Aplikace matematiky

Klaus Lommatzsch

Über die Lage lokaler Minima quadratischer Optimierungsaufgaben

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 198–202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103531`

ÜBER DIE LAGE LOKALER MINIMA QUADRATISCHER OPTIMIERUNGSAUFGABEN

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingegangen am 8. März 1973)

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Aufgabe

$$\min \{f(x, x) | x \in M\}, \tag{1}$$

dabei sind

M eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des A^n,

$f(x, x)$ eine über dem A^n definierte quadratische Funktion,

d.h.

$$f(x, x) \equiv x^T C x + 2p^T x, \tag{2}$$

wobei C eine symmetrische Matrix bezeichnet.

Zur Charakterisierung der Lage der lokalen Minima einer Aufgabe (1) wird die durch die sog. K-Mengen erzeugte Aufteilung vom M genutzt: ein Punkt $\bar{x} \in A^n$ gehört genau dann zur K-Menge $K_M^{\hat{x}}$, $\hat{x} \in M$ einer Aufgabe (1), falls $f(\bar{x}, x) \geqq f(\bar{x}, \hat{x})$ für alle $x \in M$ gilt, dabei ist

$$f(x^1, x^2) \equiv (x^1)^T C x^2 + p^T x^1 + p^T x^2. \tag{3}$$

Die K-Mengen stehen in enger Beziehung zu den Stabilitätsbereichen der linearen parametrischen Optimierung [1]; eine eingehendere Darstellung von Eigenschaften der K-Mengen findet sich in [2].

Für das weitere sind die nachfolgenden Aussagen über die K-Mengen interessant:

(4) – die K-Mengen sind konvex und abgeschlossen;

(5) – wenn $x^1, \ldots, x^k$ Elemente aus M sind, so ist der Durchschnitt $K_M^{x^v}$ der K-Mengen $K_M^{x^1}, \ldots, K_M^{x^k}$ wieder eine K-Menge, sie gehört zu den Punkten $x^v = \sum_{i=1}^k v_i x^i$ mit $0 < v_i < 1$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\sum_{i=1}^k v_i = 1$.

(6) – ist die eben definierte K-Menge $K_M^{x^v}$ nicht leer und gilt $K_M^{x^v} \neq K_M^{x^i}$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, so enthält $K_M^{x^v}$ nur Randpunkte von $K_M^{x^i}$.

Einer einfacheren Darstellung halber soll im weiteren für eine Strecke mit den Endpunkten x^1 und x^2 das Zeichen $G(x^1, x^2)$ verwendet werden:

(7) $$G(x^1, x^2) = \{x \in A^n \mid x = vx^1 + (1 - v)\, x^2,\ 0 \leqq v \leqq 1\}\,.$$

Für den Anstieg $\varphi_{x^1x^2}(v)$ der quadratischen Funktion $f(x, x)$ über $G(x^1, x^2)$ ergibt sich wegen der Symmetrie der Matrix C, daß

(8) $$\tfrac{1}{2}\varphi_{x^1,x^2}(v) = v(f(x^1, x^1) - f(x^1, x^2)) + (1 - v)\,(f(x^2, x^1) - f(x^2, x^2))\,.$$

Die Bedeutung der K-Mengen für quadratische Optimierungsaufgaben der Art (1) zeigt sich u.a. an der folgenden notwendigen Bedingung für ein lokales Minimum von $f(x, x)$ über M im Punkte $\bar{x}$, sie lautet:

(9) $$\bar{x} \in K_M^{\bar{x}} \cap M\ ;$$

liegt nämlich $\bar{x}$ nicht in $K_M^{\bar{x}}$, so gibt es ein $\hat{x} \in M$ mit $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, \hat{x})$ und längst der Strecke $G(\hat{x}, \bar{x})$ würde $f(x, x)$ von $v = 0$ bis zu einem $\bar{v} > 0$ abnehmen (vgl. die Darstellungen (7) und (8). Eine eingehende Diskussion von Optimalitätskriterien im Zusammenhang mit den K-Mengen für Aufgaben der Art (1) findet sich in [3].

Der folgende Satz über eine in M gelegene Richtung nicht zunehmender Werte von $f(x, x)$ spielt für die in diesem Artikel angestrebte Untersuchung eine zentrale Rolle:

(10) **Satz.** *Es sei $x^1 \in K_M^{\bar{x}} \cap M$ mit $\bar{x} \in M$, weiter möge x^2 ein auf der Strecke $G(\bar{x}, x^1)$ gelegener Punkt mit $x^2 \in K_M^{\bar{x}}$ sein. Die quadratische Funktion $f(x, x)$ nimmt entlang der Strecke $G(\bar{x}, x^1)$ von x^1 nach x^2 nicht zu.*

Beweis. Aus $x^1 \in K_M^{\bar{x}}$ folgt $f(x^1, x^1) \geqq f(x^1, \bar{x})$. Wegen der Linearität der Funktion $f(x^1, x)$ gilt dann auch $f(x^1, x^1) \geqq f(x^1, x^2)$. Da auch x^2 in $K_M^{\bar{x}}$ liegt, erhält man $f(x^2, x^1) \geqq f(x^2, \bar{x})$ und hieraus wiederum $f(x^2, x^1) \geqq f(x^2, x^2)$. Zusammen ergibt sich damit die Ungleichung $f(x^1, x^1) \geqq f(x^2, x^2)$; da x^1 beliebig aus $K_M^{\bar{x}}$ gewählt war, ist die Behauptung gezeigt.

Die Aussage dieses Satzes (10) läßt sich nun in folgender Weise erweitern (wobei dessen Voraussetzungen unverändert übernommen werden):

(11) **Satz.** *Der Punkt $x^3 \in G(\bar{x}, x^1)$ habe die Eigenschaft, daß $f(x^3, x^3) = \min\{f(x, x) | x \in G(\bar{x}, x^1)\}$ ist. Dann gilt entweder $x^3 \in K_M^{x^3}$ oder $x^3 \in /K_M^{\bar{x}}$.*

Beweis. Gilt $x^3 \in K_M^{\bar{x}} \cap M$, so ist $f(x^3, x) \geqq f(x^3, \bar{x})$, $x \in M$. Im Fall $x^3 = \bar{x}$ folgt dann die Behauptung $x^3 \in K_M^{x^3}$.

Es sei nun $x^3 \neq \bar{x}$ und es werde angenommen, daß $x^3 \in |K_M^{x^3}$ ist und daß gleichzeitig $x^3 \in K_M^{\bar{x}}$ gilt, d.h. es gibt ein $\hat{x} \in M$ mit $\hat{x} \neq x^3$, so daß $f(x^3, x^3) > f(x^3, \hat{x})$ ist, und für alle $x \in M$ gilt gleichzeitig, daß $f(x^3, x) \geqq f(x^3, \bar{x})$. Diese beiden Ungleichungen führen bei gleichzeitiger Gültigkeit zu der Beziehung $f(x^3, x^3) > f(x^3, \bar{x})$. Die Ungleichung widerspricht aber der Festlegung von x^3 als Minimalpunkt in $G(\bar{x}, x^1)$, wie sich unmittelbar aus der Darstellung (8) für den Anstieg von $f(x, x)$ über der Strecke $G(\bar{x}, x^3)$ ergibt. Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.

Die Sätze (10) und (11) ermöglichen es nun, Aussagen über die mögliche Verteilung lokaler Minima in der durch die K-Mengen erzeugten Struktur von M zu treffen. Zur schärferen Herausstellung werden sich eine Reihe der weiteren Aussagen auf lokale strenge Minima beziehen, d.h. $f(x, x)$ besitzt in $\bar{x} \in M$ ein lokales strenges Minimum über M, falls eine Umgebung U von $\bar{x}$ existiert, daß

$$(12) \qquad f(x, x) > f(\bar{x}, \bar{x}), \quad x \in U(\bar{x}) \cap M, \quad x \neq \bar{x}.$$

Aus Satz (10) erhält man speziell die folgende Eigenschaft:

(13) **Corrolar.** *Liegt $\bar{x}$ in $K_M^{\bar{x}} \cap M$, so nimmt $f(x, x)$ auf allen in $K_M^{\bar{x}} \cap M$ gelegenen Strecken, die $\bar{x}$ als einen Endpunkt enthalten, in Richtung auf $\bar{x}$ nicht zu.*

Nach (9) stellt $\bar{x} \in K_M^{\bar{x}}$ eine Vorbedingung für ein lokales Minimum der Aufgabe (1) dar; aus Corrolar (13) folgt nun, daß es in $K_M^{\bar{x}} \cap M$ auch höchstens ein lokales strenges Minimum geben kann.

Liegt ein Punkt $\bar{x}$ aus M nicht in $K_M^{\bar{x}}$, so können nur in solchen Punkten $\hat{x}$ aus $K_M^{\bar{x}}$ lokale Minima von (1) angenommen werden, deren zugehörige K-Mengen $K_M^{\hat{x}}$ mit $K_M^{\bar{x}}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben (vgl. dazu (9) und (10)). Wenn speziell $\hat{x}$ ein Punkt aus dem relativen Inneren von $K_M^{\bar{x}}$ ist, dann müßte $K_M^{\hat{x}}$ die K-Menge $K_M^{\bar{x}}$ umfassen (vgl. dazu (6)).

Eine weitere Einschränkung für die Lage möglicher lokaler Minima liefert die nachfolgende Eigenschaft:

(14) **Corrolar.** *Besitzt die Aufgabe (1) in $\bar{x} \in M$ ein lokales strenges Minimum und liegt $\bar{x}$ in $K_M^{\hat{x}}$ mit $\hat{x} \in M$, so kann die Aufgabe im relativen Innern von $K_M^{\hat{x}}$ kein weiteres lokales Minimum besitzen.*

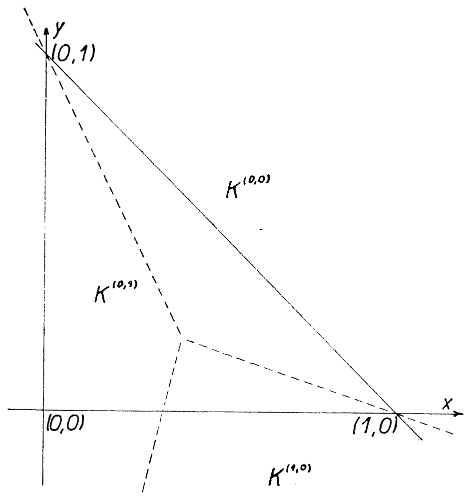
Beweis. Es sei $\tilde{x}$ ein Punkt aus dem relativen Inneren von $K_M^{\hat{x}}$ mit $\tilde{x} \neq \bar{x}$, in dem $f(x, x)$ über M ein lokales Minimum hat; nach (9) folgt $\tilde{x} \in K_M^{\tilde{x}}$. Der Punkt $\tilde{x}$ liegt dann insbesondere auch in der K-Menge $K_M^{x^v} = K_M^{\tilde{x}} \cap K_M^{\hat{x}}$ (vgl. (5)). Gilt $K_M^{x^v} \neq K_M^{\hat{x}}$, so enthält $K_M^{x^v}$ nur Randpunkte von $K_M^{\hat{x}}$ (vgl. dazu (6)), das widerspricht aber der Wahl von $\tilde{x}$ als relativ innerem Punkt von $K_M^{\hat{x}}$. Es bleibt also der Fall $K_M^{x^v} = K_M^{\hat{x}}$ zu untersuchten. Das bedeutet aber, daß $\bar{x}$ auch in $K_M^{\tilde{x}}$ liegt. Nach Corrolar (13) nimmt dann $f(x, x)$ entlang der Strecke $G(\bar{x}, \tilde{x})$ von $\bar{x}$ nach $\tilde{x}$ nicht zu, d.h. aber, daß in $\bar{x}$ kein lokales strenges Minimum eintreten kann, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Da $\tilde{x}$ beliebig aus dem relativen Inneren von $K_M^{\hat{x}}$ gewählt war, ist die Behauptung gezeigt.

Die Aussage des Corrolars (14) gilt im allgemeinen nicht, falls die Randpunkte der dort betrachteten Menge $K_M^{\hat{x}}$ in die Behauptung einbezogen werden; anders formuliert: in einer K-Menge der Aufgabe (1) können mehr als ein lokales strenges Minimum dieser Aufgabe liegen. Ein Beispiel dafür liefert die Aufgabe

$$(15) \qquad \min \{x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 4y \mid x + y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\} ;$$

sie besitzt in den Punkten (1,0) und (0,1) lokale strenge Minima, beide liegen auf dem Rande der K-Menge $K^{(0,0)}$,

$$K^{(0,0)} = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 3y \geqq 1,\ 3x + 2y \geqq 2\} .$$



Die beigefügte Abbildung veranschaulicht den diskutierten Sachverhalt; an ihr kann man sich auch andere oben angeführte Eigenschaften verdeutlichen; es ist aber darauf hinzuweisen, daß die K-Mengen im allgemeinen nicht den ganzen A^n überdecken werden (falls nämlich M nicht beschränkt ist) und damit auch nicht notwendig den gesamten Restriktionsbereich M.

Literatur

[1] *Dinkelbach, W.:* Sensitivitätsanalysen und parametrische Optimierung. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1969.

[2] *Lommatzsch, K.:* Lineare parametrische Optimierung über allgemeinen konvexen Restriktionsbereichen. Sborník z II. celostátní konference O matematických metodách v ekonomii. Harmonia, 1972. Ekonomicko matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, Praha 1973.

[3] *Lommatzsch, K.:* Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme. Aplikace matematiky, 19 (1974), 193—197.

Souhrn

O POLOZE LOKÁLNÍCH MINIM ÚLOH KVADRATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

KLAUS LOMMATZSCH

Úloze minimalizace obecné kvadratické funkce na konvexním uzavřeném restrikčním oboru M se přiřazuje pomocí tzv. K-množin rozklad oboru M. Na základě takto získané struktury restrikčního oboru jsou dokázány věty o jednom směru nerostoucích hodnot kvadratické funkce a o možných polohách lokálních minim uvnitř systému K-množin.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Klaus Lommatzsch*, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Bertlin, Unter den Linden 6, 108 Berlin, DDR.