Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Konvergenz eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 6, 452–461

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103501`

ÜBER DIE KONVERGENZ EINES ZWEIPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 23. Februar 1973)

Die Arbeit [4] befasst sich mit einem gewissen zweiparametrigen Iterationsverfahrens für die Lösung eines linearen Gleichungssystems von der Form

$$x = Bx + b\,, \tag{1}$$

wo B im allgemeinen eine nichtsymmetrische Blockmatrix ist, deren Diagonalblöcke Nullmatrizen sind. Wenn man die Matrix B in der Form

$$B = L + U \tag{2}$$

schreibt, wo L bzw. U die untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist, dann kann man ein zweiparametriges Iterationsverfahren durch die Formel

$$x_{\nu+1} = T(\alpha, \beta)\, x_\nu + P(\alpha, \beta)\, b \tag{3}$$

definieren, wo

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha E + \beta L)^{-1} \left[(\alpha - 1) E + (\beta + 1) L + U\right],$$
$$P(\alpha, \beta) = (\alpha E + \beta L)^{-1}$$

ist und α, β beliebige Zahlen (Parameter) sind.

Mit der Beziehung dieses Verfahrens zu den üblichen Iterationsmethoden (Jacobi-Verfahren, Gauss-Seidelsches Verfahren, Oberrelaxations-Verfahren u. a.) befasst sich die Arbeit [4]. Ähnlicherweise, wie in der Arbeit [4], wird vorausgesetzt, dass die Matrix B einen gewissen Vektorraum R der Dimension n in R abbildet, dass der Vektorraum R durch die direkte Summe der Unterräume $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m$ $(m \leqq n)$ gebildet wird und dass die Matrizen L, U die Bedingungen

$$L\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i+h}\,,$$
$$U\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i-h}\,, \quad i = 1, \ldots, m$$

erfüllen, wo h, k positive teilerfremde ganze Zahlen mit $h + k = p \leqq m$ sind (Dabei setzt man $v_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$.) Unter diesen Voraussetzungen gilt dann der folgende Satz:

1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung*

$$(4) \qquad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k ,$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, dann ist jede der Beziehung (4) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Satz 1 zeigt also den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ im Falle, dass $\mathbf{B}$ in die oben erwähnte Matrizenklasse gehört ($\mathbf{B}$ ist eine gewisse zyklische Matrix). Der Beweis dieses Satzes ist in [4] durchgeführt.

Diese Arbeit befasst sich mit der Konvergenz des durch die Formel (3) definierten Iterationsverfahrens. Genauer gesagt, es werden einige Mengen von Punkten $[\alpha, \beta]$ in der Ebene bestimmt, für die die Methode (3) konvergiert, bzw. die Mengen, in welchen die Methode sicher nicht konvergiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Satze 1). Achse $\beta = 0$ nicht zu der Ebene gehört (angesichts der Beziehung $\beta \neq 0$ in dem In der Ebene gehört auch nicht die Achse $\alpha = 0$, da für $\alpha = 0$ die Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ singular ist. In der ganzen Arbeit setzt man ferner voraus, dass μ_i, $i = 1, \ldots, n$ Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$ sind. Es gilt der folgende Satz:

2. *Es sei $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ eine solche Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, dass*

$$(5) \qquad [\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}(\mu_i) \Leftrightarrow |(1 - \alpha)^p - \mu_i(1 + \beta)^k| \geqq |\alpha|^p ,$$
$$\beta \neq 0 , \quad \alpha \neq 0$$

ist. Es sei ferner $\Omega^{(1)} = \bigcup_i \Omega^{(1)}(\mu_i)$ und $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}$. Dann ist der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$ der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ grösser oder gleich 1 (das Iterationsverfahren (4) konvergiert also nicht).

Beweis. Es sei $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}$. Dann existiert eine solche Zahl i_0, dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}(\mu_{i_0})$ ist und nach (5) gilt dann die Ungleichung

$$(6) \qquad |(1 - \alpha)^p - \mu_{i_0}(1 + \beta)^k| \geqq |\alpha|^p .$$

Aus Satz 1 folgt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(7) \qquad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p - \mu_{i_0}(1 + \beta - \lambda\beta)^k = 0$$

(das ist die Gleichung (4) für $\mu = \mu_{i_0}$) die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ darstellen.

Das Absolutglied der Gleichung (7) ist dann die Zahl

$$\frac{1}{\alpha^p}\left[(1-\alpha)^p - \mu_{i_0}^p(1+\beta)^k\right].$$

Angesichts (6) gilt $\left|(1/\alpha^p)\left[(1-\alpha)^p - \mu_{i_0}^p(1+\beta)^k\right]\right| \geqq 1$ und es ist also $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha,\beta)) \geqq$ $\geqq 1$, was wir beweisen sollten.

Beispiel 1. Um eine anschauliche Vorstellung zu haben, betrachte man nun den Fall, wenn $p = 2$, $h = k = 1$ ist und wenn die Zahlen μ_i^2 reell sind mit $0 < \mu_i^2 < 1$. In Abb. 1 ist die Form der Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ für $\mu_i^2 = 0{,}5$ dargestellt. Aus der Ungleichung (5) folgt nun leicht, dass die Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ aus der durch die Parabel begrenzten Menge $\beta \geqq (1/\mu_i^2)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1$ und der durch die Gerade begrenzten Menge $\beta \leqq (1/\mu_i^2)(1-2\alpha) - 1$ gebildet wird. Dabei geht die Gerade $\beta = (1/\mu_i^2)$. $.(1-2\alpha) - 1$ durch den Punkt $\left[\frac{1}{2}, -1\right]$ und stellt die Tangente der Parabel $\beta =$ $= (1/\mu_i^2)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1$ im Punkte $\left[0, (1/\mu_i^2) - 1\right]$ dar. (Die Teile der Geraden $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ gehören allerdings nicht der Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ an.)

Man bezeichne nun $m = \min\limits_i \mu_i^2$, $M = \max\limits_i \mu_i^2$. Es ist dann leicht festzustellen, dass die Menge $\Omega^{(1)} = \bigcup\limits_i \Omega^{(1)}(\mu_i)$ aus den folgenden Mengen besteht:

a) für $\alpha < \frac{1}{2}\left[1 - (M/m) - \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right]$ ist
$$\beta \geqq (1/M)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1 \quad \text{oder} \quad \beta \leqq (1/m)(1-2\alpha) - 1\,;$$

b) für $\frac{1}{2}\left[1 - (M/m) - \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right] \leqq \alpha \leqq$
$\leqq \frac{1}{2}\left[1 - (M/m) + \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right]$ ist β beliebig;

c) für $\frac{1}{2}\left[1 - (M/m) + \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right] < \alpha < \frac{1}{2}$ ist
$$\beta \geqq (1/M)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1 \quad \text{oder} \quad \beta \leqq (1/m)(1-2\alpha) - 1\,;$$

d) für $\frac{1}{2} \leqq \alpha$ ist
$$\beta \geqq (1/M)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1 \quad \text{oder} \quad \beta \leqq (1/M)(1-2\alpha) - 1\,.$$

(Dabei ist $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.)

Für den Fall $p = 2$ und $\mu_i^2 > 0$, $i = 1, \ldots, n$ bekommt man also das folgende Ergebnis:

wenn
$$\frac{1}{2}\left[1 - (M/m) - \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right] \leqq \alpha \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left[1 - (M/m) + \sqrt{((1-(M/m))^2 - 2)}\right],$$

oder $\beta \geqq (1/M)\left[(\alpha-1)^2+\alpha^2\right] - 1$ ist, ist $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha,\beta)) \geqq 1$ und das Iterationsverfahren (3) konvergiert nicht.

Nun werden wir uns mit der Bestimmung solcher Mengen in der Ebene $[\alpha, \beta]$ befassen, in welchen $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist (und wo also die Methode (3) konvergiert). Es gilt der folgende Satz:

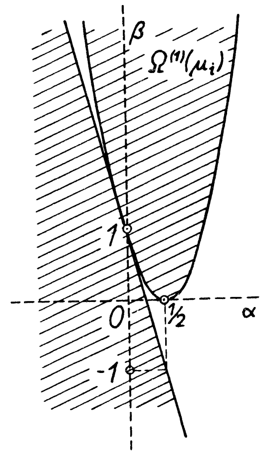

Abb. 1.

3. *Es sei* $\alpha \geqq 1$ *und die Mengen* $\Omega^{(2)}(\mu_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *seien folgenderweise definiert*:

(8) $$[\alpha, \beta] \in \Omega^{(2)}(\mu_i) \Leftrightarrow |\mu_i|^{p/k} \left[\left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]^k < 1\,.$$

Dann gilt für jeden Punkt $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(2)} = \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, *die Ungleichung* $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. In der Gleichung (4) für $\mu = \mu_i$ fürht man die Substitution $\tau = 1 - \alpha + \lambda\alpha$, d. h. $\lambda = (\tau + \alpha - 1)/\alpha$ durch. Man bekommt dann die Gleichung

(9) $$\tau^p - \mu_i^p \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} - \tau \frac{\beta}{\alpha}\right)^k = 0\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung liegen bekanntlich in der Vereinigung des Bereiches $|\tau| \leqq 1$ und des Bereiches

(10) $$\left|\tau^k - \mu_i^p(-1)^k \frac{\beta^k}{\alpha^k}\right| \leqq |\mu_i|^p \left[\left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]^k - |\mu_i|^p \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^k$$

(der Beweis dieser Feststellung ist z. B. in [1] angeführt). Dann gilt angesichts (10)

$$|\tau|^k \leqq \left|\tau^k - \mu_i^p(-1)^k \frac{\beta^k}{\alpha^k}\right| + |\mu_i|^p \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^k \leqq |\mu_i|^p \left[\left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]^k.$$

Hiervon folgt sofort nach (8), dass

$$|\tau| \leqq |\mu_i|^{p/k} \left[\left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right] < 1$$

und

$$|\tau + (\alpha - 1)| \leqq |\mu_i|^{p/k} \left[\left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right] + |\alpha - 1| < 1 + \alpha - 1 = \alpha = |\alpha|$$

gilt (da $\alpha \geqq 1$ ist). Es ist also

$$|\lambda| = \left|\frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha}\right| < \frac{|\alpha|}{|\alpha|} = 1 .$$

Die Wurzeln der Gleichung (4) für $\mu = \mu_i$ liegen dann für die Punkte $[\alpha, \beta] \in \in \Omega^{(2)}(\mu_i)$ im Einkeitskreis. Dort liegen also die Wurzeln der Gleichung (4) für jeden Wert $\mu = \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$, solange $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$ ist, was wir beweisen sollten.

Im Falle $k = 1$ gilt die folgende (bessere) Abschätzung:

4. *Es sei* $\alpha \geqq 1$, $k = 1$ *und die Menge* $\Omega^{(3)}(\mu_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *seien folgenderweise definiert*:

$$(11) \qquad [\alpha, \beta] \in \Omega^{(3)}(\mu_i) \Leftrightarrow \left|-\mu_i^p \frac{\beta}{\alpha} + \alpha - 1\right| < |\alpha| - |\mu_i|^p \left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| .$$

Dann gilt für jeden Punkt $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(3)} = \bigcap_i \Omega^{(3)}(\mu_i)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. Für $k = 1$ ist die Ungleichung (10) von der Form

$$(12) \qquad \left|\tau + \mu_i \frac{\beta}{\alpha}\right| \leqq |\mu_i|^p \left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| .$$

Angesichts (11) und (12) folgt schrittweise

$$|\tau + \alpha - 1| \leqq \left|\tau + \mu_i \frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|-\mu_i \frac{\beta}{\alpha} + \alpha - 1\right| < |\mu_i|^p \left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| -$$

$$- |\mu_i|^p \left|1 + \frac{\beta}{\alpha}\right| + |\alpha| = |\alpha| ,$$

sodass

$$|\lambda| = |\tau + \alpha - 1|/|\alpha| < 1$$

ist. Hiervon folgt sofort die Behauptung des Satzes 4.

Beispiel 2. Es sei wieder wie im Beispiel 1 $k = 1$ und es sei $1 > \mu_i^p > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Die die Menge $\Omega^{(2)}(\mu_i)$ bestimmenden Ungleichungen sind dann von der Form $\alpha \geqq 1$, $\beta < \frac{1}{2}((1/|\mu_i|^p) - 1)\,\alpha$, $\beta > -\frac{1}{2}((1/|\mu_i|^p) + 1)\,\alpha$. Man kann leicht feststellen, dass die Menge $\Omega^{(2)} = \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, in welcher nach Satz 3 $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist, durch die Ungleichungen

$$\alpha \geqq 1\,, \quad \beta < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} - 1\right)\alpha\,, \quad \beta > -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + 1\right)\alpha\,,$$

mit $M = \max_i |\mu_i|^p$ bestimmt ist.

Wenn man unter den gleichen Voraussetzungen die Ungleichungen aus dem Satz 4 gebraucht, sind die Mengen $\Omega^{(3)}(\mu_i)$ durch die Ungleichungen

$$\alpha \geqq 1\,, \quad \beta < \frac{1}{2|\mu_i|^p}\left(2\alpha^2 - \alpha(1 + |\mu_i|^p)\right), \quad \beta > -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\mu_i|^p} + 1\right)\alpha$$

gegeben. Die Menge $\Omega^{(3)} = \bigcap_i \Omega^{(3)}(\mu_i)$, für die $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist, ist dann durch die Ungleichungen

$$\alpha \geqq 1\,, \quad \beta < \frac{1}{2M}\left[2\alpha^2 - \alpha(1 + M)\right], \quad \beta > -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + 1\right)\alpha$$

gegeben und man stellt leicht fest, dass $\Omega^{(3)} \supset \Omega^{(2)}$ gilt (der Satz 4 gibt also für den betrachteten Spezialfall eine umfangreichere Menge an).

In der Arbeit [3] wurde die Methode behandelt, die man aus (3) bekommt, falls man $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ legt (diese Methode ist eine gleichzeitige Extrapolation des Jacobi- und des Gauss-Seidelschen Verfahrens). Aus Satz 3 folgt sofort für diese Methode die folgende Behauptung:

5. *Es sei* $\frac{1}{2}(1 - (1/\varrho^{p/k}(\mathbf{B}))) < \omega < \frac{1}{2}(1 + (1/\varrho^{p/k}(\mathbf{B})))$. *Dann ist* $\varrho(\mathbf{T}(1, -\omega)) < 1$. (*Dieses Resultat entspricht dem Satze* 2 *aus* [3].)

Ferner gilt der folgende Satz:

6. *Es sei* $\Omega^{(4)} = \bigcap_i \Omega^{(4)}(\mu_i)$, *wo die Mengen* $\Omega^{(4)}(\mu_i)$ *durch die Ungleichungen*

$$(|\alpha| + |1 - \alpha|)^p + |\mu_i|^p\,(|\beta| + |1 + \beta|)^k < 2|\alpha|^p \tag{13}$$

definiert sind. Dann gilt für $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(4)}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, *die Ungleichung* $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. Die Ungleichung (4) (für $\mu = \mu_i$) schreibt man in der Form

$$\sum_{j=0}^{p} (a_j + b_j)\,\lambda^j = 0\,, \tag{14}$$

wo

$$(15) \qquad a_j = \binom{p}{j} \alpha^{j-p}(1-\alpha)^j \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, p\,,$$

$$b_j = -\mu_i^p(-1)^j \binom{k}{j} \beta^j \alpha^{-p}(1+\beta)^{k-j} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, k\,,$$

$$b_j = 0 \quad \text{für} \quad j = k+1, k+2, \cdots, p$$

ist. Es ist offensichtlich $a_p + b_p = 1$. Aus (15) und (13) folgt nun, dass

$$\sum_{j=0}^{p-1} |a_j + b_j| \leqq \sum_{j=0}^{p-1} |a_j| + \sum_{j=0}^{p-1} |b_j| = \sum_{j=0}^{p} |a_j| - |a_p| + \sum_{j=0}^{k} |b_j| =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} |\alpha|^{j-p} |1-\alpha|^{p-j} - 1 + |\mu_i|^p \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |\alpha|^{-p} |\beta|^j |1+\beta|^{k-j} =$$

$$= |\alpha|^{-p} [(|\alpha| + |1-\alpha|)^p + |\mu_i|^p (|\beta| + |1+\beta|)^k] - 1 < 1$$

gilt. Es ist also $\sum_{j=0}^{p-1} |a_j + b_j| < 1$, sodass alle Wurzeln der Gleichung (14) im Einkeitskreise liegen. Hiervon folgt sofort die Behauptung des Satzes 6.

Man kann leicht zeigen, dass aus dem Satze 6 für $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ wieder die Behauptung des Satzes 5 folgt.

Die Sätze 3, 4, 5, 6 haben nur notwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ angegeben. Im folgenden Satze wird gezeigt, wie man im speziellen Falle, wenn μ_i^p für alle i reelle Zahlen sind, eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ angegeben kann. Genauer gesagt, es wird eine solche Menge $\Omega^{(5)}$ bestimmt, dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)} \Leftrightarrow \varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ gilt. Es gilt der folgende Satz:

7. *Es seien μ_i^p, $i = 1, \ldots, n$, reelle Zahlen. Ferner definiere man die Zahlen $c_{j,i}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, n$, wie folgt:*

$$c_{j,i} = (-1)^j \binom{p}{j} A^j + (-1)^{j+1} \mu_i^p \sum_{s=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{p-k}{j-s} B^s\,,$$

(hier ist $A = 1 - 2\alpha$, $B = 1 + 2\beta$).

Es sei $c_{pi} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Die Menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ soll durch die folgenden Ungleichungen definiert sein:

$$c_{pi} > 0\,, \quad D_{1i} > 0, \; D_{2i} > 0, \; \ldots, \; D_{p-1,i} > 0\,,$$

wo

$$D_{1i} = c_{p-1,i}, \quad D_{2i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i}, & c_{p,i} \\ c_{p-3,i}, & c_{p-2,i} \end{vmatrix} \quad D_{3i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i}, & c_{p,i}, & 0 \\ c_{p-3,i}, & c_{p-2,i}, & c_{p-1,i} \\ c_{p-5,i}, & c_{p-4,i}, & c_{p-3,i} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$D_{p-1,i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i}, & c_{p,i}, & 0, & \ldots, & 0 \\ c_{p-3,i}, & c_{p-2,i}, & c_{p-1,i}, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{3-p,i}, & c_{4-p,i}, & c_{5-p,i}, & \ldots, & c_{1,i} \end{vmatrix}$$

ist (hier legt man $c_{j,i} = 0$ für $r < 0$).

Es sei ferner $\Omega^{(5)} = \bigcap_i \Omega^{(5)}(\mu_i)$. Dann gilt (für $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$)

$$[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)} \Leftrightarrow \varrho(\boldsymbol{T}(\alpha, \beta)) < 1 .$$

Beweis. In der Gleichung (4) mit $\mu = \mu_i$ führt man die Substitution $\lambda = (w - 1)/(w + 1)$ ein (diese konforme Abbildung transformiert den Einkeitskreis in der Ebene λ in die Halbebene Re $w < 0$ in der Ebene w).

Die Gleichung (4) geht dann in die Gleichung

$$(w - A)^p - \mu_i^p(w - 1)^{p-k} (w - B)^k = 0 \tag{16}$$

über. Aus (16) folgt ferner, dass

$$\sum_{j=0}^{p} c_{ji} w^p = 0$$

ist. Angesichsts dessen, dass $D_{pi} = (1 - \mu_i^p)\, D_{p-1,i}$ mit

$$D_{p,i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i}, & c_{p,i}, & 0, & \ldots, & 0 \\ c_{p-3,i}, & c_{p-2,i}, & c_{p-1,i}, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1-p,i}, & c_{2-p,i}, & c_{3-p,i}, & \ldots, & c_{0,i} \end{vmatrix}$$

und $c_{0,i} = 1 - \mu_i^p > 0$ gilt, folgt sofort die Behauptung 7 aus dem Hurwitzschen Satz.

Beispiel 3. Es sei $p = 2$, $h = k = 1$, $0 < \mu_i^2 < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_{2,i} &= A^2 - \mu_i^2 B , \\ c_{1,i} &= -2A + \mu_i^2 + \mu_i^2 B , \\ c_{0,i} &= 1 - \mu_i^2 . \end{aligned}$$

Die Menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ ist in diesen Falle durch die Ungleichungen

$$A^2 - \mu_i^2 B > 0 , \quad -2A + \mu_i^2 + \mu_i^2 B > 0$$

bestimmt, d. h. durch die Ungleichungen

(16) $\beta < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_i^2}(1 - 2\alpha)^2 - 1\right], \quad \beta > \frac{1}{\mu_i^2}(1 - 2\alpha) - 1 \quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$

(angesichts dessen, dass $\mu_i^2 > 0$ ist). Die menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ für $\mu_i^2 = 0{,}5$ sieht man in Abb. 2.

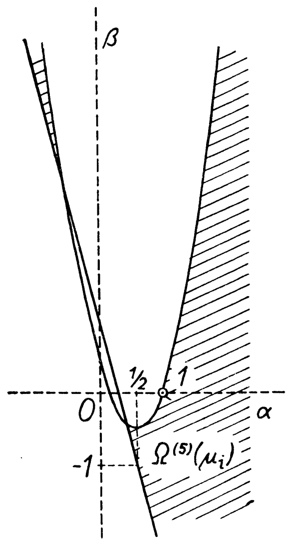

Abb. 2.

Man kann leicht feststellen, dass die Menge $\Omega^{(5)} = \bigcap_i \Omega^{(5)}(\mu_i)$ so aussieht: Man bezeichne wie im Beispiele 1 $m = \min_i \mu_i^2$, $M = \max_i \mu_i^2$. Dann ist

a) für

$$\alpha < \tfrac{1}{2}[1 - (M/m) - \sqrt{((M^2/m^2) - M)}]$$

und für

$$\tfrac{1}{2}[1 - (M/m) + \sqrt{((M^2/m^2) - M)}] < \alpha < \tfrac{1}{2}$$

gleichzeitig

$$\beta < \tfrac{1}{2}[(1/M)(1 - 2\alpha)^2 - 1], \quad \beta > (1/m)(1 - 2\alpha) - 1 ;$$

b) für $\frac{1}{2} \leqq \alpha$ gleichzeitig

$$\beta < \tfrac{1}{2}[(1/M)(1 - 2\alpha)^2 - 1], \quad \beta > (1/M)(1 - 2\alpha) - 1 ;$$

c) für

$$\tfrac{1}{2}[1 - (M/m) - \sqrt{((M^2/m^2) - M)}] \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}[1 - (M/m) + \sqrt{((M^2/m^2) - M)}]$$

gibt es kein β, für dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)}$ ist (für α aus diesem Intervalle ist immer $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \geqq 1$ und die Methode (3) konvergiert nicht).

Bemerkung. Aus den Sätzen 3, 4, 6, 7 bekommt man sofort die entsprechenden Ergebnisse für die Spezialfälle der in der Arbeit [4] eingeführten Methode. Wenn man z. B. die der Geraden $\beta = -1$ angehörenden Punkte der Mengen $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(5)}$ betrachtet, bekommt man die entsprechenden Behauptungen über die Konvergenz des Oberrelaxationsverfahrens (die Methode III aus der Arbeit [4]). Ähnliche ist die Situation im Falle der Methoden II, V, VI, VII aus der Arbeit [4].

Literaturverzeichnis

[1] *Parodi, M.:* La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[2] *Koliha, J. J.:* On the iterative solution of linear operator equations with self-adjoint operators. The Journal of the Australian mathematical society, vol. XIII, Part 2, 1972, 241—255.

[3] *Šisler, M.:* Bemerkungen zur Optimierung eines gewissen Iterationsverfahren, Apl. Mat., 18 (1973), 315—324.

[4] *Šisler, M.:* Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren, Apl. Mat., 18 (1973), 325—332.

Souhrn

O KONVERGENCI JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci se zkoumá obor konvergence dvouparametrické iterační metody pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{B}$ je jistá speciální (blokově cyklická) matice s nulovými diagonálními bloky. Práce navazuje na výsledky práce [4] téhož autora. Iterační metoda je definována předpisem

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta)\, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}(\alpha, \beta)\, \mathbf{b}\,,$$

kde

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}\,[(\alpha - 1)\,\mathbf{E} + (\beta + 1)\,\mathbf{L} + \mathbf{U}]\,,$$
$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}\,.$$

Přitom platí $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, kde $\mathbf{L}$, resp. $\mathbf{U}$ je dolní resp. horní blokově trojúhelníková matice a α, β jsou reálné parametry různé od nuly.

Práce se zabývá otázkou, kdy iterační metoda konverguje. Přesněji řečeno, v rovině α, β jsou nalezeny některé oblasti, ve kterých metoda konverguje a oblasti, ve kterých naopak metoda nekonverguje.

Výsledky práce lze aplikovat na řadu běžných iteračních metod (Gauss-Seidelovu, extrapolovanou Gauss-Seidelovu, superrelaxační, aj.).

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler* CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.