\tau_{L_r}(v) \leqq \tau_K(v) < 1 .$$

D'où d'ailleurs $\varrho(L_r) < 1$. Mais, de façon plus précise:

$$\inf_{\substack{v>0 \\ \tau_K(v)<1}} \tau_{L_r}(v) \leqq \inf_{\substack{v>0 \\ \tau_K(v)<1}} \tau_K(v) = \inf_{v>0} \tau_K(v) = \varrho(K) < 1 .$$

D'où

$$\varrho(L_r) = \inf_{v<0} \tau_{L_r}(v) \leqq \inf_{\substack{v>0 \\ \tau_K(v)<1}} \tau_{L_r}(v) \leqq \varrho(K) < 1 .$$

Cette proposition montre donc qu'*en composant les opérateurs* $F_{J_1}, F_{J_2}, \ldots, F_{J_r}$, *on finit par construire, dès que tous les indices* $1, 2, \ldots, k$ *ont été utilisés chacun au moins une fois, un opérateur* G_r *p-contractant sur* X. G_r admet alors un unique point fixe. Or, il a été noté que l'unique point fixe ξ de F est point fixe de tous les opérateurs F_J, donc de $F_{J_1}, F_{J_2}, \ldots, F_{J_r}$ et par conséquent de G_r.

ξ est donc l'unique point fixe de G_r.

On note l'importance du Théorème 3 dans toute cette étude; il reste à introduire la notion suivante:

Définition. *Soit* $S = \{J_1, J_2, \ldots, J_r, \ldots\}$ *une suite de parties non vides de* $\{1, 2, \ldots \ldots, k\}$. *On appellera résiduel* $R(S)$ *de cette suite la partie de* $\{1, 2. \ldots, k\}$ *ainsi définie*:

$$R(S) = \{r \in \{1, 2, \ldots, k\}\,, \quad \forall n \in N\ \exists m \geqq n : r \in J_m\}\,.$$

Le résiduel de la suite de parties $J_1, J_2, \ldots, J_r, \ldots$ est donc l'ensemble des indices pris „une infinité de fois" dans l'itération CSP correspondante.

Exemple. $k = 4$. Soit S définie par:

(1, 2), (1, 3, 4), (2), (2, 3), (2, 4), (2, 3), (2, 4) etc....
Alors $R(S) = (2, 3, 4)$.

Nous sommes alors en mesure d'établir le résultat principal de cette étude:

Théorème 4. *Soit* X *un produit de* k *espaces de Banach* X_i, *muni de la norme vectorielle canonique* p. *Soit* F *un opérateur p-contractant sur* X, *dont* ξ *désigne l'unique point fixe dans* X.

Soit $S = \{J_1, J_2, \ldots, J_r, \ldots\}$ *une suite de parties non vides de* $\{1, 2, \ldots, k\}$ *telle que* S *soit de résiduel maximal*:

$$(H)\ R(S) = \{1, 2, \ldots, k\}\,.$$

Alors l'itération CSP sur F

$$x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r)$$

partant de x^0 *quelconque dans* X *et définie par* S *converge vers* ξ.

Démonstration. On va regrouper les parties J_i, de façon à constituer des opérateurs p-contractants: d'après l'hypothèse (H), il existe un plus petit entier r_1 tel que l'union de $J_1, J_2, \ldots, J_{r_1}$ redonne tout $\{1, 2, \ldots, k\}$. Alors d'après la Proposition 3, l'opérateur

$$H_1 = F_{J_{r_1}} \circ \ldots \circ F_{J_1}$$

est p-contractant sur X où il admet ξ pour unique point fixe.

Toujours à cause de l'hypothèse H, on peut réitérer le procédé et construire ainsi une suite d'opérateurs H_s $(s = 1, 2, \ldots)$, tous p-contractants et de même point fixe unique ξ (celui de F) dans X. On notera

$$H_s = F_{J_{r_s}} \circ \ldots \circ F_{J_{r_{s-1}+1}}$$

opérateur admettant (cf Proposition 3) la matrice de contraction

$$M_s = K_{J_{r_s}}, \ldots, K_{J_{r_{s-1}+1}}$$

Soit alors (y^s) la sous-suite de la suite x^r dans X définie par:

$$y^0 = x^0\,, \quad y^{s+1} = H_{s+1}(y^s)\,, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Alors, d'après la Proposition 3, on sait que, pour un vecteur $v > 0$ de R^k vérifiant: $\tau_K(v) < 1$ (et il en existe, puisque, K désignant une matrice de contraction de F, on a $\varrho(K) < 1$),

Il vient, pour tout s: $\tau_{M_s}(v) \leqq \tau_K(v) < 1$.

Posant $\Theta = \tau_K(v)$ on a donc, pour tout s: $M_s v \leqq \Theta v$, $(0 \leqq \Theta < 1)$.

La suite des opérateurs H_s vérifie donc toutes les hypothèses du Théorème 2. On en déduit que, quel que soit x^0, la suite des y^s converge vers ξ car on a:

$$\phi(\xi - y^s) \leqq \Theta^s C\, \phi(\xi - x^0)$$

où $C = \operatorname{Max} v_i / \operatorname{Min} v_i$ est une constante.

On a donc montré que la suite $x^0, \ldots, x^r, \ldots$ admet une sous-suite convergeant vers ξ.

Monstrons alors que la suite elle-même converge vers ξ. Pour tout élément x^r de cette suite, soit $y^s = x^{r-q}$ *le dernier élément de la suite des y^i considérée, calculé avant x^r.*

Il vient:

$$x^r = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_{r-q+1}}(x^{r-q}) = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_{r-q+1}}(y^s)$$

et

$$y = H_s(y^{s-1})$$

d'où:

$$x^r = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_{r-q+1}} \circ H_s(y^{s-1})\,.$$

Posant $E = F_{J_r} \circ \ldots \circ F_{J_{r-q+1}} \circ H_s$, on a donc: $x^r = E(y^{s-1})$ E est p-lipchitzien, de matrice de Lipchitz:

$$L = K_{J_r} \ldots K_{J_{r-q+1}} M_s\,.$$

Or, en passant de y^{s-1} à x^r dans l'itération CSP, toutes les composantes ont été „atteintes“ puisque c'est déjà vrai par définition dans le passage de y^{s-1} à y^s. Par conséquent (Proposition 3) $\varrho(L) < 1$: E est p-contractant avec d'ailleurs, pour $v > 0$ dans R^k tel que $\tau_K(v) = \Theta < 1$: $\tau_L(v) \leqq \tau_K(v) = \Theta < 1$.

On a alors:

$$p(x^r - \xi) = p(E(y^{s-l}) - E(\xi)) \leqq Lp(y^{s-l} - \xi)\,.$$

D'où, par la même technique qu'au Théorème 2, en posant $\Delta = \text{diag}(v)$:

$$\phi_\infty(p(x^r - \xi)) \leqq S_\infty(\Delta)\, S^\infty(\Delta^{-1})\, S_\infty(\Delta^{-1}L\Delta)\, \phi_\infty(p(y^{s-1} - \xi))$$

soit encore:

$$\phi(x^r - \xi) \leqq C \,.\, \tau_L(v)\, \phi(y^{s-1} - \xi) \leqq C \,.\, \Theta\, \phi(y^{s-1} - \xi)\,.$$

Or, d'après ce qui précède: $\phi(y^{s-1} - \xi) \leqq C\Theta^{s-1}\, \phi(\xi - x^0)$ d'où finalement:

$$\phi(x^r - \xi) \leqq C^2\Theta^s\, \phi(\xi - x^0)\,.$$

Or par construction, s tend vers l'infini lorsque r tend vers l'infini, *et ceci, grace à l'hypothèse* (H). Or $C^2\phi(\xi - x^\circ)$ est indépendant de r : d'où, puisque $0 \leqq \Theta < 1$, la convergence de x_r (dans la topologie produit considérée sur X) vers le point fixe unique ξ de F, ce qui achève la démonstration. ●

§ 4. Cas d'un résiduel non maximal.

Nous allons voir ce qui se passe dans une itération chaotique, définie par une suite S dont le résiduel n'est pas maximal, c'est-à-dire pour laquelle l'hypothèse (H) n'est pas vérifiée. Nous allons prouver que *la suite construite converge encore* vers une limite dans X, mais que cette limite n'est plus qu' *un point fixe partiel* de F, qui n'a aucune change d'être le point fixe cherché.

Théorème 5. *Soit X un produit de k espaces de Banach X_i, muni de la norme vectorielle cacnonique p. Soit F un opérateur p-contractat sur X, dont ξ désigne l'unique point fixe dans X.*

Soit $S = \{J_1, \ldots, J_r, \ldots\}$ une suite de parties non vides de $\{1, 2, \ldots, k\}$, de résiduel strictement inclus dans $(1, 2, \ldots, k\}$.

Alors l'itération CSP sur F: $x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r)$, partant de x^0 quelconque dans X, converge vers un point fixe partiel de F qui dépend de x^0. Précisément:

J étant le résiduel de la suite S considérée, et I son complémentaire dans $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, k\}$ soit: $x_r = x_I^r + x_J^r$ la décomposition (unique) de x^r dans la somme directe $W_I + W_J$ de X. Alors:

a) x_I^r converge en un nombre fini de pas vers une limite notée x_I:

$$\exists r_0 : \forall r \geqq r_0\,, \quad x_I^r = x_I\,;$$

b) x_J^r converge, lorque r tend vers l'infini, vers l'unique point fixe η_J (qui dépend évidemment de x_I, donc de x^0) de l'opérateur F_{x_I} sur W_J;

c) il en résulte que x^r converge, lorque r tend vers l'infini, vers le point fixe partiel suivant de F $x = x_I + \eta_J$ avec alors $F(x) = F(x_I + \eta_J) = F_{\eta_J}(x_I) + F_{x_I}(\eta_J) =$ $= F_{\eta_J}(x_I) + \eta_J$.

Démonstration.

α) Le résiduel de S (noté ici par commodité J) étant strictement inclus dans $\{1, 2, \ldots, k\}$, son complémentaire I n'est pas vide.
Il est clair qu'alors, dans l'itération CSP considérée, toute composante d'indice i pris dans I ne sera activée (i.e. modifiée) qu'un nombre fini de fois. Autrement dit, au bout d'un nombre fini de pas de l'itération, toutes les composantes x_i^r pour i dans I ne seront jamais modifiées dans la suite du calcul. Posant alors $x_I^r = \sum_{i \in I} x_i^r$ il est clair que le point a) est acquis.

β) le rang r_0 étant atteint où x_I^r est définitivement stabilisé en x_I, considérons la suite suivante dans W_J:

$$x_J^r = \sum_{i \in J} x_J^r\,, \quad (r \geqq r_0)\,.$$

Il est clair que, pour tout $r \geqq r_0$, la décomposition (unique) de x^r dans la somme directe $W_I \oplus W_J$ s'écrit alors: $x^r = x_I + x_J^r$.
Considérons alors la trace F_{x_I} de F sur W_J, x_I étant ainsi fixé (cf. Sec. III, § 3).
Par définition, il vient que, pour $r > r_0$:

1) la suite x_J^r est une itération chaotique série-parallèle sur F_{x_I} partant de $x_J^{r_0}$, et définie par la suite:

$$S_J = \{J_{r_0+1} \cap J\,,\ J_{r_0+2} \cap J, \ldots)$$

de parties non vides de J.[1])
2) *Dans J, le résiduel de S_J est par construction J lui-même.* Autrement dit, l'itétation CSP considérée sur F_{x_I} est *de résiduel maximal*: elle verifie l'hypothèse (H) du Théorème 4 précédent.
De plus F_{x_I} est p_J contractant sur W_J (cf. Proposition 1): F_{x_I} admet donc un unique point fixe dans W_J noté η_J (qui dépend évidemment de x_I, donc de x^0).
Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 4 sont vérifiées pour l'itération CSP considérée sur F_{x_I}: on conclut à la convergence de x_J^r vers l'unique point fixe η_J de F_{x_I} dans W_J: c'est le point b).
Il en résulte évidemment que x^r lui-même converge vers $x_I + \eta_J$, *point fixe partiel de F dans W_J* (cf. Section III, § 3); les relations indiquées sont celles de la Proposition 1, ce qui achève la démonstration.

Remarques.

1) Le point fixe partiel de F $x = x_I + \eta_J$ ainsi construit ne sera le point fixe ξ (unique) de F que si, par extraordinaire, les composantes x_i de x_I pour i dans I étaient celles de ξ, ce qui n'a, dans un exemple réel, aucune change de se produire.

2) On renvoie, pour une illustration numérique des Théorèmes 4 et 5 précédents, à la Section 10.

---

[1]) Avec, d'ailleurs, pour $r > r_0$: $J_r \cap J = J_r$ puisque $J_r \subset J$.

V. CONTROLE DE LA CONVERGENCE D'UNE ITÉRATION CSP

Replaçons nous dans le contexte du Théorème 4, d'une itération CSP pour laquelle, l'opérateur F considéré étant p-contractant, et la suite S de résiduel maximal, on peut conclure à la convergence vers l'unique point fixe ξ de F.

Indiquons alors un procédé algorithmique de contrôle de l'approximation obtenue sur la solution: nous allons donner, pour tout q suffisamment grand, une majoration de $p(\xi - x^q)$ par un vecteur z_q que nous saurons calculer, et qui tendra vers 0 lorsque q tendra vers l'infini.

En reprenant les notations de la démonstration du Théorème 4, soit:

$$H_I = F_{J_{r_1}} \circ \ldots \circ F_{J_1}$$

le premier opérateur p-contractant que l'on peut construire en composant les opérateurs F_{J_i} $(i = 1, 2, \ldots)$. On sait qu'une matrice de contraction de H_1 est alors:

$$M_1 = K_{J_{r_1}}, \ldots, K_{J_1}$$

matrice qu'il est possible de construire numériquement à partir des matrices K_{J_i} $(i = 1, 2, \ldots, r_1)$, elles-mèmes déduites simplement de la matrice K considérée comme matrice de contraction de F.

D'autre part on sait (Proposition 3) que ξ est aussi l'unique point fixe de H_1 dans X. Et dans l'itération CSP considérée, il vient $x^{r_1} = H_1(x^0)$.

Considérons alors l'élément z_0 de R^k défini par

$$[I - M_1]\, z_0 = p(x^{r_1} - x^\circ)\,.$$

Un tel élément existe, est unique, et vérifie $z^0 \geqq 0$, car M_1 étant nonnégative et de rayon spectral $<1, I - M_1$ admet une inverse nonnégative.

Or, H_1, étant p-contractant sur X, de matrice de contraction M_1, et admettant l'unique point fixe ξ de F dans X, il vient, d'après le Théorème 1, et puisque $x^{r_1} = H_1(x^0)$:

$$p(\xi - x^0) \leqq (I - M_1)^{-1}\, p(x^{r_1} - x^0) = z_0$$

et

$$p(\xi - x^{r_1}) \leqq M_1[I - M_1]^{-1}\, p(x^{r_1} - x^0) = M_1 z_0\,.$$

Soit, en posant:

$$z_{r_1} = M_1 z_0\,, \quad \left(= K_{J_{r_1}}, \ldots, K_{J_1} z^0\right),$$

$$p(\xi - x^{r_1}) \leqq z_{r_1}\,.$$

Nous poserons ensuite, pour $q \geqq r_1$:

$$z_{q+1} = K_{J_{q+1}} z_q\,, \quad (q = r_1, r_1 + 1, \ldots)\,.$$

Proposition 4. *On a, pour tout* $q \geqq r_1$ $p(\xi - x^q) \leqq z_q$.

En effet: Cette inégalité est vraie pour $q = r_1$. Démontrons la par récurrence, pour cela supposons la vraie à l'indice q: $p(\xi - x^q) \leqq z_q$ alors

$$p(\xi - x^{q+1}) = p(F_{J_{q+1}}(\xi) - F_{J_{q+1}}(x^q)) \leqq K_{J_{q+1}}\, p(\xi - x^q) \leqq$$
$$\leqq K_{J_{q+1}} z_q = z_{q+1}\,.$$

Remarques

1) Cet algorithme reprend, dans le contexte d'itérations CSP présenté ici, un algorithme, défini dans [12] pour le cas d'itérations linéaires: cet algorithme a été initialement défini par J. Shroeder [15] pour le cas de la norme vectorielle type sur R^n.

2) Tout élément de la suite d'itération CSP considérée peut être pris comme „vecteur de départ x^0„: en n'enclenchant le contrôle de l'approximation qu'au bout d'un certain nombre de pas de l'itération CSP, on gagne en temps de calcul, et surtout sur la finesse des estimations obtenues (cf [12]).

3) Montrons – ce qui est numériquement important – que l'estimation z_q obtenue pour $p(\xi - x^q)$ tend vers zéro lorsque q tend vers l'infini.

Il vient, z_{r_1} étant calculé:

$$z_{q+1} = K_{J_{q+1}} z_q\,, \quad (q = r_1, r_1 + 1, \ldots)\,.$$

Or cette suite de vecteurs $\geqq 0$ *de* R^k *n'est pas autre chose qu'une itération CSP conduite sur la matrice* K *(de contraction de* F*) partant de* z_{r_1} *et définie par la suite* $\{J_{r_1+1}, J_{r_1+2}, \ldots\}$ *de parties (non vides) de* $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Or cette suite de parties est évidemment de résiduel maximal puisque, par hypothèse, la suite $S = \{J_1, J_2, \ldots\}$ est de résiduel maximal.

De plus, relativement à la norme vectorielle type sur R^k, la matrice (nonnégative) K est contractante: en effet

$$\forall x, y \in R^k\ |Kx - Ky| = |K(x - y)| \leqq K|x - y|\,.$$

Ainsi K est, dans ce contexte, sa propre matrice de contraction: les hypothèses du Théorème 4 étant vérifiées, on conclut que la suite des z_q converge vers l'unique point fixe de l'opérateur K sur R^k, qui est évidemment l'origine de R^k.

VI. EXEMPLES

Soit toujours X un produit de k espaces de Banach X_i, muni de la norme vectorielle canonique p, et F un opérateur p-contractant sur X, dont K désigne une matrice de contraction. D'après le Théorème 4, toute itération CSP conduite sur F, définie par une suite de parties $S = \{J_1, J_2, \ldots, J_r, \ldots\}$ (de $\{1, 2, \ldots, k\}$), de résiduel maximal, converge, quelque soit le vecteur x^0 de départ, vers l'unique point fixe ξ de F dans X.

Dans ce qui suit, nous illustrons ce résultat pour différentes suites S possibles, de résiduel maximal.

§ 1. Méthode des approximations successives

Il est clair que la suite

$S = \{\{1, 2, \ldots, k\}, \{1, 2, \ldots, k\}, \{1, 2, \ldots, k\}, \ldots\}$ (de résiduel maximal) redonne la *méthode des approximations successives sur F*, dont on sait bien (Théorème 1) qu'elle converge vers ξ. Comme on l'a noté en introduction, cette méthode est une itération entièrement parallèle, k unités de calcul, attachées chacune à une composante x_i^r $(i = 1, 2, \ldots, k)$ du vecteur itéré x^r, pouvant travailler „en parallèle" (simultanément) pour calculer x_i^{r+1}, à partir d'une mémoire commune où sont stockés les x_i^r:

A. S. $$x_i^{r+1} = f_i(x_1^r, \ldots, x_k^r)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

§ 2. Méthode non linéaire de Gauss-Seidel [1] [8] [16].

Si l'on prend comme suite S la suite suivante, de résiduel maximal:

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{k\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{k\}, \ldots\}\,,$$

on obtient la *méthode* (entièrement série, puisqu'une seule unité de calcul est à utiliser à chaque pas) *de Gauss-Seidel non linéaire sur F*:

$$\begin{aligned}
&x_i^{r+1} = x_i^r\,, \quad (i \neq r + 1 \text{ modulo } k)\,,\\
&x_j^{r+1} = f_j(x_1^r, \ldots, x_k^r)\,, \quad (j = r + 1 \text{ modulo } k)\,,\\
&(r = 0, 1, 2, \ldots)\,,
\end{aligned}$$

qui s'écrit encore, en regroupant les pas de k en k,

$$\begin{aligned}
\eta_i^{r+1} &= f_i(\eta_1^{r+1}, \ldots, \eta_{i-1}^{r+1}, \eta_i^r, \ldots, \eta_k^r)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,,\\
&\quad (r = 0, 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned}$$

On est donc assuré, sous la seule hypothèse de p-contraction de F, de la convergence de cette méthode vers l'unique point fixe de F, quel que soit le vecteur de départ x^0.

Nous pouvons compléter ce résultat par les précisions suivantes: soit G l'opérateur sur X, de composantes g_i, définies par:

$$\begin{aligned}
x \in X \to g_1(x) = f_1(x) &= f_1(x_1, \ldots, x_k)\,,\\
g_2(x) &= f_2(g_1(x), x_2, \ldots, x_k)\,,\\
&\vdots\\
g_i(x) &= f_i(g_1(x), \ldots, g_{i-1}(x), x_i, \ldots, x_k)\,,\\
&\vdots\\
g_k(x) &= f_k(g_1(x), \ldots, g_{k-1}(x), x_k)\,.
\end{aligned}$$

Alors il est clair que, sous la forme regroupée indiquée ci-dessus, *la méthode non linéaire de Gauss-Seidel sur F n'est pas autre chose que la méthode des approximations successives sur l'opérateur G*:

$$\eta_i^{r+1} = g_i(\eta_1^r, \ldots, \eta_k^r), \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Définition. G sera appelé *opérateur de Gauss-Seidel associé à F*.

Soit K une matrice de contraction de F:

$$\forall x, y \in X, \quad p(F(x) - F(y)) \leqq Kp(x - y)$$

Notant L la triangulaire inférieure stricte de K, U sa triangulaire supérieure, $K = L + U$, et l'on a, par définition de G:

$$\forall x, y \in X, \quad p(G(x) - G(y)) \leqq Lp(G(x) - G(y)) + Up(x - y).$$

Or, L étant nonnégative et de rayon spectral nul, $I - L$ admet une inverse nonnégative d'où:

$$\forall x, y \in X, \quad p(G(x) - G(y)) \leqq (I - L)^{-1} U \, p(x - y)$$

et, d'après le Théorème de Stein-Rosenberg [16]:

$$\varrho((I - L)^{-1} U) \leqq \varrho(L + U) = \varrho(K) < 1.$$

Ainsi l'opérateur G est-il p-contractant sur X puisqu'il admet comme matrice de contraction la matrice $(I - L)^{-1} U$: *à noter que cette matrice n'est pas autre chose que „la matrice de Gauss-Seidel" de la matrice de contraction* $K = L + U$ *de* F.[1])

G admet alors comme unique point fixe celui de F. On retrouve donc ainsi que, sous sa forme regroupée, la méthode de Gauss-Seidel sur F est convergente, parce qu'il s'agit de la méthode des approximations successives sur l'opérateur G associé, p-contractant et de même point fixe que F. (cf. [1]).

D'ailleurs si nous définissons, à partir de la matrice $K = (k_{ij})$, les matrices:

$$K_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ k_{i1} & \ldots & k_{ii} & \ldots & k_{ik} \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne de } K, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

[1]) On voit ainsi comment passe, par l'intermédiaire des matrices de contraction, un résultat classique pour les itérations linéaires (Théorème de Stein-Rosenberg), dans notre contexte non linéaire.

[Dans les notations de la Sec. IV, ces matrices seraient notées $K_{\{i\}}$], il est clair que la méthode de Gauss Seidel considérée consiste à composer successivement les opérateurs $F_1 . F_2, \ldots, F_n$ (on devrair écrire $F\{_1\}, \ldots, F\{_n\}$), de matrices de Lipchitz respectives $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

Si nous posons $K' = K_n \ldots K_1$, il vient, d'après la Proposition 3, que K' est une matrice de contraction de l'opérateur G. Il est facile de vérifier que K' coincide avec la matrice $(I - L)^{-1} U$ définie plus haut.

Pour le cas où $X = R^n$, on obtient, selon la norme vectorielle choisie (cf. Sec. II), des méthodes de Gauss-Seidel par blocs ou par point. Dans ce dernier cas (utilisation de la norme vectorielle type sur R^n), on retrouve ainsi différents résultats donnés par Ortega et Rheinboldt [8].

§ 3. Méthodes non linéaires serie-parallèle cf. [13].

Pour $k = r \cdot q$, considérons la suite S suivante, de résiduel maximal:

$$S = \{\{1, 2, \ldots, q\}, \{q + 1, \ldots, 2q\}, \ldots \{(r - 1)\, q + 1, \ldots, rq\}, \{1, 2, \ldots, q\} \text{ etc} \ldots\} .$$

On obtient une itération série-parallèle qui converge encore vers ξ.

En parallèle q unités de calcul peuvent traiter simultanément les q composantes d'un même bloc. Une fois le calcul fait, elles passent (aspect série du procédé) au bloc suivant de q composantes.

On obtient évidemment la méthode des approximations successives pour $q = k$ d'où $r = 1$, et la méthode de Gauss-Seidel pour $q = 1$, d'où $r = k$.

Dans le cas général, il s' agit en fait d'une méthode „de Gauss-Seidel“ pour des „super-blocs“ [par exemple, pour $X = R^n$, il s'agit de blocs regroupant chacun q blocs de la décomposition en blocs définie par la norme vectorielle considérée.] Un exemple simple fera mieux comprendre:

Exemple: $k = 4$, $q = r = 2$.

$$\begin{aligned}
x_1^{r+1} &= f_1(x_1^r, x_2^r, x_3^r, x_4^r)\,, \\
x_2^{r+1} &= f_2(x_1^r, x_2^r, x_3^r, x_4^r)\,, \\
x_3^{r+1} &= f_3(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, x_3^r, x_4^r)\,, \\
x_4^{r+1} &= f_4(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, x_3^r, x_4^r)\,, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned}$$

Soit encore, avec des notations évidentes:

$$\begin{aligned}
y_1^{r+1} &= h_1(y_1^r, y_2^r)\,, \\
y_2^{r+1} &= h_2(y_1^{r+1}, y_2^r)\,, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned}$$

§ 4. Méthode non linéaire „des directions alternées“ [16].

Si l'on prend comme suite S la suite suivante, de résiduel maximal:

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{k\}, \{k\}, \{k-1\}, \ldots, \{1\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}$$

On obtient la méthode non linéaire „des directions alternées“ qui converge encore vers ξ.

Regroupons les pas de $2k$ en $2k$: avec des développements analogues à ceux faits au § 2 (méthode non-linéaire de Gauss-Seidel) il est aisé de voir que cette méthode „des directions alternées“ est une méthode des approximations successives sur un opérateur que l'on notera P (pour Peaceman):

G désignant toujours l'opérateur de Gauss-Seidel associé à F, soit $\tilde{G}$, de composantes g_i, l'opérateur de Gauss-Seidel „renversé“:

$$x \in X \to \left| \begin{array}{ll} g_1(x) & = f_1(x_1, g_2(x), \ldots, g_k(x)) \\ \vdots & \\ g_{k-1}(x) & = f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, g_k(x)) \\ g_k(x) & = f_k(x_1, \ldots, x_k) \end{array} \right.$$

Alors $P = \tilde{G} \circ G$.

Définition. P sera appelé *opérateur des directions alternées associé à F.*

Notant toujours L la triangulaire inférieure stricte de la matrice de contraction K de F, U sa triangulaire supérieure, notons U' la triangulaire supérieure stricte de K, L' sa triangulaire inférieure. Alors, d'après la Proposition 3:

$G = F_n \circ \ldots \circ F_1$ est p-contractant, de matrice de contraction:

$$K_n \ldots K_1 = (I - L)^{-1} U ;$$

$\tilde{G} = F_1 \circ \ldots \circ F_n$ est p-contractant, de matrice de contraction:

$$K_1 \ldots K_n = (I - U')^{-1} L ;$$

$P = \tilde{G} \circ G$ est p-contractant, de matrice de contraction:

$$(I - U')^{-1} L'(I - L)^{-1} U .$$

En particulier, si l'opérateur F est „à diagonale nulle“ (c'est-à-dire si f_i ne dépend pas de x_i. $i = 1, 2, \ldots, k$) les opérateurs F_i sont alors idempotents $(F_1^2 = F_i)$ et utiliser la suite S définie ci-dessus revient à utiliser la suite:

$$S' = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{k\}, \{k-1\}, \ldots, \{1\}, \{2\}, \text{etc} \ldots\} .$$

On peut choisir alors K de diagonale nulle, de sorte que $L' = L$ et $U' = U$. La matrice de contraction exhibée pour P est alors:

$$(I - U)^{-1} L(I - L)^{-1} U .$$

D'ailleurs, par une double application du théorème de Stein-Rosenberg [16], on peut montrer directement que cette matrice est de rayon spectral <1:

En effet, puisque $\varrho(K) = \varrho(L + U) < 1$, on en déduit, comme au § 2, que

$$\varrho[(I - L)^{-1} U] \leqq \varrho(L + U) < 1 .$$

Or $(I - L)^{-1} U = U + L(I - L)^{-1} U$. Posant $R = U$, $S = L(I - L)^{-1} U$, nous avons donc deux matrices R et S nonnégatives telles que $\varrho(R + S) < 1$, d'où $\varrho[(I - R)^{-1} S] \leqq \varrho(R + S) < 1$ soit finalement:

$$\varrho[(I - U)^{-1} L(I - L)^{-1} U] \leqq \varrho[(I - L)^{-1} U] \leqq \varrho(L + U) = \varrho(K) < 1 .$$

§ 5. Méthode non linéaire de „Southwell".

(itération sur la composante maximum de la norme vectorielle du résidu).

La suite S utilisée est définie en cours d'itération de la façon suivante:

x^r étant obtenu, on forme alors $p(x^r - F(x^r))$, norme vectorielle du résidu. Soit i_r l'indice, (ou l'un quelconque des indices) de la (des) composante(s) maximum de $p(x^r - F(x^r))$.

On définit alors la partie J_{r+1} de $\{1, 2, \ldots, k\}$ par:

$$J_{r+1} = \{i_r\}$$

d'où

$$x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r) = F_{i_r}(x^r) .$$

Montrons alors que cette itération chaotique converge vers l'unique point fixe ξ de F:

En effet (Théorèmes 4 et 5) toute itération CSP conduite sur F p-contractant converge vers une limite x. Supposons, dans le cas présent, que $x \neq \xi$. x est alors (Théorème 5) un point fixe partiel de F avec $x = x_I + \eta_J$ et $F(x) = F_{\eta_J}(x_I) + \eta_J$ où J désigne le résiduel de la suite S construite. D'où $x - F(x) = x_I - F_{\eta_J}(x_I) \in W_I$ et $p_J(x - F(x)) = 0$. Soit alors $x^r = x_I^r + x_J^r$ la décomposition de x^r dansla dé composition de X en somme directe de W_I et W_J. D'après Théorème 5, on sait qu' à partir d'un rang fini r_0 x_I est stabilisé sur x_I:

α) si $r \geqq r_0$ alors $x^r = x_I + x_J^r$.

Soit alors a le maximum des composantes de $p_I(x_I - F_{\eta_J}(x_I)) = p_I(x - F(x))$. a est > 0 car s'il était nul, x coinciderait avec ξ (cf. Théorème 5, Remarque). Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < a/2$.

Puisque x^r converge vers x, il existe un entiet r_1 tel que, pour $r \geqq r_1$, on est assuré des points suivants:

β) $p_I(x^r - F(x^r))$ a au moins une composante $\geqq a - \varepsilon > a/2$;

γ) $p_J(x^r - F(x^r))$ a toutes ses composantes $\leqq \varepsilon < a/2$.

Mais alors, soit $r \geqq r_0$, $r \geqq r_1$: d'après α)

$$x^r = x_I + x_J^r$$

et pour un tel r, l'indice i_r déterminant $J_{r+1} = \{i_r\}$ est, d'après β) et γ) nécessairement pris dans I. Alors, dans le passage de x^r à x^{r+1}, c'est la composante d'indice $i_r \in I$ qui est *modifiée.*

Ainsi x_I^{r+1} ne coinciderait plus avec x_I, ce qui contredit α).

Le raisonnement précédent montre donc pourquoi, sous la seule condition de p-contraction de F, la méthode non linéaire d'itération chaotique de Southwell sera convergente.

VII. CAS D'OPÉRATEURS AFFINES

Pour X muni de la norme vectorielle canonique p, soit $T \in L(X, X)$, h donné dans X et F, opérateur affine sur X, défini sur X, défini par:

$$F(x) = Tx + h\,.$$

On a vu (cf. Section III § 4) que p engendre sur $L(X, X)$ la norme vectorielle M, et que, dire que F est p-contractant sur X, c'est dire que: $\varrho(M(T)) < 1$.

($M(T)$ étant la meilleure matrice de contraction de T.)

L'opérateur T est alors décomposé en blocs T_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, k$) (à partir desquels est définie $M(T)$). Nous allons voir que, pour les méthodes classiques de résolution de l'équation $x = F(x)$, ce formalisme étend le formalisme usuel pour le cas matriciel.

Notons L_T l'opérateur (linéaire, continu) sur X, de blocs L_{ij}, défini par

$$L_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \leqq j\,,$$

$$L_{ij} = T_{ij} \quad \text{si} \quad i > j\,.$$

Notons U_T l'opérateur (linéaire, continu) sur X, de blocs U_{ij}, défini par:

$$U_{ij} = T_{ij} \quad \text{si} \quad i \leqq j\,,$$

$$U_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j\,.$$

de sorte que: $T = L_T + U_T$ et $M(T) = M(L_T) + M(U_T)$.

Il est alors facile de vérifier que l'opérateur G de Gauss-Seidel associé à F est défini par:

$$G(x) = (I - L_T)^{-1} U_T x + (I - L_T)^{-1} h$$

et que, du moins dans le cas où T est de bloc diagonale nulle $(T_{ii} = 0, i = 1, 2, \ldots, k)$ l'opérateur P des directions alternées associé à F est défini par:

$$P(x) = (I - U_T)^{-1} L_T(I - L_T)^{-1} U_T x + (I - U_T)^{-1} (I - L_T)^{-1} h .$$

G et P sont donc encore des opérateurs affines, dont on sait qu'ils sont p-contractants. Ce dernier point peut être retrouvé directement, par utilisation du Théorème de Stein-Rosenberg au niveau des matrices de contraction: ce sont les démonstrations des § 4 et 5, avec, dans ce contexte d'opérateurs affines:

$$K = M(T) = M(L_T) + M(U_T) ,$$
$$L = M(L_T) , \quad U = M(U_T) .$$

D'où

$$M((I - L_T)^{-1} U_T) \leqq [I - M(L_T)]^{-1} M(U_T) = (I - L)^{-1} U$$

et

$$M(I - U_T)^{-1} L_T(I - L_T)^{-1} U_T) \leqq [I - M(U_T)]^{-1} M(L_T)[I - M(L_T)]^{-1} M(U_T) = \\ = (I - U)^{-1} L(I - L)^{-1} U .$$

Les résultats généraux établis plus haut permettent alors d'énoncer sans autre démonstration la:

Proposition 5. *Si $\varrho(M(T)) < 1$, alors, quel que soit $h \in X$ (cf. Prop. 2) l'équation de point fixe:*

$$x = Tx + h$$

admet une solution unique, calculable:

a) *soit comme limite de la méthode des approximations successives:*

$$x^{r+1} = Tx^r + h$$

b) *Soit comme limite de la méthode de Gauss-Seidel:*

$$x^{r+1} = (I - L_T)^{-1} U_T x^r + (I - L_T)^{-1} h$$

c) *Soit comme limite d'une méthode itérative série-parallèle.*

d) *Soit comme limite de la méthode des directions alternées:*

$$x^{r+1} = (I - U_T)^{-1} L_T(I - L_T)^{-1} U_T x^r + (I - U_T)^{-1} (I - L_T)^{-1} h$$

(si T est de bloc-diagonale nulle).

e) *Soit comme limite de la méthode de Southwell.*

f) *Soit en fait comme limite de toute itération CSP de résiduel maximal.*

Dans le cas de méthodes *matricielles* par blocs ou par point, la Proposition précédente redonne le résultat classique suivant:

Proposition 6. *Si A est une bloc-H-matrice relativement à une norme vectorielle p régulière sur R^n [12][1]) alors, pour résoudre le système linéaire:*
$Ax = b$ (b quelconque dans R^n) les méthodes par blocs-selon les blocs correspondants-de:

Jacobi

Gauss-Seidel

Série parallèle

Directions alternées

Southwell

convergent vers la solution unique.

En effet, il suffit de remplacer le système linéaire cinsidéré par l'équation de point fixe équivalente (splitting de Jacobi):

$$x = Jx + h = F(x)$$

où J est la matrice de Jacobi par blocs associée à A(*) et d'appliquer alors la Proposition 5 précédente.

En fait, pour une bloc H-matrice, on aura la convergence de toute itération CSP [conduite sur l'opérateur F de Jacobi explicité ci-dessus] vers la solution unique du système linéaire considéré.

L'utilisation de la norme vectorielle *type* sur R^n redonne alors le contexte des H-matrices et la convergence des méthodes *par point* considérées [9].

VIII. INTRODUCTION D'UN PARAMÈTRE DE RELAXATION

Dans un but d'accélération de la convergence des méthodes numériques considérées, l'équation de point fixe sur X

$$x = F(x)$$

peut utilement êntre remplacée par l'équation de point fixe équivalente suivante

$$x = \omega F(x) + (1 - \omega) x, \quad [\omega \text{ réel} \neq 0]$$

[1]) Δ désignant, selon les blocs considérés, la bloc-diagonale de A, supposée non singulière, on a: $J = I - \Delta^{-1}A$ [à noter que J est de bloc-diagonale nulle]. Dire que A est une bloc-H-Matrice relativement à p est justement dire que F est p-contractant, à savoir: $\varrho(M(J)) < 1$ [12].

que nous écrirons:

$$x = F_\omega(x)$$

après avoir posé:

$$F_\omega = \omega F + (1 - \omega) I .$$

Du point de vue de la p-contraction, on a la:

Proposition 7. *Si F est p-contractant sur X, soit K une matrice de contraction de F. Alors pour tout ω réel tel que*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(K)}$$

l'opérateur F_ω est p-contractant sur X, admettant la matrice:

$$K_\omega = \omega K + |1 - \omega| I$$

pour matrice de contraction.

En effet:

$$\forall x, y \in X, \; p(F_\omega(x) - F_\omega(y)) \leqq |\omega| \, p(F(x) - F(y)) + |1 - \omega| \, p(x - y) \leqq$$
$$\leqq [|\omega| \, K + |1 - \omega| \, I] \, p(x - y) .$$

Posant $K_\omega = |\omega| \, K + |1 - \omega| \, I$, il vient donc:

$$p(F_\omega(x) - F_\omega(y)) \leqq K_\omega \, p(x - y) .$$

Or il est clair que:

$$\varrho(K_\omega) = |\omega| \, \varrho(K) + |1 - \omega| .$$

K_ω est donc une matrice de Lipchitz de F_ω, dont il est facile de voir qu'elle est de rayon spectral < 1 si et seulement si: $\varrho(K) < 1$ et

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(K)} \quad \text{(cf [2], [5], [12])} \; \bullet$$

Sous les conditions indiquées, F_ω admettra alors le même unique point fixe ξ que F et l'on pourra, pour calculer ξ, utiliser toute itération CSP de résiduel maximal conduite sur F_ω (Théorème 4). *En particulier, la méthode de Gauss-Seidel conduite sur F_ω redonne, dans le cas matriciel classique, la méthode usuelle dite de relaxation (SOR), qui se trouve donc placée ici dans un contexte plus général d'opérateurs non linéaires p-contractants sur X.*

IX. CONTRACTION LOCALE

Dans tout ce qui précède, l'opérateur F considéré est supposé contractant sur tout X. On peut en fait se restreindre à une étude locale, dont nous indiquons ici seulement les grandes lignes:

Soit X le produit de k espaces de Banach X_i, muni de la norme vectorielle canonique p. Soit D_i une partie fermée de X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et $D = \pi D_i$: D est une partie fermée de X.

Une application F de D dans X est alors dite *p-contractante sur D* s'il existe une matrice nonnégative $K(k, k)$ de rayon spectral $\varrho(K) < 1$ telle que

$$\forall x, y \in D\,, \quad p(F(x) - F(y)) \leqq Kp(x - y)\,.$$

Si F est p-contractant sur D *et si* $F(D) \subset D$, alors F admet *dans D* un point fixe unique ξ: *ce point fixe peut alors être calculé comme limite de toute itération CSP, de résiduel maximal, conduite sur F et partant de x_0 dans D*: nous obtenons ainsi une formulation „locale" des Théorèmes 1 et 4.

Le résultat suivant [4], [6] peut être utile pour démontrer une contraction locale

Proposition 8. *Soit F, opérateur p-contractant de D dans X. S'il existe x_0 dans D et $u \geqq 0$, $u \neq 0$ dans R^k, tels que:*

1^0) *La partie S de X définie par*

$$S = \{x \in X, p(x - x_0) \leqq u\}$$

soit contenue dans D.

2^0) $p(F(x_0) - x_0) \leqq [I - K]\, u$

où K est une matrice de contraction de F sur D; alors $F(S) \subset S$ et F admet dans S un point fixe unique.

Soit $x \in S : x \in D$ et $p(x - x_0) \leqq u$.
Montrons que $F(x) \in S$,

$$p(F(x) - x_0) \leqq p(F(x) - F(x_0) + [I - K]\, u \leqq Kp(x - x_0) + [I - K]\, u\,,$$
$$Ku + [I - K]\, u$$

d'où le résultat: $F(S) \subset S$. F étant alors p-contractant sur S, on conclut à l'existence et à l'unicité d'un point fixe de F dans S, calculable d'ailleurs comme limite de toute itération CSP, de résiduel maximal, conduite sur F et partant de x_0 dans S. ●

Soit, dans R^{10}, l'équation de point fixe $x = F(x)$ définie par l'opérateur suivant:

$$F(x) = \left| \begin{array}{l} (x_1 + x_2)/4 + x_3/20 \\ [\cos(x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - x_8 - x_9)]/6.6 \\ \frac{1}{2}\cos(x_1/2 + x_3/3 - 2x_5/3) + x_7/5 \\ \frac{1}{5}\sin(2x_3) + \frac{1}{5}\cos(x_1 + x_4) + x_5/6 \\ (e^{-x_1^2} + e^{-x_8^2})/2 \\ (x_1 - x_2 + x_8 + x_9 + 3x_{10})/7.2 \\ e^{-x_1^2} + x_9/11 \\ [\cos(x_1 + x_3 + x_6 + x_9)]/5 \\ [\sin(x_2 + x_4 + x_5 + x_8)]/5 \\ (e^{-x_3^2} + e^{-x_8^2})/2 - x_{10}/11 \end{array} \right.$$

Relativement à la norme vectorielle type sur R^{10}, F est contractant, et admet en particulier la matrice de contraction suivante:

$$K = \begin{bmatrix} 0{,}2500 & 0{,}2500 & 0{,}0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1520 & 0{,}1520 & 0 & 0{,}1520 & 0{,}1520 & 0 & 0 & 0{,}1520 & 0{,}1520 & 0 \\ 0{,}2500 & 0 & 0{,}1670 & 0 & 0{,}3340 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2000 & 0 & 0{,}4000 & 0{,}2000 & 0{,}1670 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4289 & 0 & 0 \\ 0{,}1390 & 0{,}1390 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1390 & 0{,}1390 & 0{,}4170 \\ 0{,}8578 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0910 & 0 \\ 0{,}2000 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0{,}2000 & 0 \\ 0 & 0{,}2000 & 0 & 0{,}2000 & 0{,}2000 & 0 & 0 & 0{,}2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4289 & 0 & 0{,}0910 \end{bmatrix}$$

de rayon spectral:

$$\varrho(K) = 0.7868\ldots$$

F admet alors dans R^{10} un unique point fixe dont les composantes sont, à 10^{-9} près:

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}088\,446\,725 \\ 0{,}132\,741\,218 \\ 0{,}662\,994\,799 \\ 0{,}523\,507\,573 \\ 0{,}994\,592\,264 \\ 0{,}342\,456\,943 \\ 1{,}010\,223\,912 \\ 0{,}055\,024\,954 \\ 0{,}198\,178\,378 \\ 0{,}752\,260\,362 \end{array} \right.$$

Avec le même vecteur de départ (l'origine de R^{10}), nous avons expérimenté différentes itérations chaotiques, toutes série (mis à part la méthode des approximations successives):

A: méthode des approximations successives);

B: méthode (non linéaire) de Gauss-Seidel;

C: directions alternées, correspondant à la répétition de la séquence;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 9, 8, 7. 6, 5, 4, 3, 2, 1

D: directions alternées, correspondant à la répétition de la séquence:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2;

E: itération chaotique série, définie par un tirage au hasard des entiers entre 1 et 10;

F: itération chaotique série, définie par la répétition de la séquence

3, 6, 4, 2, 3, 6, 4, 2, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 9, 10;

G: itération chaotique série, définie par la succession des décimales de π.

Dans le tableau ci-après on trouvera, pour chacune de ces méthodes, le nombre de pas élémentaires nécessaires pour obtenir le point fixé cherché, à la précision indiquée ci-dessus. Par „pas élémentaire“, on ented ici la modification d'*une* composante: par exemple, les 220 pas élémentaires nécessaires dans la méthode des approximations successives correspondent à 22 pas „globaux“ dans le formalisme $x^{r+1} = F(x^r)$.

Méthode	A	B	C	D	E	F	G	Newton
nombre de pas élémentaires	220	190	220	316	280	324	270	
temps de calcul	1,81 s	2,13 s	2,32 s					2,04 s

Les temps de calcul donnés n'ont qu'une valeur indicative: des variantes de programmation ne les rendent pas exactement comparables entre eux.

A titre de comparaison, la méthode de Newton a été expérimenté sur ce même exemple, avec le même vecteur de départ $x^0 = 0$. On obtient la convergence, à la précision cherchée, en cinq pas de cette méthode, pour un temps de calcul de 2,04 s.

Enfin, partant encore de $x^0 = 0$, nous avons expérimenté la méthode d'itération chaotique série définie par la suite:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Cette suite S est de résiduel $R(S) = 6, 7, 8, 10$ *non maximal.* On obtient alors la convergence, à la précision indiquée, et au bout de 60 pas élémentaires, vers un vecteur de R^{10} tel que

$$\eta = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0{,}151\ 515\ 142 \\ 0{,}5 \\ 0{,}368\ 294\ 175 \\ 1 \ldots\ldots\ldots \\ 0{,}358\ 203\ 361 \\ 1{,}018\ 161\ 620 \\ 0{,}098\ 126\ 443 \\ 0{,}199\ 777\ 816 \\ 0{,}810\ 891\ 671 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad F(\eta) = \left| \begin{array}{l} 0{,}062\ 878\ 785 \\ 0{,}107\ 916\ 968 \\ 0{,}642\ 423\ 604 \\ 0{,}521\ 549\ 410 \\ 0{,}995\ 208\ 704 \\ 0{,}358\ 203\ 361 \\ 1{,}018\ 161\ 620 \\ 0{,}098\ 126\ 443 \\ 0{,}199\ 777\ 816 \\ 0{,}810\ 891\ 671 \end{array} \right.$$

η est bien, comme prévu (Théorème 5) *un point fixe partiel* de F, relatif aux composantes 6, 7, 8, 9 et 10.

XI. CONCLUSION

A posteriori, ce travail peut être commenté de la façon suivante:

Un contexte naturel d'étude des méthodes chaotiques série-parallèle (pour la résolution d'une équation de point fixe de la forme $x = F(x)$) est celui d'un produit d'espaces de Banach, muni de la norme vectorielle canonique p: ce contexte permet en particulier de traiter dans un même formalisme les méthodes par point et les méthodes par blocs.

La notion d'opérateur p-contractant est alors „une bonne notion": elle assure à la fois l'existence et l'unicité d'un point fixe pour l'opérateur F considéré, et *la convergence vers ce point fixe de toute itération chaotique série-parallèle de résiduel maximal* (*Théorème* 4).

Ce résultat est suffisamment général pour recouvrir en particulier (en les étendant au contexte non linéaire) les résultats usuels de convergence des méthodes itératives classiques (par point ou blocs) de résolution de systèmes linéaires: Jacobi, Gauss-Seidel, procédés série-parallèle, relaxation, direction alternées, méthode de Southwell ... pour des H (ou bloc-H) matrices.

C'est d'ailleurs par l'intermédiaire des matrices de contraction des différents opérateurs considérés que passent dans le cadre non linéaire les résultats classiques du cas linéaire.

De plus, dans le contexte délimité ci-dessus, on peut contrôler algorithmiquement la convergence d'une itération chaotique: *cet algorithme de contrôle n'est pas autre chose que la conduite de l'itération chaotique considérée sur les matrices de Lipchitz des différents opérateurs mis en oeuvre.*

On peut alors poser la question, pour un opérateur p-contractant, de savoir choisir la suite chaotique S de façon à assurer une convergence „aussi rapide que possible“ de l'itération chaotique correspondante: nous laisserons cette question ouverte.

En conclusion, nous espérons que ce travail pourra contribuer à une synthèse, sur le plan des concepts, entre nos références principales: [1], [2], [8], [15] et [16].

Ce travail a fat l'objet d'une conference de F. Robert au Congres Liblice III "Basic problems of Numerical Analysis" Prague, aout 1973.

Bibliographie

[1] *M. Chambat, M. Charnay:* Résolution d'équations non linéaires de point fixe dans R^n. RAIRO 6ème année, déc. 72, R3 p. 105—109.

[2] *D. Chazan, W. Miranker:* Chaotic Relaxation. Linear Algebra and its Appl. 2 (1969) 199 á 222.

[3] *J. D. P. Donnelly:* Periodic chaotic relaxation. Linear Algebra and its Appl. 4 (1971) 117—128.

[4] *L. V. Kantorovitch, B. Z. Vulich, A. G. Pinsker:* Analyse fonctionnelle dans les espaces ordonnés (en russe). Chapitre 12 Moscou (1950).

[5] *I. Marek:* Frobenius theory of positive operators: comparison theorems and applications. Siam J. Appl. Math. Vol. 19, n° 3, Nov. 1970, p. 607—627.

[6] *J. C. Miellou:* CRAS, Paris t 273, 1257—1260 (1972). CRAS, Paris t 275, 1107—1110 (1972).

[7] *C. Odiard:* Un corollaire du théorème de Perron-Frobenius. RIRO 5ème année R2 1971, 124—129.

[8] *J. Ortega, W. C. Rheinboldt:* Iterative solution of non linear equations in several variables. Academic-Press (1970).

[9] *A. Ostrowski:* Determinanten mit überwiegender Haupt diagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iteration-prozessen. Commentarii Helv. 30 (1956) 175—210.

[10] *A. Ostrowski:* Metrical properties of operator matrices and matriçes partitionned into blocks. Journ. Math. Anal. and Appl. 2 (1961) 161—209.

[11] *A. Ostrowski:* Iterative solution of linéar systems of functional equations. Journ. Math. Anal. and Appl. 2 (1961) 351—369.

[12] *F. Robert:* Bloc-H-matrices et convergence des méthodes itératives classiques par blocs. Linear Algebra and its Appl. 2 (1969) 223—265.

[13] *F. Robert:* Méthodes itératives „série-parallèle“. C.R.A.S. Paris t. 271, 847—850 (1970).

[14] *F. Robert, M. Rascle:* Contraction faible en norme vectorielle. Théorie de Perron Frobenius pour le cas de blocs. Linear Algebra and its Appl. 6 — 305—335 (1973).

[15] *J. Schroeder:* Computing error-bounds in solving linear systems MRC Tech. report. 242, July 1961 University of Wiscosin.

[16] *R. S. Varga:* Matrix Iterative Analysis Prentice Hall (1962).

[17] *R. S. Varga:* On a connection between Infima of Norms and eigenvalues of associated operators. Linear Algebra and its Appl. 6 249—256 (1973).

Souhrn

SERIOVO-PARALELNÍ CHAOTICKÉ ITERAČNÍ METODY PRO SOUSTAVY NELINEÁRNÍCH ROVNIC

FRANCOIS ROBERT, M. CHARNAY, F. MUSY

Chaotické iterační metody studované Chazanem a Mirankerem pro lineární soustavy se rozšiřují na soustavy nelineárních rovnic.

Základním nástrojem této studie je pojem kontrakčního operátoru ve vektorové normě: právě prostřednictvím kontrakčních matic lze přenést klasické výsledky konvergence iteračních metod pro řešení lineárních soustav na nelineární soustavy. Všechny tyto výsledky jsou vlastně zvláštním případem téže věty (Věta 4 v textu), která se týká konvergence chaotické nelineární iterace. Jako zvláštní případy lze získat výsledky Ortegy a Rheinboldta pro soustavy nelineárních rovnic.

Addresses des auteurs: François Robert, Université scientifique et médicale de Grenoble, Mathématiques appliquées — informatique, Boite postale 53, 38041 Grenoble, France. *M. Charnay, M. Musy*, Analyse Numérique, Département de Mathématiques Université de Lyon 1, 69 Villeurbanne, France.