

Aplikace matematiky

Jaroslav Záhora

Berührungsnomogramme mit Zykeln

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 139–151

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103525>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BERÜHRUNGSNOMOGRAMME MIT ZYKELN

JAROSLAV ZÁHORA

(Eingegangen am 22. Oktober 1970)

1. EINLEITUNG

Ein Zykel (orientierter Kreis) mit dem Mittelpunkt (ξ, η) und orientiertem Halbmesser ζ hat die Gleichung

$$(1) \quad u\xi + v\eta + 1 - w\zeta = 0,$$

wo u, v, w die Speerkoordinaten sind. Die Koordinaten u, v sind die Plücker'sche Linienkoordinaten, die Koordinate w ist eine weitere Koordinate, die mit den Linienkoordinaten u, v die Beziehung

$$(2) \quad u^2 + v^2 = w^2$$

befriedigt. (Siehe z.B. [5], Seite 11 u.w.)

Der Zykel (1) liegt mit dem entgegengesetzt orientiertem Zykel $u\xi + v\eta + 1 + w\zeta = 0$ auf demselben Kreise mit dem Mittelpunkt (ξ, η) und Halbmesser $|\zeta|$. Jeden Punkt (ξ, η) fassen wir als Zykel mit dem Halbmesser $\zeta = 0$ auf. Die Gleichung eines solchen sogenannten Nullzykels ist $u\xi + v\eta + 1 = 0$.

2. BERÜHRUNGSNOMOGRAMME MIT ZYKELN

Definition 2.1. Wir nennen Berührungsnomogramm mit Zykeln, das die Gleichung

$$(3) \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (\text{wo } a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3, a_i, b_i \text{ Konstanten sind})$$

darstellt, drei Systeme von Zykeln

$$(4) \quad f_i u + g_i v + 1 - h_i w = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (f_i, g_i, h_i \text{ sind Funktionen nur der Veränderlichen } x_i), \text{ die diese Bedingungen befriedigen:}$$

- (5) Jedem Werte ${}^k x_i$ aus dem Intervall $\langle a_i, b_i \rangle$ ist ein Zykel des Systems $f_i u + g_i v + 1 - h_i w = 0$ zugeordnet, der mit dem Werte ${}^k x_i$ beziffert ist. Zwei verschiedenen Werten ${}^k x_i \neq {}^m x_i$ derselben Veränderlichen sind zwei verschiedene Zykeln desselben Systems zugeordnet.
- (6) Die drei Werte ${}^0 x_1, {}^0 x_2, {}^0 x_3$ genügen der Gleichung (3) dann und nur dann, wenn ein gemeinsamer Speer existiert, der die mit den Werten ${}^0 x_1, {}^0 x_2, {}^0 x_3$ bezifferte Zykeln berührt.

Satz 2.1. Ein Berührungsnomogramm mit drei Systemen von Zykeln (4) stellt die Beziehung

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 1, & g_1, & h_1 \\ 1, & g_2, & h_2 \\ 1, & g_3, & h_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1, & 1, & h_1 \\ f_2, & 1, & h_2 \\ f_3, & 1, & h_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1, & g_1, & 1 \\ f_2, & g_2, & 1 \\ f_3, & g_3, & 1 \end{vmatrix}^2$$

dar.

Beweis. Die Beziehung (7) ergibt sich durch Elimination der Koordinaten u, v, w aus den Gleichungen (4) und (2).

Bemerkung 2.1. Im Aufsätze [6] ist bewiesen, daß ein Berührungsnomogramm mit drei Systemen von Kreisen

$$(8) \quad k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

stellt vier Beziehungen

$$(9) \quad \begin{vmatrix} f_1, & h_1, & 1 \\ f_2, & {}^1 \varepsilon h_2, & 1 \\ f_3, & {}^2 \varepsilon h_3, & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1, & h_1, & 1 \\ g_2, & {}^1 \varepsilon h_2, & 1 \\ g_3, & {}^2 \varepsilon h_3, & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1, & g_1, & 1 \\ f_2, & g_2, & 1 \\ f_3, & g_3, & 1 \end{vmatrix}^2$$

dar, die sich nur durch verschiedene Kombinationen der Werte ${}^1 \varepsilon = \pm 1, {}^2 \varepsilon = \pm 1$ unterscheiden. Wollen wir auf diesem Nomogramm einer der vier Beziehungen entsprechende Werte lesen, so nehmen wir als Ableseindex die äussere (innere) gemeinsame Tangenten der Kreise k_1 und k_2 , wenn ${}^1 \varepsilon h_1 h_2 > 0, ({}^1 \varepsilon h_1 h_2 < 0)$ und äussere (innere) gemeinsame Tangenten der Kreise k_1 und k_3 , wenn ${}^2 \varepsilon h_1 h_3 > 0, ({}^2 \varepsilon h_1 h_3 < 0)$. Führen wir die Zykeln (4) statt der Kreise (8) ein, so vermeiden wir die Ablesevierfachheit des Nomogramms.

Satz 2.2. Seien

$$(10) \quad {}^1 a u + {}^1 b v + 1 - {}^1 c w = 0$$

und

$$(11) \quad {}^2 a u + {}^2 b v + 1 - {}^2 c w = 0 \quad (\text{wo } {}^1 a, {}^1 b, {}^1 c, {}^2 a, {}^2 b, {}^2 c \text{ Konstanten sind})$$

zwei verschiedene Zykeln. Dann existiert ein Berührungsnomogramm mit Zykeln, in dem die Zykeln (10) und (11) mit zwei verschiedenen Werten derselben Veränderlichen beziffert sind.

Beweis. Im Berührungsnomogramme, dessen erstes System von Zykeln

$$[(^2a - ^1a)x_1 + ^1a]u + [(^2b - ^1b)x_1 + ^1b]v + 1 - [(^2c - ^1c)x_1 + ^1c]w = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

ist und das zweite und dritte System beliebig sind, wird der Zykel (10) mit dem Werte $x_1 = 0$ und der Zykel (11) mit dem Werte $x_1 = 1$ beziffert.

Satz 2.3. Seien (10), (11) und

$$(12) \quad {}^3au + {}^3bv + 1 - {}^3cw = 0$$

drei verschiedene Zykeln. ($^ia, ^ib, ^ic$, wo $i = 1, 2, 3$, sind Konstanten.) Dann existiert ein Berührungsnomogramm mit Zykeln, in dem die Zykeln (10), (11) und (12) mit irgendwelchen Werten der untereinander verschiedenen Veränderlichen x_1, x_2 und x_3 beziffert sind.

Beweis. Im Berührungsnomogramm mit drei Systemen von Zykeln $^iau + ^ibv + 1 - x_iw = 0$, ($i = 1, 2, 3$), wo $^ic - k_i \leq x_i \leq ^ic + k_i$, k_i positive Konstanten sind, werden die Zykeln (10), (11) bzw. (12) mit den Werten $x_1 = ^1c$, $x_2 = ^2c$ bzw. $x_3 = ^3c$ beziffert.

3. TRANSFORMATIONEN DER BERÜHRUNGSNOMOGRAMME MIT ZYKELN. LAGUERRE'SCHE GRUPPE

Legen wir durch den Anfangspunkt des kartesischen Koordinatensystems ($\xi; \eta$) in der Grundebene des Nomogramms ein Lot ζ zu dieser Ebene, erhalten wir ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatendreieck des dreidimensionalen Raumes. Ordnen wir jedem Punkte $M(\xi; \eta; \zeta)$ dieses Raumes den Zykel (1) zu, erhalten wir eine eindeutige Abbildung der Raumpunkte auf die Menge von Zykeln in der Grundebene. (Siehe [1], [3], [5].)

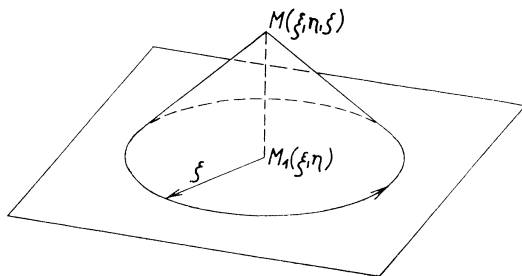


Fig. 1. Zyklische Projektion eines Raumpunktes M .

Definition. Den Zykel (1) nennen wir zyklische Projektion des Punktes $M(\xi, \eta; \zeta)$. Die Kegelfläche mit dem Scheitel $M(\xi; \eta; \zeta)$, deren Geraden den Zykel (1) schneiden, nennen wir isotrope Kegelfläche, (siehe Fig. 1), jede Gerade jeder isotropen Kegelfläche nennen wir isotrope Gerade und jede Berührungsebene jeder isotropen Kegelfläche nennen wir isotrope Ebene. Die zyklische Projektion einer Gerade nennen wir lineare Zykelreihe, die zyklische Projektion einer Ebene nennen wir lineares Zykelveld.

Den Transformationen der Raumpunkte M entsprechen in der Grundebene die Transformationen der Zykel.

Definition 3.1. Wir bezeichnen P^7 die Gruppe solcher affinner Transformationen

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi' &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14} \\ \eta' &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24}, \quad \text{wo } |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \\ \zeta' &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34} \end{aligned}$$

welche die folgende Eigenschaft haben: Befriedigen die Koordinaten zweier Punkte $M_1(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$, $M_2(\xi_2; \eta_2; \zeta_2)$ die Beziehung

$$(14) \quad (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 - (\zeta_2 - \zeta_1)^2 = 0,$$

so befriedigen dieselbe Beziehung (14) auch die gestrichelte Koordinaten der Bilder M'_1, M'_2 der Punkte M_1, M_2 . (Siehe [1].)

Bemerkung. Die Bedingung (14) bedeutet, daß das Bild jeder isotropen Geraden wieder eine (allgemein andere) isotrope Gerade ist.

Es gilt dieser

Satz 3.1. Die Affinität (13) gehört der Gruppe P^7 dann und nur dann an, wenn die Elemente der Determinante $|a_{ik}|$ folgende Gleichungen befriedigen:

$$(15) \quad \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = -(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2), \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} &= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = \\ &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Sind $M_1(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$, $M_2(\xi_2; \eta_2; \zeta_2)$ zwei Punkte, $M'_1(\xi'_1; \eta'_1; \zeta'_1)$, $M'_2(\xi'_2; \eta'_2; \zeta'_2)$ deren Bilder in der Affinität (13), gilt nach Berechnung

$$(16) \quad \begin{aligned} (\xi'_2 - \xi'_1)^2 + (\eta'_2 - \eta'_1)^2 - (\zeta'_2 - \zeta'_1)^2 &= \\ &= (\xi_2 - \xi_1)^2 (a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2) + (\eta_2 - \eta_1)^2 (a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2) + \\ &+ (\zeta_2 - \zeta_1)^2 (a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2) + \\ &+ 2(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32}) + \end{aligned}$$

$$+ 2(\xi_2 - \xi_1)(\zeta_2 - \zeta_1)(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33}) + \\ + 2(\eta_2 - \eta_1)(\zeta_2 - \zeta_1)(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33}).$$

Wir nehmen erstens an, daß die Elemente der Determinante $|a_{ik}|$ den Gleichungen (15) genügen. Gilt für die Punkte $M_1(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$ und $M_2(\xi_2; \eta_2; \zeta_2)$ die Gleichung (14), dann ergibt sich gemäß (15) und (16) die Beziehung

$$(17) \quad (\xi'_2 - \xi'_1)^2 + (\eta'_2 - \eta'_1)^2 - (\zeta'_2 - \zeta'_1)^2 = 0$$

für die Bilder $M'_1(\xi'_1; \eta'_1; \zeta'_1)$ und $M'_2(\xi'_2; \eta'_2; \zeta'_2)$ der Punkte M_1 und M_2 .

Wir nehmen zweitens an, daß die Transformation (13) der Gruppe P^7 zugehört. Wählen wir speziell $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(1; 0; 1)$. Wir können uns leicht überzeugen, daß die Koordinaten dieser Punkte M_1, M_2 die Gleichung (14) befriedigen. Setzen wir die Koordinaten der Punkte M_1 und M_2 in (16) ein, erhalten wir gemäß (17) die Gleichung

$$(18) \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + \\ + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33}) = 0.$$

Aus der speziellen Wahl $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(1; 0; -1)$ ergibt sich ähnlich

$$(19) \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 - \\ - 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33}) = 0.$$

Durch Addierung der Gleichungen (18) und (19) ergibt sich

$$(20) \quad A \equiv a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = -(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2)$$

und durch Subtraktion der Gleichung (19) von der Gleichung (18) ergibt sich

$$(21) \quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = 0.$$

Wählen wir weiter speziell $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(0; 1; 1)$ und dann $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(0; 1; -1)$, erhalten wir ähnlich die Beziehungen

$$(22) \quad A \equiv a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = -(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2)$$

und

$$(23) \quad a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0$$

Gemäß (20), (21), (22) und (23) hat die Gleichung (16) die Form

$$(16') \quad (\xi'_2 - \xi'_1)^2 + (\eta'_2 - \eta'_1)^2 - (\zeta'_2 - \zeta'_1)^2 = \\ = A[(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 - (\zeta_2 - \zeta_1)^2] + \\ + 2(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1)(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32}).$$

Wählen wir endlich speziell $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1)$, gilt gemäß (16') die Gleichung

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0,$$

was zu beweisen war.

Definition 3.2. Eine Transformation der Zykel in der Grundebene, die einer Affinität aus P^7 entspricht, nennen wir die Transformation von Laguerre.

Definition 3.3. Die Gruppe aller Transformationen von Laguerre, die der Gruppe P^7 entspricht, nennen wir die Gruppe von Laguerre L^7 .

In [1] wurden diese zwei Sätze bewiesen:

Satz 3.2. Die Transformationen der Gruppe von Laguerre erfüllen diese Bedingungen:

- (24) Jedem Zykel $u\xi + v\eta + 1 - w\zeta = 0$ ist ein Zykel $u\xi' + v\eta' + 1 - w\zeta' = 0$ eineindeutig zugeordnet.
- (25) Jeder Menge von Zykeln, die einen festen Speer p berühren, ist eine Menge von Zykeln zugeordnet, die einen (allgemein anderen) Speer p' berühren. Diese Zuordnung ist eineindeutig.

Satz 3.3. Jede Zykeltransformation in der Ebene, die die Bedingungen (24) und (25) erfüllt, ist die Transformation der Laguerre'schen Gruppe.

Es gilt weiter

Satz 3.4. Eine Zykeltransformation bildet jedes Berührungsnomogramm mit Zykeln in ein solches Berührungsnomogramm ab, das dieselbe Beziehung (3) darstellt, dann und nur dann wenn diese Transformation der Laguerre'schen Gruppe zugehört.

Beweis. 1. Gehört die Zykeltransformation der Laguerre'schen Gruppe, so erfüllt sie nach dem Satz 3.2 die Bedingungen (24) und (25). Drei Zykelsysteme des Berührungsnomograms bilden sich in drei (allgemein andere) Zykelsysteme ab, die gemäß (24) die Bedingung (5) erfüllen. Setzen wir voraus, daß die drei Werte ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$ der Gleichung (3) genügen. Dann gibt es einen gemeinsamen Berührungsspeer der Zykel A, B bzw. C , die mit den Werten ${}^0x_1, {}^0x_2$ bzw. 0x_3 beziffert sind. Gemäß (25) gibt es einen gemeinsamen Berührungsspeer der Bilder A', B', C' von Zykeln A, B, C . Genügen die drei Werte ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$ der Gleichung (3) nicht, so gibt es keinen gemeinsamen Berührungsspeer der Zykel A, B, C . Aus der Eigenschaft (25) folgt, daß es auch keinen gemeinsamen Berührungsspeer der Zykel A', B', C' gibt.

2. Wenn eine Zykeltransformation der Gruppe von Laguerre nicht zugehört, erfüllt sich dem Satz 2.3 gemäß nicht die Bedingung (24) oder (25).

Setzen wir voraus, daß die Zykeltransformation die Bedingung (24) nicht befriedigt. Es gibt dann zwei verschiedene Zykel A, B , deren Bild $A' \equiv B'$ gemeinsam ist. Das Bild des Berührungsnomogramms, in dem die Zykel A und B mit verschiedenen Werten derselben Veränderlichen beziffert sind, (siehe Satz 2.2) erfüllt nicht die Bedingung (5).

Setzen wir voraus, daß es drei verschiedene Zykel A, B, C gibt, die einen gemeinsamen Speer berühren und deren Bilder A', B', C' keinen gemeinsamen Berührungsspeer haben. Dem Satz 2.3 gemäß gibt es ein Berührungsnomogramm mit Zykeln, in dem die Zykel A, B resp. C mit den Werten ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$ beziffert sind. Dabei gilt $F({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) = 0$. Das Bild dieses Berührungsnomogramms stellt nicht dieselbe Beziehung (3) dar, weil die Bedingung (6) nicht erfüllt ist.

Setzen wir voraus, daß die Zuordnung der Zykelmengen aus der Bedingung (25) nicht eindeutig ist. Dann existiert eine Menge M von Zykeln, die einen Speer p berühren und eine Menge N von Zykeln, die einen Speer $q \neq p$ berühren so, daß die Bilder M' und N' der Mengen M und N die Mengen von Zykeln sind, die denselben Speer p' berühren. Es ist klar, daß die Mengen $M - N$ und $N - M$ nicht leer sind. Wählen wir drei verschiedene Zykel A, B, C so daß $A \in M - N, B \in M - N, C \in N - M$ ist. Die Zykel A, B, C haben keinen gemeinsamen Berührungsspeer, doch deren Bilder berühren den Speer p' . Dem Satz 2.3 gemäß existiert so ein Berührungsnomogramm mit Zykeln, daß die Zykel A, B und C mit den Werten ${}^0x_1, {}^0x_2$ und 0x_3 beziffert sind. Dabei $F({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \neq 0$. Das Bild dieses Berührungsnomogramms stellt nicht dieselbe Beziehung (3) dar, weil die Bedingung (6) nicht erfüllt ist. Hiemit ist der Beweis beendet.

Wollen wir ein Berührungsnomogramm mit drei Systemen von Zykeln (4) durch eine Transformation aus der Laguerre'schen Gruppe abbilden, wählen wir zuerst die Affinität (13), die den Bedingungen (15) genügt. Jedem Zykel (4) ordnen wir den Punkt $M_i(f_i; g_i; h_i)$ des dreidimensionalen Raumes zu, finden das Bild $M'_i(f'_i; g'_i; h'_i)$ des Punktes M_i in der Affinität (13) und ordnen dem Punkte M'_i den Zykel $f'_i u + g'_i v + 1 - h'_i w = 0$ zu.

Die einfache Transformationen der Gruppe von Laguerre sind die Homotätie und die Dilatation. Bei der Homotätie mit dem Ähnlichkeitspunkt im Koordinatenanfangspunkt resp. bei der Dilatation (siehe [5]) hat die Matrix der Transformation (13) die Form

$$\left\| \begin{array}{cccc} a, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a, & 0 \end{array} \right\|, \quad a \neq 0 \quad \text{resp.} \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & d \end{array} \right\|, \quad d \neq 0.$$

Beispiel. Im Aufsatz [7] ist ein Berührungsnomogramm mit zwei Kreissystemen

$$(26) \quad \xi^2 + \eta^2 = \gamma^2 f^2,$$

$$(27) \quad (\xi - \beta / \cos \alpha)^2 + \eta^2 = \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

und einer Skala

$$(28) \quad \xi = \beta f' ; \quad \eta = 0$$

berechnet und konstruiert, das die Beziehung

$$(29) \quad f' = f / (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

abbildet. Dasselbst ist bewiesen, daß der Leseindex immer die äussere gemeinsame Tangente der Kreise (26) und (27) ist. Es ist also möglich statt des Kreissystems (26) ein mit (26) inzidentes System der positiv orientierten Zykel nehmen (in der Fig. 2 ist diese positive Orientation mit dem Pfeile in dem Uhrzeiger entgegengesetztem Sinne veranschaulicht) und statt des Kreissystems (27) ein mit (27) inzidentes System der negativ orientierten Zykel nehmen.

Die eineindeutige Abbildung der Zykelmenge in der Ebene $(\xi; \eta)$ auf die Raumpunkte $(\xi; \eta; \zeta)$ bildet das mit (26) inzidente System positiv orientierter Zykel auf das Punktsystem

$$(26') \quad M_1(0; 0; \gamma f)$$

und das mit (27) inzidentes System der negativ orientierten Zykel auf das Punktsystem

$$(27') \quad M_2(\beta / \cos \alpha; 0; -\gamma \operatorname{tg} \alpha)$$

ab. Die Punkte der Skala (28) als Nullzykel sind bei dieser Abbildung selbstadjungiert.

Bilden wir nun das Berührungsnomogramm aus der Fig. 2 durch eine Laguerre'sche Transformation ab. Dazu genügt die Systeme der Punkte (26'), (27'), und (28) durch die Transformation der Gruppe P^7 abzubilden und die zyklische Projektionen der abgebildeten Punkte konstruieren. Jede Transformation der Gruppe P^7 hat die Form (13), wobei die Koeffizienten die Gleichung (15) erfüllen. Man kann 7 Parameter wählen. Fordern wir, daß jeder Punkt der Achse (ξ) selbstadjungiert sei. Das wird erfüllt, wenn die Punkte $O(0; 0; 0)$ und $E(1; 0; 0)$ selbstadjungiert werden. Setzen wir die Koordinaten der Punkte $O = O'$ resp. $E = E'$ in die Gleichungen (13) ein, so bekommen wir diese Werte für die Koeffizienten der Transformation:

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0 \quad \text{resp.} \quad a_{11} = 1, \quad a_{21} = a_{31} = 0.$$

Die Matrix der Transformation hat nun die Form

$$(30) \quad \left\| \begin{array}{ccc} 1, & a_{12}, & a_{13}, & 0 \\ 0, & a_{22}, & a_{23}, & 0 \\ 0, & a_{32}, & a_{33}, & 0 \end{array} \right\|$$

Der Beziehung $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0$ bzw. (21) gemäß ergibt sich aus (30) $a_{12} = 0$ bzw. $a_{13} = 0$.

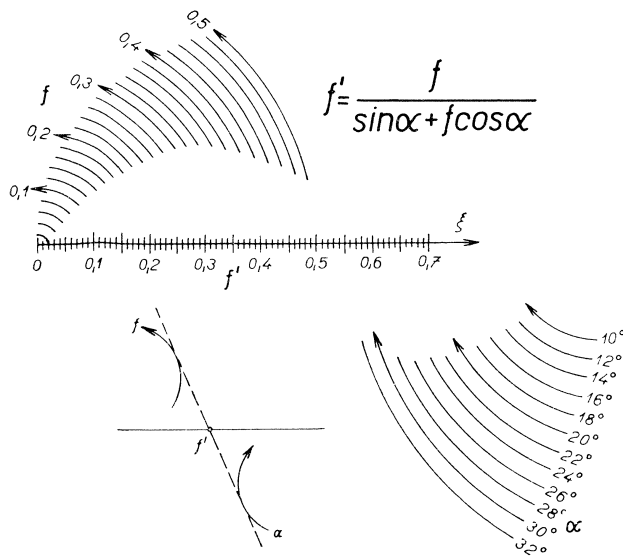


Fig. 2. Berührungsnomogramm mit zwei Zykelsysteme, das die Beziehung $f' = f/(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ darstellt.

Fordern wir noch, daß die Koordinate η' des Bildes des Punktes $(0; 0; 1)$ gleich 1 sei. Aus der zweiten Gleichung des Systems (13) ergibt sich $a_{23} = 1$, sodaß die Matrix der Transformation die Form

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_{22}, & 1, & 0 \\ 0, & a_{32}, & a_{33}, & 0 \end{vmatrix}$$

hat. Die bisher nicht bestimmte Elemente dieser Matrix befriedigen das System der Gleichungen (20), (22), (23). Die eine der vier möglichen Lösungen ist $a_{22} = \sqrt{2}$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = \sqrt{2}$. Wählen wir diese Lösung, hat die Transformation aus der Gruppe P^7 die Form

$$(31) \quad \xi' = \xi; \quad \eta' = \eta \sqrt{2} + \zeta; \quad \zeta' = \eta + \zeta \sqrt{2}$$

und ordnet dem System der Punkte (26') das System

$$(26'') \quad M_1'(0; \gamma f; \gamma f \sqrt{2})$$

und dem System der Punkte (27') das System

$$(27'') \quad M'_2(\beta/\cos \alpha; -\gamma \operatorname{tg} \alpha; -(\gamma \sqrt{2}) \operatorname{tg} \alpha)$$

zu. Die zyklische Projektionen der Systeme (26'') und (27'') sind die Zykelsysteme des Berührungsnomogramms, das durch die Laguerre'sche Transformation des Berührungsnomogramms aus der Fig. 2 entstanden ist. Dieses transformierte Nomogramm ist in der Fig. 3 konstruiert.

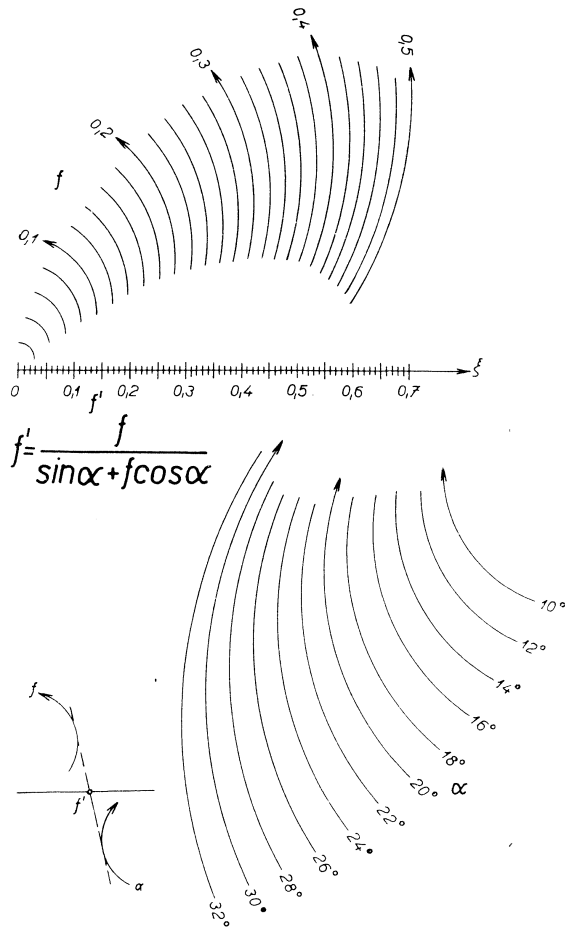


Fig. 3. Nomogramm aus der Fig. 2, das durch eine Laguerre'sche Transformation abgebildet war

4. ANDERE TRANSFORMATIONEN DER BERÜHRUNGSNOMOGRAMME MIT ZYKELN

Wenn die Zykelsysteme des Berührungsnomogramms und ihnen entsprechende Punktemengen im Raume spezielle Lage haben, kann man manchmal das Nomogramm auch durch andere, der Laguerre'schen Gruppe nicht zugehörige, Transformationen abbilden. Es gilt

Satz 4.1. *Gehören alle Zykeln eines Berührungsnomogramms demselben Zykelfeld, ist das Berührungsnomogramm die zyklische Projektion einer Fluchtlinientafel, die im Raume in der dem Zykelfeld entsprechenden Ebene ϱ liegt. Diese Fluchtlinientafel kann man in die Grundebene aus einem beliebigen, eigentlichen oder uneigentlichen Punkte S , der weder in der Grundebene, noch in der Ebene ϱ liegt, projizieren.*

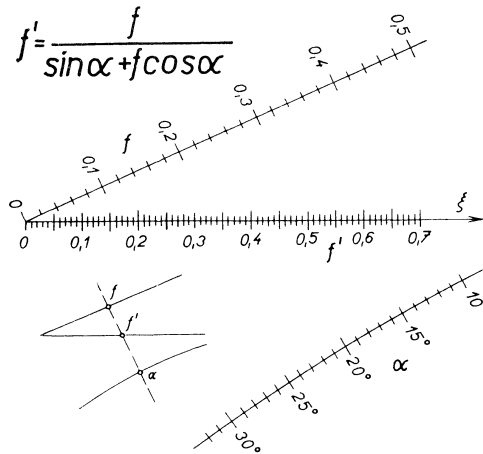


Fig. 4. Fluchtlinientafel der Beziehung $f' = f / (\sin \alpha + f \cos \alpha)$.

Beweis. Existiert ein gemeinsamer Berührungsspeer der mit den Werten x_1, x_2 bzw. x_3 bezifferten Zykeln k_1, k_2 bzw. k_3 , dann liegen die im Raume den Zykeln k_1, k_2, k_3 entsprechende Punkte M_1, M_2, M_3 in derselben isotropen Ebene α und die drei Werte x_1, x_2, x_3 erfüllen die Beziehung $F(x, y, z) = 0$. Der Voraussetzung gemäß liegen die Punkte M_1, M_2, M_3 auch in der Ebene ϱ , d.h. sie liegen auf der Schnittgerade I der Ebenen α und ϱ . Die Abbildung der Zykeln in der Grundebene auf die Raumpunkte ist eineindeutig. Daraus folgt, daß den Zykelsystemen des Berührungsnomogramms die Systeme der bezifferten Punkte der Ebene ϱ entsprechen, die die Definition einer Fluchtlinientafel befriedigen. (Siehe [4], Seite 95 u.w.) Die oben bestimmte Gerade I ist der den Werten x_1, x_2, x_3 entsprechende Leseindex. Die Fluchtlinientafel in der Ebene ϱ kann durch eine Kollineation oder Affinität

mittels einer Projektion in die Grundebene aus einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte S , der weder in der Grundebene noch in der Ebene ϱ liegt, abgebildet werden.

Beispiel. Die Zykelsysteme des Berührungsnomogramms aus der Fig. 2 gehören demselben Zykelfeld. Diesem Zykelfeld entspricht im Raume die mit den Achsen ξ und ζ bestimmte Ebene ϱ . Man kann also z.B. jeden Raumpunkt $M(\xi; 0; \zeta)$ in die Grundebene parallel in den Punkt $M'(\xi; \eta)$ projizieren, wo $\eta = \delta\zeta$, $\delta > 0$ ein Einheitsmaß ist. Dadurch wird das ursprüngliche Berührungsnomogramm mit den Zykeln in eine Fluchtlinientafel abgebildet. In der Fig. 4 ist die durch gerade beschriebene Transformation aus dem Nomogramm der Fig. 2 ergebene Fluchtlinientafel im klinogonalem Koordinatensystem konstruiert.

Weiter gilt

Satz 4.2. Jede Beziehung $F(x, y, z) = 0$, die durch eine Fluchtlinientafel darstellbar ist, ist auch durch ein Berührungsnomogramm mit Zykeln darstellbar.

Beweis. Die Fluchtlinientafel tragen wir in eine Ebene über, die zu der Grundebene um den Winkel $\varphi < 45^\circ$ geneigt ist und konstruieren die zyklische Projektion dieser Fluchtlinientafel in die Grundebene. Liegen drei Punkte M_1, M_2, M_3 der Fluchtlinientafel an derselben Gerade, so gehören deren zyklische Projektionen k_1, k_2, k_3 derselben linearen Zykelreihe und haben gemeinsame reelle Berührungsspeere. Haben umgekehrt drei Zykel k_1, k_2, k_3 einen gemeinsamen Berührungsspeer, so liegen die ihnen zugeordneten Punkte M_1, M_2, M_3 an der Schnittlinie der Ebene ϱ mit der isotropen Ebene, die durch den gemeinsamen Berührungsspeer bestimmt ist.

Literatur

- [1] Blaschke Wilhelm: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Berlin 1929.
- [2] Hruška Václav: Graphisches und graphisch-mechanisches Rechnen. (Počet grafický a graficko-mechanický.) Prag 1952.
- [3] Müller Emil, Krames Jasef: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Band II. Leipzig und Wien, 1929.
- [4] Pleskot Václav: Nomographie. (Nomografie.) Prag 1963.
- [5] Seifert Ladislav: Cyklografie. (Cyklografie.) Prag 1949.
- [6] Záhora Jaroslav: Berührungsnomogramme mit Kreisen. (Dotykové nomogramy s kružnicemi.) Časopis pro pěstování matematiky Jhrg. 91 (1966) S. 308–319.
- [7] Záhora Jaroslav: Nomogramme, die den Berührungsnomogrammen und den Netztafeln mit wenigstens einer Kurvenscharr adjungiert sind. (Nomogramy adjungované k dotykovým a průsečikovým nomogramům majícím aspoň jeden systém křivých isoplét.) Aplikace matematiky, B. 14 (1969), Nr. 3, S. 195–209.

Souhrn

DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S CYKLY

JAROSLAV ZÁHORA

Dotykový nomogram se třemi systémy cyklů

$$f_i u + g_i v + 1 - h_i w = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

zobrazuje vztah

$$\begin{vmatrix} 1, & g_1, & h_1 \\ 1, & g_2, & h_2 \\ 1, & g_3, & h_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1, & 1, & h_1 \\ f_2, & 1, & h_2 \\ f_3, & 1, & h_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1, & g_1, & 1 \\ f_2, & g_2, & 1 \\ f_3, & g_3, & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Při transformaci cyklů je obrazem každého dotykového nomogramu s cykly opět dotykový nomogram s cykly zobrazující tentýž vztah právě tenkrát, patří-li tato transformace do Laguerrovy grupy.

Každý spojnicový nomogram lze transformovati na dotykový nomogram s cykly

Anschrift des Verfassers: RNDr. Jaroslav Záhora, Gorkého 42, 602 00 Brno.