

Aplikace matematiky

Jaroslav Chudý

Beitrag zur kinematischen Synthese bei gegebener Polkonfiguration

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 184–192

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103529>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BEITRAG ZUR KINEMATISCHEN SYNTHESE
BEI GEGEBENER POLKONFIGURATION

JAROSLAV CHUDÝ

(Eingegangen am 11. Mai 1973)

1. Einleitung.

Bei Benützung der komplexen Symbolik repräsentieren wir die Komplanarbewegung $\mathcal{K}(\Sigma/S)$ der Gegebenen (Σ) (mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem Σ und dem Nullpunkt Ω) in der Rastebene (S) (mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem S und Nullpunkt O) durch die Gleichung

$$z = m(\vartheta) + \zeta \Theta,$$

wobei $\Theta = \exp j\vartheta$, j bedeutet die imaginäre Einheit und $\vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta}$ (durch den waagerechten Strich ist die konjugiert komplexe Zahl ausgedrückt) ist die Funktion des Zeitregimes dieser Bewegung. Soweit wir uns um die geometrische Synthese der Bewegung interessieren, kann ϑ als geometrischer Parameter der Bewegung interpretiert werden (der Winkel zwischen den ersten Koordinatenachsen S und Σ) und die Zeitableitungen können wir durch die Ableitungen nach diesem Parameter ersetzen. Mit $m(\vartheta)$ ist der Radiuskomplex¹⁾ der Bahnkurve des Nullpunktes Ω der Ebene (Σ) in der Ebene (S) bezeichnet, der auf den Nullpunkt O dieser Ebene bezogen ist.

Unter der Voraussetzung der Analytizität der Bewegung auf dem Definitionsintervall $I(\vartheta)$ existiert für die Bahnkurve des erzeugenden Punktes ($\zeta \in_r(\Sigma)^2$) die Taylorentwicklung

$$z(\vartheta + \Delta\vartheta) = z(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta\vartheta)^n z^{(n)}(\vartheta).$$

¹⁾ Als Radiuskomplex des Punktes $A(x; y)$ bezeichnen wir die komplexe Zahl $x + jy$ und repräsentieren ihn durch den Radiusvektor mit Anfangspunkt O und Endpunkt A .

²⁾ Dieses Symbol bringt zum Ausdruck, dass der Punkt (ζ) in der Ebene (Σ) fest gewählt ist.

Definieren wir den n -ten Pol ${}^n P$ der Bewegung \mathcal{K} durch die Gleichung $z^{(n)} = 0$, dann erhalten wir

$$m^{(n)} + j^n {}^n \zeta \Theta = 0 \Rightarrow {}^n \zeta = j^{2-n} m^{(n)} \overline{\Theta}$$

und

$${}^n z = m + {}^n \zeta \Theta \Rightarrow {}^n z = m + j^{2-n} m^{(n)}.$$

Die Beziehung für ${}^n z$, bzw. für ${}^n \zeta$ kann phasenartig als n -ter Rastpol, bzw. als n -ter Gangpol der Phase interpretiert werden; desgleichen aber auch global als parametrische Gleichungen der n -ter Rastpolbahn, bzw. der n -ter Gangpolbahn der Bewegung \mathcal{K} . Mit

$$z^{(n)} = m^{(n)} + j^n \zeta \Theta = m^{(n)} + j^n (z - m) = j^n (z - {}^n z)$$

folgt aus der Taylorentwicklung die Beziehung

$$z(\vartheta + \Delta\vartheta) = z(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (j \Delta\vartheta)^n (z(\vartheta) - {}^n z(\vartheta)),$$

wobei mit ${}^n z(\vartheta)$ der Radiuskomplex der n -ter Rastpolbahn, bezogen auf den Nullpunkt O , bezeichnet ist.

Vom geometrischen Standpunkt aus ist also der Bewegungsprozess gänzlich durch die Konfiguration aller seiner Rastpole in jeder Phase ϑ bestimmt.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Frage der Existenz einer Bewegung mit gewisser vorgegebener Polkonfiguration und untersuchen diejenigen Eigenschaften, aus welchen die geometrische Synthese in Form eines äquivalenten Rollens folgt.

2. Formulierung des Problems.

Sei a eine komplexe Konstante und k eine natürliche Zahl. Wir fragen nach der Existenz einer Bewegung \mathcal{K} , die analytisch auf $I(\vartheta)$ ist, deren Konfiguration ihrer Rastpole auf dem ganzen Intervall $I(\vartheta)$ die Eigenschaft

$$(1) \quad {}^{k+2} z - {}^{k+1} z = a({}^{k+1} z - {}^k z)$$

besitzt. Dabei interpretieren wir die Differenzen ${}^{k+2} z - {}^{k+1} z$, ${}^{k+1} z - {}^k z$ als Vektoren, die in den Punkten $({}^{k+1} z)$, bzw. $({}^k z)$ konstruiert sind. Da die Multiplikation mit der komplexen Zahl a geometrisch eine Drehung (um den Winkel $\arg a$) zusammengesetzt mit einer Dehnung (mit dem Modul $|a|$) bedeutet, wird durch die Eigenschaft (1) eine sehr einfache Konfiguration dreier nacheinander folgenden Rastpole der Ordnung k , $k+1$, $k+2$ in jeder Phase ausgedrückt. Aus der Gleichung für ${}^n z$ folgt aber, dass wenn die Eigenschaft (1) für ein gewisses k erfüllt ist, dann gilt diese auch für alle $k' \geq k$; die Konfiguration bleibt also in einer Polkette, die mit dem k -ten Glied anfängt, erhalten und sie ist in diesem Sinne invariant (die ersten bis $(k-1)$ -ten Glieder dieser Kette müssen allgemein diese Konfigurationseigenschaft nicht haben).

Die Konfigurationseigenschaft (1) ist äquivalent mit der komplexen linearen Differentialgleichung der Ordnung $(k + 2)$ mit konstanten Koeffizienten für $m(\vartheta)$:

$$(2) \quad m^{(k+2)} - j(1 + a)m^{(k+1)} - am^{(k)} = 0.$$

3. Existenz der Bewegung mit der Eigenschaft (1) und ihre Darstellung.

Da die charakteristischen Werte der Gleichung (2) gleich $\lambda_1 = j$; $\lambda_2 = aj$; $\lambda_3 = \dots = \lambda_{k+2} = 0$ sind, hat die allgemeine Lösung der Gleichung (2) die Form

$$\begin{aligned} m &= c_1\Theta + P_k(\vartheta), & \text{für } a = 0 \\ m &= (c_1 + c_2\vartheta)\Theta + P_{k-1}(\vartheta), & \text{für } a = 1 \\ m &= c_1\Theta + c_2\Theta^a + P_{k-1}(\vartheta), & \text{für } a \neq 0, a \neq 1 \end{aligned}$$

wobei

$$P_i(\vartheta) = \sum_{s=0}^i \gamma_s \vartheta^s \quad \text{und} \quad c_1, c_2, \gamma_0, \dots, \gamma_i$$

sind beliebige komplexe Konstanten. Damit existiert eine Bewegung mit der Eigenschaft (1) und ihre Darstellung ist nach der Wahl des Systems Σ durch die Gleichung

$$\begin{aligned} z &= P_k(\vartheta) + \zeta\Theta, & \text{für } a = 0 \\ z &= c\vartheta\Theta + P_{k-1}(\vartheta) + \zeta\Theta, & \text{für } a = 1 \\ z &= c\Theta^a + P_{k-1}(\vartheta) + \zeta\Theta, & \text{für } a \neq 0, a \neq 1 \end{aligned}$$

gegeben; c bedeutet eine beliebige komplexe Konstante.

Bei der Synthese der Bewegung beschränken wir uns auf den Fall $k = 1$, d.h. auf Bewegungen für die die Eigenschaft (1) für jedes natürliche k erfüllt ist.

4. Fall $k = 1$; äquivalente Rollen.

Im Falle $k = 1$ ist die Bewegung nach der Wahl des Systems S durch eine der Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= c\vartheta + \zeta\Theta, & \text{für } a = 0 \\ z &= c\vartheta\Theta + \zeta\Theta, & \text{für } a = 1 \\ z &= c\Theta^a + \zeta\Theta, & \text{für } a \neq 0, a \neq 1 \end{aligned}$$

repräsentiert.

Vom Standpunkt den kinematischen Synthese aus kann man $c = 1$ setzen, sodass

die Bewegung durch eine der Gleichungen

$$(3) \quad z = \vartheta + \zeta\Theta, \quad \text{für } a = 0$$

$$(4) \quad z = \vartheta\Theta + \zeta\Theta, \quad \text{für } a = 1$$

$$(5) \quad z = \Theta^a + \zeta\Theta, \quad \text{für } a \neq 0, a \neq 1$$

repräsentiert ist.

Wir bestimmen die ersten Polbahnen 1z , ${}^1\zeta$ der Bewegungen (3), (4), (5).

a) Für die Bewegung (3) ist

$${}^1z = \vartheta + j; \quad {}^1\zeta = j\bar{\Theta},$$

so dass die Bewegung (3) der geometrischen zyklodalen Bewegung mit der Geradenbasis äquivalent ist, bei der der Kreis $\{\zeta, 0\} - 1 = 0$ über der Geraden $[z - j, 1] = 0$ rollt. Da diese Behauptung umgekehrt werden kann, ist die Konfigurationseigenschaft der ersten drei Pole, wobei der zweite mit dem dritten zusammenfällt, für die geometrische zyklodale Bewegung charakteristisch.

Wegen ${}^nz = \vartheta$ für $n \geq 2$ fallen alle Rastpolbahnen angefangen von der zweiten Ordnung mit der Geraden $[z, 1] = 0$, die durch den Nullpunkt O parallel zur ersten Rastpolbahn hindurchgeht, zusammen.

b) Für die Bewegung (4) ist

$${}^1z = j\Theta, \quad {}^1\zeta = j - \vartheta$$

und diese ist somit äquivalent zur geometrischen Evolventenbewegung mit der Kreisbasis, bei der die Gerade $[z - j, 1] = 0$ über dem Kreis $\{z, 0\} - 1 = 0$ rollt; die Bewegung ist zu der in a) beschriebenen Bewegung umkehrbar. Da diese Behauptung wieder umgekehrt werden kann, ist die Konfigurationseigenschaft ${}^3z - {}^2z = {}^2z - {}^1z$ für die geometrische Evolventenbewegung charakteristisch.

Wegen ${}^nz = jn\Theta$ bilden die Rastpolbahnen höherer Ordnungen eine Schar konzentrischer Kreise.

c) Für die Bewegung (5) ist

$${}^1z = (1 - a)\Theta^a, \quad {}^1\zeta = -a\Theta^{a-1}.$$

Wegen der Voraussetzung $a \neq 0, a \neq 1$ können beide Polbahnen durch dieselbe Gleichung (6): $z = B\Theta^{1/b}$ beschrieben werden, wobei

$$\text{für die } \begin{cases} \text{Rastpolbahn} \\ \text{Gangpolbahn} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 - a, \\ -a \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 1/a \\ 1/(a - 1) \end{cases}$$

³⁾ Mit $\{z_1, z_2\}$ wird das Produkt $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ und mit $[z_1, z_2]$ der Ausdruck $\frac{1}{2j} \left| \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{matrix} \right|$ bezeichnet; näheres betreffs dieser Symbole siehe [1].

zu setzen ist. Durch Einführung der Polarkoordinaten ($z\bar{z} = \varrho^2$, $z/\bar{z} = \exp 2j\varphi$) kann (6) unter der Voraussetzung $\operatorname{Re} b \neq 0$ in der Form

$$\varrho = (\operatorname{mod} B^b)^{\operatorname{Re} -1b} \exp \frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Re} b} \varphi$$

ausgedrückt werden. Die beiden Polbahnen sind in diesem Fall logarithmische Spiralen mit dem asymptotischen Punkt im Nullpunkt ihrer Ebene; die Bewegung ist also zur geometrischen Spiralenbewegung äquivalent (die logarithmische Spirale rollt über der logarithmischen Spirale). Diese Bewegung ist aber von der allgemeinen Spiralenbewegung verschieden, da sie durch die Konfigurationskonstante a , die zu den „Modulen“ der beiden Spiralen in der Beziehung

$$\left(\frac{\operatorname{Re} b}{\operatorname{Im} b}\right)_S - \left(\frac{\operatorname{Re} b}{\operatorname{Im} b}\right)_X + \operatorname{Im}^{-1} a = 0^4)$$

steht, spezialisiert ist. Die Bewegung (5) ist somit im allgemeinen Fall mit einer gewissen Spiralenbewegung äquivalent.

Die Rastpolbahnen höherer Ordnungen ${}^n z = (1 - a^n) \Theta^a$ bilden in diesem allgemeinen Fall eine Schar von logarithmischen Spiralen mit gemeinsamen asymptotischen Punkt im Nullpunkt O .

Die ausgeschlossenen Fälle $b = \bar{b} \Leftrightarrow a = \bar{a}$ und $b = -\bar{b} \Leftrightarrow a = -\bar{a}$ bzw. $\operatorname{Re} a = 1$, bei denen (6) zu einem Kreis oder einer Gerade ausartet, werden im nächsten Absatz untersucht.

5. Ausgeartete Fälle der Spiralenbewegung.

a) Im Falle $a = \bar{a}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ ist nach 4.c) die erste Rastpolbahn der Kreis $\{z, 0\} = (1 - a)^2$ und die erste Gangpolbahn der Kreis $\{\zeta, 0\} = a^2$. Die Bewegung ist also äquivalent zur geometrischen zyklodalen Bewegung mit der Kreisbasis und sie ist für $a < 0$ hypozykloidisch (für $a = -1$ elliptisch) und für $a > 0$ epizykloidisch (für $a > 1$ perizykloidisch).

Die Rastpolbahnen n -ter Ordnung bilden eine Schar von konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt O .

b) Im Falle $a = -\bar{a}$, d.h. $a = j\beta$, $\beta = \bar{\beta} \neq 0$, wird durch die Gleichung ${}^1 z = (1 - j\beta) \exp(-\beta\vartheta)$ die Gerade $[z, 1 - \beta] = 0$ (genauer Halbgerade) und durch die Gleichung ${}^1 \zeta = -j\beta \bar{\Theta} \exp(-\beta\vartheta)$ die logarithmische Spirale mit dem asymptotischen Punkt im Nullpunkt Ω der Ebene (Σ) ausgedrückt. Die Bewegung ist somit

⁴⁾ Der Index S , bzw. Σ bedeutet, dass es sich um Größen handelt, die auf die Rast-, bzw. Gangpolbahn bezogen sind.

zur Spiralenbewegung mit der Geradenbasis (die logarithmische Spirale rollt über der Geraden) äquivalent.

Die Rastpolbahnen n -ter Ordnung ${}^n z = (1 - j^n \beta^n) \exp(-\beta \vartheta)$ sind die Geraden $[z, 1 - j^n \beta^n] = 0$ und diese bilden ein Bündel mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt O .

Im speziellen Fall $\beta = \pm 1$ ist die Polkette in jeder Phase ein im positiven (für $\beta = 1$), bzw. negativen (für $\beta = -1$) Sinn durchlaufendes Rechteck.

c) Im Falle $a = 1 + j\beta, \beta = \bar{\beta} \neq 0$ ist durch die Gleichung ${}^1 z = -j\beta \Theta \exp(-\beta \vartheta)$ eine logarithmische Spirale mit dem asymptotischen Punkt O und durch die Gleichung ${}^1 \zeta = -(1 + j\beta) \exp(-\beta \vartheta)$ die Gerade $[\zeta, 1 + j\beta] = 0$ ausgedrückt (genauer Halbgerade). Die Bewegung ist mit dem Rollen der Geraden über der logarithmischen Spirale äquivalent und zu der in b) beschriebenen Bewegung umkehrbar.

Die Rastpolbahnen n -ter Ordnung ${}^n z = (-j\beta)^n \Theta \exp(-\beta \vartheta)$ bilden eine Schar von logarithmischen Spiralen mit gemeinsamen asymptotischen Punkt im Nullpunkt O .

d) Da die Behauptungen bezüglich der einzelnen Typen von Bewegungen, die aus der Konfigurationsbedingung folgen, in allen Fällen a), b) c) umgekehrt werden können, ist damit gezeigt, dass die Konfigurationseigenschaft für die betrachteten Fälle der komplexen Konstante a allein charakteristisch für diese Bewegungen ist.

Mit der Bestimmung des äquivalenten Rollens für die ausgearteten Fälle sind auch die Bewegungen mit den entsprechenden Eigenschaften der Polkette geometrisch synthetisiert.

6. Grenzpol.

Die analytische Polkette in der Phase ϑ ist durch die Folge der Pole dieser Phase bestimmt; die Radiuskomplexe der Pole bilden die Folge $\{{}^n z(\vartheta)\}_1^\infty$. Wenn diese Folge konvergiert, d.h. wenn der eigentliche Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^n z(\vartheta) = {}^\infty z(\vartheta)$ existiert, dann sagen wir, dass für die Polkette in der Phase ein Grenzpol der Phase ϑ existiert und dessen Radiuskomplex bezeichnen wir mit ${}^\infty z(\vartheta)$.

Aus ${}^n z = m + j^{2-n} m^{(n)}$ folgt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Grenzpoles in der Form $\lim m^{(n)} = 0$. Wenn wir die Existenz des Grenzpoles für die in dieser Arbeit betrachteten Bewegungen, deren Gleichungen in Absatz 3) (der Grenzpol hängt nicht von der Wahl der natürlichen Zahl k ab) angeführt sind, untersuchen, dann zeigt es sich, dass der Grenzpol nur für diejenigen Bewegungen existiert, für die $|a| < 1$ ist; dieser existiert dann auf dem ganzen Intervall $I(\vartheta)$ und es gilt ${}^\infty z(\vartheta) = m(\vartheta)$, d.h. in jeder Phase befindet er sich im Nullpunkt O der Gangebene (Σ) .

7. Zusammenfassung.

Die Abhängigkeit von der komplexen Konstante a der einzelnen in Absatz 4) und 5) untersuchten Bewegungen ist schematisch in der Abb. 1 in der komplexen Ebene (a) darstellt. Es sind die ersten vier Pole eingezeichnet, und zwar so, dass die ersten zwei

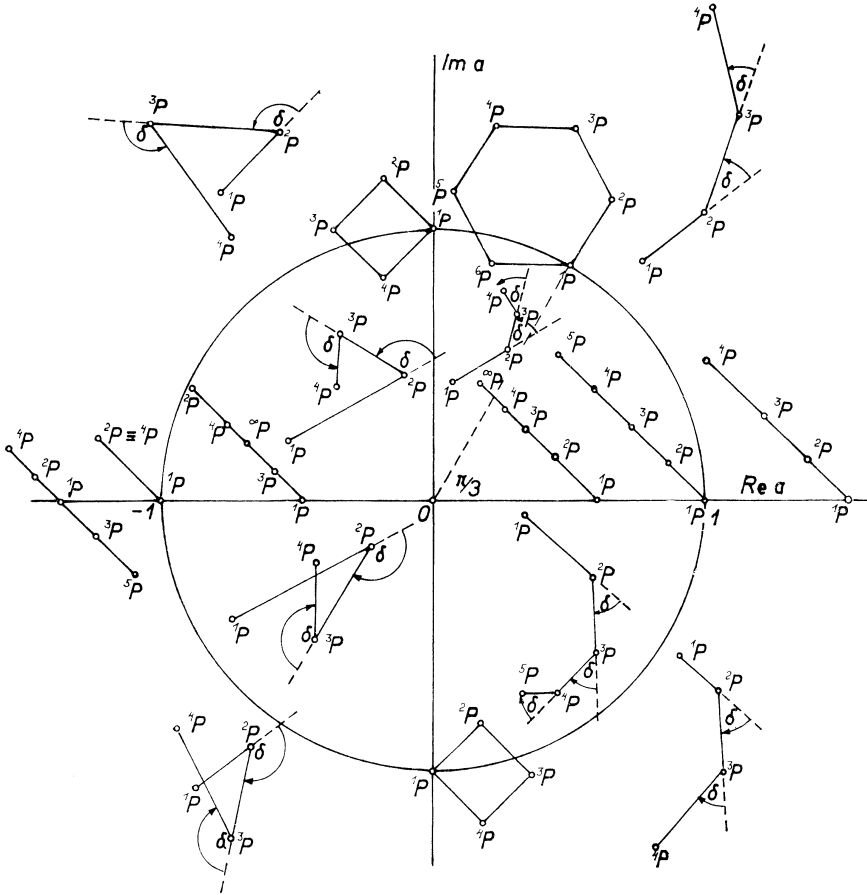


Abb. 1.

beliebig gewählt sind, wobei der erste in Abhängigkeit von der Konstante a in dem entsprechenden Teil der Ebene (a) liegt; der dritte und vierte Pol sind durch Drehung um den Winkel $\delta = \arg a$ und Dehnung mit dem Modul $|a|$ konstruiert. Der Kreis $|a| = 1$ teilt die Ebene (a) in zwei Teile; für die Werte a im Innern dieses Kreises existiert der Grenzpol, für die Werte auf diesem Kreis und ausserhalb existiert der Grenzpol nicht. Für die Werte a auf dem Kreis $|a| = 1$ liegt die Polkette in jeder

Phase auf dem Kreis $\{z, \Theta^a\} = (\text{mod } \Theta^a)^2$, der durch den Nullpunkt O hindurchgeht. Ist die komplexe Konstante a derart gewählt, dass zu ihr eine kleinste natürliche Zahl p so existiert, dass $a^p = 1$ ist, dann ist die Polkonfiguration in jeder Phase ein regelmässiges p -Eck.

8. Abschluss.

Das Problem der geometrischen Synthese aus gegebener Polkonfiguration hat ihren Ursprung in den Aufgaben, die schon von L. Lecornu (1891) und G. Koenigs (1897) gelöst wurden; siehe [1]. Die in der Arbeit angeführten Resultate für die Zykloidalbewegung und ihre Grenzfälle sind bekannt und können in der Literatur gefunden werden; siehe z.B. [2] und [3].

Der einigende Gesichtspunkt, der die Zykloidalbewegungen als Spezialfälle der Spiralbewegung umfasst, sowie auch die Eigenschaften des Grenzpoles, sind originell.

Das Problem der kinematischen Synthese haben wir vom Standpunkt der allgemeinen Konfiguration dreier nacheinander folgenden Pole betrachtet; es wurden gewisse grundlegenden Typen von Bewegungen, die den betrachteten Prozess durch äquivalentes Rollen realisieren, gefunden. Es ist interessant, dass G. C. Steward beim Studium sogenannter Kardinalpunkte der Bewegung (womit die analytische Polkette der Bewegung verstanden wird) im wesentlichen zu denselben Typen von Bewegungen gekommen ist; seine Untersuchungen beschränken sich aber nur auf die Konfigurationseigenschaften und die Fragen der Synthese bleiben ausser Betracht; siehe [4] und [5].

Literatur

- [1] Pirko, Z.: Úvod do kinematické geometrie, Praha 1960, SNTL.
- [2] Blaschke, W., Müller, H. R.: Ebene Kinematik, München 1956.
- [3] Müller, H. R.: Kinematik, Berlin 1963.
- [4] Steward, G. C.: On the cardinal point in plane Kinematics. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 244 (1951), 19–46.
- [5] Steward, G. C.: On certain configuration of the cardinal points in plane Kinematics. Acta Math. 88 (1952), 371–383.

Souhrn

PŘÍSPĚVEK KE KINEMATICKÉ SYNTÉZE DANÉ PÓLOVÉ KONFIGURACE

JAROSLAV CHUDÝ

V práci je hledána rovnice komplanárního euklidovského pohybu, který má předepsanou pólovou konfiguraci té vlastnosti, že pro tři po sobě následující pevné póly platí podmínka (1). Tato podmínka vede na diferenciální rovnici pro funkci $m(\vartheta)$, jejíž řešení dává tři různé druhy pohybů; pro každý z nich je vyšetřena ekvivalence s geometrickým pohybem jako kotálení. Pro poslední druh, nazvaný geometrickým spirálním pohybem byly určeny speciální případy (tzv. degenerované), v nichž jedna ze spirálních polhodií degeneruje v přímku příp. obě v kružnici. Ve všech případech je ukázána charakterističnost konfigurační vlastnosti pro příslušné pohyby. Závislost jednotlivých případů těchto pohybů na konfigurační komplexní konstantě je přehledně uvedena na obrázku.

Anschrift des Verfassers: Doc. Jaroslav Chudý, Katedra matematiky fakulty strojní ČVUT, 120 00 Praha 2, Karlovo nám. 13.