

# Aplikace matematiky

---

Miroslav Šisler

Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren

*Aplikace matematiky*, Vol. 18 (1973), No. 5, 325–332

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103485>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER EIN ZWEIPARAMETRIGES ITERATIONSVERFAHREN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 13. Oktober 1972)

Die Arbeit befasst sich mit einem gewissen allgemeinen Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems von der Form

$$(1) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

wo  $\mathbf{E}$  eine Einheitsmatrix und  $\mathbf{B}$  eine im allgemeinen nichtsymmetrische Blockmatrix ist. Das Iterationsverfahren von der Form

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$$

entspricht dann dem gewöhnlichen Jacobi-Verfahren.

Die Matrix  $\mathbf{B}$  sei nun von der Form

$$(3) \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U},$$

wo  $\mathbf{U}$  (bzw.  $\mathbf{L}$ ) eine obere (bzw. untere) verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist und wo die Diagonalblöcke der Matrix  $\mathbf{B}$  Nullmatrizen sind. Man wählt nun solche beliebige Zahlen  $\alpha, \beta$ , dass die Matrix  $\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L}$  nichtsingulär ist (dass gilt immer für  $\alpha \neq 0$ ) und man bildet die Matrizen

$$(4) \quad \mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1)\mathbf{E} + (\beta + 1)\mathbf{L} + \mathbf{U}],$$

$$(5) \quad \mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}.$$

Wir definieren jetzt ein Iterationsverfahren durch die folgende Formel:

$$(6) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta).$$

Dieses Verfahren hängt von zwei reellen Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  ab und solange der Spektralradius der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  kleiner als 1 ist, konvergiert dieses Verfahren zur Lösung des Systems (1), da die Gleichung (1) und die Gleichung  $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x} + \mathbf{P}(\alpha, \beta)$  äquivalent sind.

Es ist noch zu bemerken, dass das Iterationsverfahren (6), das in dieser Arbeit untersucht wird, eine gewisse Modifikation der in der Arbeit [3] untersuchten Methode darstellt.

Wir werden jetzt einige Spezialfälle mit Rücksicht auf die Wahl der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  betrachten.

I) Es sei  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ . Dann ist

$$\mathbf{T}(1, 0) = \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{P}(1, 0) = \mathbf{E}$$

und das Iterationsverfahren (6) ist von der Form

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_v + \mathbf{b}.$$

Es handelt sich also um das Jacobi-Verfahren.

II) Es sei  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ . Dann ist

$$\mathbf{T}(1, -1) = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}, \quad \mathbf{P}(1, -1) = (\mathbf{E} - \mathbf{U})^{-1},$$

was dem Gauss-Seidelschen Verfahren entspricht.

III) Es sei  $\alpha = 1/\omega$  ( $\omega \neq 0$ ) und  $\beta = -1$ . Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, -1\right) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{U}],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, -1\right) = \left(\frac{1}{\omega}\mathbf{E} - \mathbf{L}^{-1}\right),$$

was dem Oberrelaxations-Verfahren entspricht.

IV) Es sei  $\alpha = 1/\omega$  ( $\omega \neq 0$ ),  $\beta = 0$ . Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = (1 - \omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{B}, \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = \omega\mathbf{E},$$

was dem sog. verallgemeinerten (extrapolierten) Jacobi-Verfahren entspricht (für  $\omega = 1$  bekommt man den Fall I).

V) Es sei  $\alpha = 1/\omega$  ( $\omega \neq 0$ ) und  $\beta = -1/\omega$ . Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{E} - (1 - \omega)\mathbf{L} + \omega\mathbf{U}],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \omega(\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1},$$

was dem sog. extrapolierten Gauss-Seidelschen Verfahren entspricht (für  $\omega = 1$  bekommt man den Fall II).

VI) Es sei  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\omega$ . Dann ist

$$\mathbf{T}(1, -\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}], \quad \mathbf{P}(1, -\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1}.$$

Diese Methode stellt die gleichzeitige Extrapolation des Jacobischen und Gauss-Seidelschen Verfahrens dar, da man für  $\omega = 0$  den Fall I) und für  $\omega = 1$  den Fall II) bekommt. Mit diesem Verfahren befassten sich die Arbeiten [4], [5] des Verfassers.

VII) Es sei  $\alpha = 1/\varphi\omega$  ( $\omega \neq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ ) und  $\beta = -1/\varphi$ . Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\varphi\omega}, -\frac{1}{\varphi}\right) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \varphi\omega)\mathbf{E} + \omega(\varphi - 1)\mathbf{L} + \varphi\omega\mathbf{U}],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\varphi\omega}, -\frac{1}{\varphi}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\omega}\mathbf{E} - \mathbf{L}\right)^{-1},$$

was dem sog. extrapolierten Oberrelaxations-Verfahren entspricht (für  $\varphi = 1$  bekommt man nämlich den Fall III)).

Ferner werden wir das allgemeine Verfahren (6) in dem Falle untersuchen, wenn die Matrix  $\mathbf{B}$  eine spezielle Struktur hat. In der Arbeit werden die Ergebnisse der Arbeit [4] verallgemeinert. Es wird der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  und den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{B}$  (die dem Jacobi-Verfahren entspricht) untersucht.

In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Matrix  $\mathbf{B}$  einen linearen Operator darstellt, welcher den Vektorraum  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$  abbildet, und dass dieser Vektorraum durch die direkte Summe der Unterräume  $v_1, \dots, v_m$  gebildet wird. Ferner setzen wir voraus, dass die Matrizen  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}v_i &\subset v_{i+h}, \\ \mathbf{U}v_i &\subset v_{i-k}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

wo  $h, k$  teilerfremde natürliche Zahlen sind, für die  $h + k = p \leq m$  ist. Dabei setzt man  $v_i = 0$  für  $i < 1$  und  $i > m$ .

Nun gilt der folgende Satz:

**1.** Die Matrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  sollen die Voraussetzungen (3) und (7) erfüllen. Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ ,  $\beta \neq 0$ . Falls  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ist und falls die Zahl  $\mu$  die Bedingung

$$(8) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k$$

erfüllt, ist  $\mu$  der Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$ . Falls dagegen  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  ist, dann ist jede der Gleichung (8) genügende Zahl  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ .

**Beweis.** A) Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  und  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ( $\beta \neq 0$ ). Dann existiert ein Vektor  $\mathbf{x}$ , sodass

$$(\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1)\mathbf{E} + (\beta + 1)\mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

oder

$$(9) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha) \mathbf{x} = (1 + \beta - \lambda\beta) \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{x}$$

gilt. Man bezeichne  $\sigma = 1 - \alpha + \lambda\alpha$ ,  $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta$ . Wegen  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ist  $\tau \neq 0$ . Aus (9) folgt sofort, dass

$$\sigma \mathbf{x} = \tau \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{x}$$

gilt und dass also auch

$$(10) \quad \sigma^p \mathbf{x} = (\tau \mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{x}$$

ist. Den Ausdruck  $(\tau \mathbf{L} + \mathbf{U})^p$  kann man folgendermassen schreiben:

$$(11) \quad (\tau \mathbf{L} + \mathbf{U})^p = \sum_{s=0}^p \tau^s \{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \}.$$

Der Ausdruck  $\{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \}$  wird dabei durch die Summe von  $\binom{p}{s}$  Glieder gebildet, welche als Produkte von Matrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  dargestellt werden können, wobei  $\mathbf{L}$  in jedem Produkt  $s$ -mal und  $\mathbf{U}$   $(p-s)$ -mal vorkommt. Der Vektor  $\mathbf{x}$  sei als die direkte Summe der Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  dargestellt. Angesichts (7) gilt für  $1 \leq i \leq m$

$$(12) \quad \{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \} \mathbf{x}_{i+p(k-s)} \subset v_{i-p(s-k)+sh-(p-s)k} = v_i.$$

Aus (10), (11) und (12) folgt also sofort, dass

$$(13) \quad \sigma^p \mathbf{x}_i = \sum_{s=0}^p \tau^s \{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \} \mathbf{x}_{i+p(k-s)}$$

ist. Mit Hilfe des Vektors  $\mathbf{x}$  wird ein neuer Vektor  $\mathbf{y}$  als die direkte Summe von Vektoren  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  gebildet, wo

$$(14) \quad \mathbf{x}_i = \tau^t \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, m$$

gilt. Die Zahl  $t$  sei dabei folgenderweise definiert: Es sei  $1 \leq i \leq m$ . Es sei  $j$  eine solche ganze Zahl  $1 \leq j \leq p$ , dass  $(i-j)/p$  eine nichtnegative ganze Zahl ist. Dann ist  $t = (i-j)/p$ , d.h.  $i = j + tp$ . Solange nun  $i + p(k-s) < 1$  oder  $i + p(k-s) > m$  ist, ist  $v_{i+p(k-s)} = 0$  und es ist also  $\mathbf{x}_{i+p(k-s)} = 0$ . Falls  $1 \leq i + p(k-s) \leq m$  gilt, ist  $i + p(k-s) = j + tp + p(k-s) = j + (t+k-s)p$  und es gilt nach (14)

$$(15) \quad \mathbf{x}_{i+p(k-s)} = \tau^{t+k-s} \mathbf{y}_{i+p(k-s)}.$$

Aus (13), (14) und (15) folgt schrittweise

$$\begin{aligned} \sigma^p \tau^t \mathbf{y}_i &= \sum_{s=0}^p \tau^{s+t+k-s} \{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \} \mathbf{y}_{i+p(k-s)}, \\ \sigma^p \mathbf{y}_i &= \tau^k \sum_{s=0}^p \{ \mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s} \} \mathbf{y}_{i+p(k-s)}, \end{aligned}$$

$$(16) \quad \sigma^p \mathbf{y} = \tau^k (\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{y},$$

und da  $\tau \neq 0$  ist, gilt

$$(17) \quad \frac{\sigma^p}{\tau^k} \mathbf{y} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{y} = \mathbf{B}^p \mathbf{y},$$

sodass die Zahl

$$\frac{\sigma^p}{\tau^k} = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p}{(1 + \beta - \lambda\beta)^k}$$

ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$  ist.

Man setze voraus, dass eine gewisse Zahl  $\mu$  die Gleichung (8) erfüllt. Es gilt also nach (8) die Gleichung

$$\mu^p = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p}{(1 + \beta - \lambda\beta)^k} = \frac{\sigma^p}{\tau^k}$$

und nach (17) stellt die Zahl  $\mu^p$  den Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$  dar. Die Matrix  $\mathbf{B}$  ist aber eine zyklische Matrix vom Index  $p$ . Dazu genügt zu beweisen, dass man den Raum  $\mathbf{R}$  in die direkte Summe der Unterräume  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , zerlegen kann, wobei die Beziehungen

$$(18) \quad \mathbf{B}u_j \subset u_{j-k}, \quad j = 1, \dots, p$$

gelten (dabei ist  $u_{j-k} = u_l$ , wo  $1 \leq l \leq m$ ,  $j - k \equiv l \pmod{p}$ ) ist). Die Unterräume  $u_j$  definiert man folgenderweise:

$$u_j = v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots \quad (j = 1, \dots, p).$$

Nach (7) folgt dann (angesichts dessen, dass  $p = h + k$  und  $p \leq m$  ist)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}u_j &= \mathbf{L}u_j + \mathbf{U}u_j = \mathbf{L}(v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots) + \mathbf{U}(v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots) \subset \\ &\subset (v_{j+h} + v_{j+p+h} + v_{j+2p+h} + \dots) + (v_{j-k} + v_{j+p-k} + v_{j+2p-k} + \dots) \subset \\ &\subset v_{j-k} + v_{j-k+p} + v_{j-k+2p} + \dots = u_{j-k}, \end{aligned}$$

sodass die Beziehung (18) gilt. Da die Matrix  $\mathbf{B}$  eine zyklische Matrix vom Index  $p$  ist und die Zahl  $\mu^p$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$  ist, ist die Zahl  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  (dies folgt auch aus dem Satz 3 der Arbeit [4]), was zu beweisen war.

**B)** Es sei dagegen  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  und es sei die Zahl  $\lambda$  eine Wurzel der Gleichung (8). Es entsteht die Frage, wann  $\tau = 0$  oder  $\tau \neq 0$  ist. Es gibt drei Möglichkeiten.

a) Es sei  $\alpha = -\beta$ ,  $\mu \neq 0$ . Die Gleichung (8) hat dann die Form

$$(19) \quad (1 + \beta - \lambda\beta)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k.$$

Diese Gleichung besitzt zuerst eine  $(p - k)$ -fache Wurzel  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ , d.h.  $\tau = 0$ . Man kann leicht beweisen, dass die Zahl  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$  dann ein Eigenwert der

Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ist. Es sei  $\mathbf{x}_0$  ein Eigenvektor der Matrix  $\mathbf{U}$ . Alle Diagonalblöcke dieser Matrix sind Nullmatrizen und es ist also

$$(20) \quad 0 = \mathbf{U}\mathbf{x}_0.$$

Wenn man jetzt in (9)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ,  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ ,  $\alpha = -\beta$  einsetzt, bekommt man angesichts (20) eine Identität, sodass  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$  wirklich ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ist.

Es sei nun  $\lambda$  eine Wurzel der Matrix (19) und  $\lambda \neq (1 + \beta)/\beta$ . Dann ist  $\tau \neq 0$ .

b) Es sei  $\alpha = -\beta$ ,  $\mu = 0$ . Dann besitzt die Gleichung (8) eine einige  $p$ -fache Wurzel  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ , d.h. es ist  $\tau = 0$ . Für diese Wurzel  $\lambda$  kann man ebenso wie im Falle a) beweisen, dass sie einen Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  darstellt.

c) Es sei  $\alpha \neq -\beta$ . Wir zeigen, dass dann  $\tau \neq 0$  ist. Wenn nämlich  $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta = 0$  wäre, würde  $\lambda = (1 + \beta)/\beta$  gelten und aus (8) würde folgen, dass  $1 - \alpha + [(1 + \beta)/\beta]\alpha = 0$  oder  $\beta = -\alpha$  gilt, was zu einem Widerspruch führt.

Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Wir haben gesehen, dass für  $\tau = 0$  der Satz 1 bewiesen ist. Im folgenden werden wir uns mit dem Fall befassen, wenn  $\tau \neq 0$  ist.

Es sei also  $\lambda$  eine Wurzel der Gleichung (8) und es sei  $\tau \neq 0$ , d.h.  $\lambda \neq (1 + \beta)/\beta$ . Es sei vorausgesetzt, dass dem Eigenwert  $\mu^p$  der Matrix  $\mathbf{B}^p$  der Eigenvektor  $\mathbf{y}$  entspricht. Da  $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$  ist, folgt aus (8) die Beziehung (17). Aus (17) und (14) bekommt man dann leicht die Beziehung (10). Da beide Matrizen  $\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}$  und  $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$  zyklische Matrizen vom Index  $p$  sind, ist die Zahl  $\sigma$  (vgl. Satz 3 in [4]) ein Eigenwert der Matrix  $\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}$ , d.h. es gilt (9) und hiervon folgt, dass  $\lambda$  der Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ist, was zu beweisen war.

Dadurch ist der Satz 1 gänzlich bewiesen.

In der Arbeit [4] wurde der Fall IV, wo  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\omega$  ist, untersucht. Für diesen folgt aus Satz 1 der folgende Satz:

**2.** Die Matrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  sollen die Voraussetzungen (3) und (7) erfüllen. Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(1, -\omega)$ ,  $\omega \neq 0$ . Falls  $\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$  ist und falls die Zahl  $\mu$  die Beziehung

$$(21) \quad \lambda^p = \mu^p(1 - \omega + \lambda\omega)^k,$$

erfüllt, ist  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$ . Falls dagegen  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  ist, dann ist jede der Beziehung (21) genügende Zahl  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(1, -\omega)$ .

Der Satz 2 ist äquivalent mit dem Satz 1 des Artikels [4]. Im Satz 1 des Artikels [4] ist die Voraussetzung  $\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$  durch die äquivalente Voraussetzung  $\omega \neq 1$  oder gleichzeitig  $\omega = 1$  und  $\lambda \neq 0$  ersetzt. Wenn nämlich gleichzeitig  $\omega = 1$  und  $\lambda \neq 0$  gilt, ist  $\lambda = (\omega - 1)/\omega = 0$ , was ein Widerspruch ist. Wenn ferner  $\omega \neq 1$  ist,

folgt aus (9) für  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\omega$  die Beziehung

$$\lambda^p = \mu^p \left( 1 - \omega + \frac{\omega - 1}{\omega} \omega \right)^k = 0,$$

sodass  $\lambda = 0$  ist, was wieder ein Widerspruch ist.

Man bemerke noch, dass die Gleichung (8), die den Zusammenhang der Eigenwerte der Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  ausdrückt, und die Bedingung  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  in den Spezialfällen II) bis VII) die folgende spezielle Form haben (die Fälle II) und IV), d.h. das Jacobische und das extrapolierte Jacobische Verfahren, sind hier nicht eingeschlossen, da  $\beta = 0$  ist):

Methode	$\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$	Gleichung (8)
II	$\lambda \neq 0$	$\lambda^p = \mu^p \lambda^k$
III	$\lambda \neq 0$	$(\omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^p \lambda^k$
V	$\lambda \neq 1 - \omega$	$(\omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^{p-k} (\omega - 1 + \lambda)^k$
VI	$\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$	$\lambda^p = \mu^p (1 - \omega + \lambda \omega)^k$
VII	$\lambda \neq 1 - \varphi$	$(\varphi \omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^p \varphi^{p-k} (\varphi - 1 + \lambda)^k$

Vollständigkeitshalber betrachte man zum Schluss das sog. extrapolierte Jacobi-Verfahren (siehe Fall IV). Hier ist  $\beta = 0$ , sodass die Voraussetzungen des Satzes 1 nicht erfüllt sind. Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = (1 - \omega) \mathbf{E} + \omega \mathbf{B}, \quad \omega \neq 0.$$

Dann existiert ein solcher Vektor  $\mathbf{x}$ , dass

$$(1 - \omega) \mathbf{E} \mathbf{x} + \omega \mathbf{B} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

oder

$$\frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{x}$$

gilt. Die Zahl  $\mu = (\lambda - 1 + \omega)/\omega$  ist dann ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$ , sodass zwischen Eigenwerten der Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{T}(1/\omega, 0)$  die Beziehung

$$(22) \quad \lambda - 1 + \omega = \mu \omega$$

gilt. Die Eigenvektorräume, die den einander durch die Beziehung (22) entsprechenden Eigenwerten  $\lambda$ ,  $\mu$  zugehören, sind dabei identisch. Man bemerke noch, dass die Beziehung (22) für eine beliebige Matrix  $\mathbf{B}$  gilt.



- [1] *Kjellberg, G.*: On the successive over-relaxation method for cyclic operators. *Numerische Math.*, 3, 1961, 87–91.
- [2] *Varga, R. S.*: *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, INC, 1962.
- [3] *Koliha, J. J.*: On the iterative solution of linear operator equations with self-adjoint operators. *The Journal of the Australian mathematical society*, vol. XIII, Part 2, 1972, 241–255.
- [4] *Šisler, M.*: Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen. *Aplikace matematiky*, 17, 1972, 225–233.
- [5] *Šisler, M.*: Über die Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für zyklische Matrizen. *Aplikace matematiky*, 18, 1973, 89–98.

## Souhrn

## O JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODĚ

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou obecnou iterační metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , kde matice  $\mathbf{B}$  je tvaru  $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ , přičemž  $\mathbf{L}$ , resp.  $\mathbf{U}$  je dolní, resp. horní trojúhelníková matice. Dále se předpokládá, že matice  $\mathbf{B}$  představuje lineární operátor zobrazující vektorový prostor  $\mathbf{R}$  do  $\mathbf{R}$ , že prostor  $\mathbf{R}$  je direktním součtem podprostorů  $v_1, \dots, v_m$  a že platí vztahy  $\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h}$ ,  $\mathbf{U}v_i \subset v_{i-k}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ( $v_j = 0$  pro  $j < 1$  a  $j > m$ ), kde  $h + k = p \leq m$  a  $h, k$  jsou přirozená nesoudělná čísla. Iterační metoda je definována vztahem

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta),$$

kde

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}]$$

a

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1}, \alpha \neq 0.$$

Vhodnou volbou dvou parametrů  $\alpha, \beta$  přechází tato metoda v některé známé metody (např. v Jacobiho, Gauss-Seidelovu, superrelaxační, extrapolovanou Jacobiho, extrapolovanou Gauss-Seidelovu, extrapolovanou superrelaxační a též v metodu zkoumanou tímž autorem v práci [4]). V práci je dokázána formule (8) vyjadřující vzájemnou souvislost vlastních čísel matice  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$  a  $\mathbf{B}$ , umožňující odhadnout rychlost konvergence zkoumané iterační metody, případně srovnávat její rychlost s rychlostí známých iteračních metod.

*Anschrift des Verfassers:* Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.