Dietrich Stoyan

Monotonieeigenschaften einliniger Bedienungssysteme mit exponentiellen Bedienungszeiten

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 4, 268–279

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103478`

MONOTONIEEIGENSCHAFTEN EINLINIGER BEDIENUNGSSYSTEME MIT EXPONENTIELLEN BEDIENUNGSZEITEN

DIETRICH STOYAN

(Eingegangen am 29. Februar 1972)

1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden Systeme der Bedienungstheorie mit einem Bedienungsapparat, untereinander und vom Input unabhängigen, identisch negativexponentiell verteilten Bedienungszeiten (Parameter: μ) und s Warteplätzen untersucht ($0 \leqq s \leqq \infty$). Im Fall $s = 0$ liegt ein Verlustsystem vor, im Fall $s = \infty$ ein Wartesystem und bei $0 < s < \infty$ ein kombiniertes Warte-Verlustsystem. Der Input braucht nicht rekurrent zu sein, vielmehr sind beliebige Abhängigkeiten der Abstände zwischen den Forderungenankünften untereinander zugelassen. Zur Zeit $t = 0$ soll die erste Forderung eintreffen und das System leer vorfinden. Zur Abkürzung werden die eben beschriebenen Systeme mit $G/M/1$ (s) (für $0 \leqq s < \infty$) und $G/M/1$ (für $s = \infty$) bezeichnet, analog der Bezeichnungsweise bei rekurrentem Input.

Für die Systeme $G/M/1$ (s) und $G/M/1$ wird das Problem untersucht, inwieweit bestimmte Systemcharakteristiken „monoton" vom Input abhängig sind. Es wird gezeigt, daß sich bei einem Input mit „kleinen" Abständen zwischen den Forderungenankünften „große" Verluste im Fall $s > \infty$ und „große" Schlangenlängen für $s = \infty$ ergeben und entsprechend bei „großen" Abständen „kleine" Verluste und Schlangenlängen. Im stationären Fall ergeben sich ähnliche Monotonieaussagen für die Verlustwahrscheinlichkeiten. Die Begriffe „klein" und „groß" sind bezüglich geeigneter Halbordnungsrelationen für Verteilungsgesetze bzw. -funktionen zu verstehen (siehe Abschnitt 2).

Diese an sich relativ naheliegenden Aussagen sind insofern bemerkenswert, als im Sinne einer der benutzten Halbordnungsrelationen $(\overset{(3)}{\leqq})$ ein Input mit konstanten (oder deterministischen) Abständen als ein Input mit „großen" Abständen anzusehen ist im Vergleich zu einem Input, dessen Abstände dieselben Erwartungswerte besitzen. Damit enthalten die Ergebnisse der Arbeit als Spezialfall die Aussage in [1], wonach sich unter allen Inputs, die sich durch stationäre zufällige Punktfolgen mit der endlichen Intensität λ beschreiben lassen, die geringste Verlustwahrscheinlichkeit (bei $s = 0$) für den regulären Input ergibt, d. h. bei konstanten Abständen der Länge λ^{-1} (vgl. auch [2]). Im Fall rekurrenten Inputs wurde in [3] für die Schlangenlänge des Systems $GI/M/1$ eine Monotonieaussage bewiesen, die der hier gegebenen, allgemeineren Aussage entspricht.

Bemerkt sei, daß auch Monotonieaussagen für den instationären Fall erhalten werden.

2. DEFINITION UND EIGENSCHAFTEN VON HALBORDNUNGSRELATIONEN FÜR VERTEILUNGSGESETZE

Es werden im folgenden drei Halbordnungsrelationen $\overset{(1)}{\leqq}$, $\overset{(2)}{\leqq}$ und $\overset{(3)}{\leqq}$ für Verteilungsgesetze auf dem R^n benutzt. Sie werden mit Hilfe gewisser Mengen von Borel-meßbaren Funktionalen des R^n definiert.

Ein Funktional f heiße isoton, falls aus $x \leqq y$ stets $f(x) \leqq f(y)$ folgt.[1]) Mit K_1 werde die Menge aller isotonen Funktionale des R^n bezeichnet und mit K_2 bzw. K_3 die Menge aller isotonen und zusätzlich stetigen und konvexen bzw. konkaven Funktionale.

Definition (vgl. [4]). Es seien P_1 und P_2 Verseilungsgesetze auf dem R^n sowie F_1 und F_2 die zugehörigen n-dimensionalen Verteilungsfunktionen. Genau dann soll geschrieben werden

$$P_1 \overset{(i)}{\leqq} P_2 \quad \text{und} \quad F_1 \overset{(i)}{\leqq} F_2\,; \quad i = 1, 2, 3\,,$$

wenn für alle Funktionale $f \in K_i$, für die die folgenden Integrale existieren, die Beziehung

$$\int_{R^n} f(x)\, P_1(\mathrm{d}x) \leqq \int_{R^n} f(x)\, P_2(\mathrm{d}x)$$

bzw.

$$\int_{R_u} f(x)\, \mathrm{d}F_1(x) = \int_{R^n} f(x)\, \mathrm{d}F_2(x)$$

erfüllt ist.

Für n-dimensionale Zufallsvektoren ξ und η bedeute

$$\xi \overset{(i)}{\leqq} \eta \quad (i = 1, 2, 3)$$

---

[1]) Hier und im folgenden bezeichnet $x \leqq y$ für Elemente des R^n die Gültigkeit von $x_i \leqq y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$); $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

das Bestehen der Relation

$$P_\xi \overset{(i)}{\leqq} P_\eta$$

für die zugehörigen erzeugten Verteilungsgesetze P_ξ und P_η auf dem R^n.

Einige wichtige Eigenschaften der Relationen $\overset{(i)}{\subseteqq}$ seien genannt.

1) Aus $\xi \overset{(i)}{\subseteqq} \eta$ mit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ folgt

$$\xi_l \overset{(i)}{\subseteqq} \eta_l\,; \quad l = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.1}$$

2) Falls die Zufallsgrößen ξ_l und η_l jeweils untereinander unabhängig sind, folgt aus (2.1) die Gültigkeit von

$$\xi \overset{(i)}{\subseteqq} \eta\,; \quad i = 1, 2, 3$$

3) Aus der JENSENschen Ungleichung folgen die Beziehungen

$$(\mathbf{E}\xi_1, \mathbf{E}\xi_2, \ldots, \mathbf{E}\xi_n) \overset{(2)}{\subseteqq} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

und

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \overset{(3)}{\subseteqq} (\mathbf{E}\xi_1, \mathbf{E}\xi_2, \ldots, \mathbf{E}\xi_n)\,. \tag{2.2}$$ [1])

Im Fall des R^1 ergeben sich für Verteilungsfunktionen folgende Vergleichbarkeitskriterien (vgl. [3]):

$$F_1 \overset{(1)}{\leqq} F_2 \Leftrightarrow F_1(t) \geqq F_2(t)\,; \quad -\infty < t < \infty \tag{2.3}$$

$$F_1 \overset{(2)}{\leqq} F_2 \Leftrightarrow tF_1(t) + \int_t^\infty \tau \, \mathrm{d}F_1(\tau) \leqq tF_2(t) + \int_t^\infty \tau \, \mathrm{d}F_2(\tau) \tag{2.4}$$

$$F_1 \overset{(3)}{\leqq} F_2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^t \tau \, \mathrm{d}F_1(\tau) + t[1 - F_1(t)] \leqq \int_{-\infty}^t \tau \, \mathrm{d}F_2(\tau) + \\ + t[1 - F_2(t)]\,; \quad -\infty < t < \infty \tag{2.5}$$

Verschiedene Kriterien, die es gestatten, die Gültigkeit von $F_1 \overset{(2)}{\leqq} F_2$ oder $F_1 \overset{(3)}{\leqq} F_2$ nachzuprüfen, ohne die obigen Ausdrücke für alle t auszurechnen, findet man in [3].

Im folgenden werden zum Beweis der Monotonieaussagen drei Hilfssätze benötigt.

---

[1]) Aus (2.2) wird sich die in der Einleitung erwähnte Extremalitätsaussage des regulären bzw. deterministischen Inputs ergeben.

Hilfssatz 1. *Es sei H_α die Verteilungsfunktion einer POISSONverteilten Zufallsgröße mit dem Parameter α. Für beliebiges $\varkappa$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ und positive α_1 und α_2 gilt*

$$(2.6)\qquad H_{\varkappa\alpha_1+(1-\varkappa)\alpha_2} \overset{(2)}{\leqq} \varkappa H_{\alpha_1} + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}{}^{1)}$$

Beweis. Mit $h_c(\tau)$ werde die folgende Funktion bezeichnet,

$$h_c(\tau) = \left[\tau + \sum_{k=0}^{c} \frac{\tau^k}{k!} e^{-\tau}(c-k)\right] \qquad c = 0, 1, 2, \ldots$$

Es seien ξ_1 und ξ_2 Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen $H_{\varkappa\alpha_1+(1-\varkappa)\alpha_2}$ und $\varkappa H_{\alpha_1} + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}$. Dann gilt für alle c ($c = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\mathbf{E} \max\{c, \xi_1\} = h_c(\varkappa\alpha_1 + (1-\varkappa)\,\alpha_2)$$
$$\mathbf{E} \max\{c, \xi_2\} = \varkappa h_c(\alpha_1) + (1-\varkappa)\, h_c(\alpha_1)$$

Nach [3] ist $h_c(\tau)$ konvex und monoton wachsend in τ für alle c; also gilt

$$(2.7)\qquad \mathbf{E} \max\{c, \xi_1\} \leqq \mathbf{E} \max\{c, \xi_2\}\ ; \quad c = 0, 1, 2, \ldots$$

Da $\mathbf{E} \max\{c, \xi_1\}$ und $\mathbf{E} \max\{c, \xi_2\}$ – als Funktionen von c aufgefaßt – stetig sind und innerhalb der Intervalle $[c, c+1]$ linear ansteigen, folgt die Gültigkeit von

$$\mathbf{E} \max\{t, \xi_1\} \leqq \mathbf{E} \max\{t, \xi_2\}$$

für alle positiven t. Für $t \leqq 0$ gilt

$$\mathbf{E} \max\{t, \xi_1\} = \mathbf{E} \max\{t, \xi_2\} = \varkappa\alpha_1 + (1-\varkappa)\,\alpha_2\,.$$

Also ist für die Verteilungsfunktionen $H_{\varkappa\alpha_1+(1-\varkappa)\alpha_2}$ und $\varkappa H_{\alpha_1} + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}$ die Bedingung (2.4) erfüllt.

Hilfssatz 2. *Es seien F_1 und F_2 n-dimensionale Verteilungsfunktionen nicht – negativer Zufallsvektoren sowie P_1 und P_2 Verteilungsgesetze auf dem R^n, die wie folgt definiert sind:*

$$P_r(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) = \int_{R^n} \frac{(\mu t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\mu t_1} \frac{(\mu t_2)^{i_2}}{i_2!} e^{-\mu t_2} \cdots \frac{(\mu t_n)^{i_n}}{i_n!} e^{-\mu t_n} \,\mathrm{d}F_r \quad (t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$r = 1, 2;\ i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty\,.$$

Aus $F_1 \overset{(i)}{\leqq} F_2$ folgt $P_1 \overset{(i)}{\leqq} P_2$; $i = 1, 2, 3$.

---

1) $\varkappa H_{\alpha_1} + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}$ bezeichnet die Verteilungsfunktion $[\varkappa H_{\alpha_1} + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}](t) = \varkappa H_{\alpha_1}(t) + (1-\varkappa)\, H_{\alpha_2}(t)$.

Beweis. Es sei h ein beliebiges Funktional des R^n, für das die beiden folgenden Integrale existieren.

$$I_r(h) = \int_{R^n} h(x)\, P_r(\mathrm{d}x) = \int_{R^n} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} h(i_1, i_2, \ldots, i_n)\,.$$

$$\cdot \frac{(\mu t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\mu t_1} \frac{(\mu t_2)^{i_2}}{i_2!} e^{-\mu t_2} \cdots \frac{(\mu t_n)^{i_n}}{i_n!} e^{-\mu t_n}\, \mathrm{d}F_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,.$$

φ_h sei das Funktional

$$\varphi_h(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} h(i_1, i_2, \ldots, i_n)\,.$$

$$\cdot \frac{(\mu t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\mu t_1} \frac{(\mu t_2)^{i_2}}{i_2!} e^{-\mu t_2} \cdots \frac{(\mu t_n)^{i_n}}{i_n!} e^{-\mu t_n}\,; \quad t_1, t_2, \ldots, t_n \geqq 0\,.$$

a) $i = 1$. Es wird gezeigt, daß für ein beliebiges isotones Funktional f des R^n das Funktional φ_f ebenfalls isoton ist. Nach Definition der Relation $\overset{(1)}{\leqq}$ folgt daraus im Fall $i = 1$ die Richtigkeit der Behauptung.

Man kann unschwer beweisen (vgl. z. B. [5]), daß für POISSON-Verteilungsfunktionen H_{α_1} und H_{α_2} aus $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ die Gültigkeit von $H_{\alpha_1} \overset{(1)}{\leqq} H_{\alpha_2}$ folgt. Entsprechend gilt für zwei Zufallsvektoren $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ mit unabhängigen, POISSON-verteilten Komponenten ξ_l und η_l mit den Parametern μt_l und $\mu t_l'$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ im Fall $t_l \leqq t_l'$ die Beziehung $\xi \overset{(1)}{\leqq} \eta$. Nach Definition der Relation $\overset{(1)}{\leqq}$ folgt dann, da f nach Voraussetzung isoton ist,

$$\varphi_f(t_1, \ldots, t_n) \leqq \varphi_f(t_1', \ldots, t_n')\,; \quad 0 \leqq t_1 \leqq t_1'\,, \quad 1 = 1, 2, \ldots, n\,.$$

b) $i = 2$. Es wird gezeigt, daß für ein beliebiges stetiges, isotones und konvexes Funktional f des R^n das Funktional φ_f ebenfalls isoton und konvex ist. Daraus folgt nach Definition der Relation $\overset{(2)}{\leqq}$ die Richtigkeit der Behauptung im Fall $i = 2$, da φ_f auch stetig ist.

Daß φ_f isoton ist, ergibt sich wie unter Punkt a.

Es seien $\varkappa$ eine beliebige reelle Zahl mit $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ und $t_1, t_1', \ldots, t_n, t_n'$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen.

$$S_1 = \varphi_f(\varkappa t_1 + (1 - \varkappa)\, t_1', \ldots, \varkappa t_n + (1 - \varkappa)\, t_n')\,,$$

$$S_2 = \varkappa \varphi_f(t_1, \ldots, t_n) + (1 - \varkappa)\, \varphi_f(t_1', \ldots, t_n')\,.$$

Man kann S_1 als Erwartungswert $\mathbf{E}\,f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eines Zufallsvektors ξ deuten, dessen untereinander unabhängige Komponenten ξ_l POISSON-verteilt sind mit den Parametern $\varkappa\mu t_1 + (1 - \varkappa)\,\mu t_1'$; entsprechend kann S_2 als Erwartungswert $\mathbf{E}\,f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ eines Zufallsvektors η aufgefaßt werden, desen untereinander unabhängige Komponenten η_l als Verteilungsfunktionen Mischungen von POISSON-Verteilungen mit den Parametern μt_l und $\mu t_l'$ haben.

Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\xi_l \overset{(2)}{\leqq} \eta_l\,; \quad l = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2.8}$$

woraus auch $\xi \overset{(2)}{\leqq} \eta$ folgt. Nach Definition der Relation $\overset{(2)}{\leqq}$ folgt, da vorausgesetzt wurde, daß f isoton, stetig und konvex ist, die Gültigkeit von $S_1 \leqq S_2$. Also ist φ_f konvex.

c) $i = 3$. Wie unter Punkt b) wird nachgewiesen, daß für ein beliebiges stetiges, isotones und konkaves Funktional f des R^n das Funktional φ_f konkav ist. Es sei

$$S_1 = \varphi_f(\varkappa t_1 + (1 - \varkappa)\,t_1', \ldots, \varkappa t_n + (1 - \varkappa)\,t_n')\,,$$
$$S_2 = \varkappa\varphi_f(t_1, \ldots, t_n) + (1 - \varkappa)\,\varphi_f(t_1', \ldots, t_n')\,.$$

S_1 und S_2 werden wie oben als Erwartungswerte $\mathbf{E}\,f(\xi)$ und $\mathbf{E}f(\eta)$ gedeutet.

Wegen

$$\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}\eta_1 = \mu[\varkappa t_1 + (1 - \varkappa)\,t_l']\,; \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

folgen aus (2.8) die Beziehungen

$$\eta_l \overset{(3)}{\leqq} \xi_l\,; \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

und

$$\eta \overset{(3)}{\leqq} \xi\,.$$

Da f nach Voraussetzung isoton, stetig und konkav ist, ergibt sich hieraus

$$\mathbf{E}f(\eta) \leqq \mathbf{E}f(\xi)\,,$$

d. h., $S_2 \leqq S_1$. Also ist φ_f konkav.

Hilfssatz 3 (vgl. [3, 4]). *Es seien f ein stetiges, antitones*[1]) *und konvexes Funktional des R^n sowie ξ und η n-dimensionale Zufallsvektoren.*

Aus $\xi \overset{(i)}{\leqq} \eta$ folgt $f(\eta) \overset{(i)}{\leqq} f(\xi)$; $i = 1, 3$.

---

[1]) D. h., aus $x \leqq y$ folgt stets $f(y) \geqq f(x)$.

3. MONOTONIESATZ FÜR SYSTEME DES TYPS $G/M/1\ (S)$

Es werden zwei Bedienungssysteme Σ_1 und Σ_2 des Typs $G/M/1\ (s)$ mit gleicher Anzahl von Warteplätzen s und gleicher mittlerer Bedienungszeit μ betrachtet, die unmittelbar vor der Ankunft der ersten Forderung leer sein sollen. Die Pausenzeiten zwischen der Ankunft der n-ten und $(n + 1)$-ten Forderung im System Σ_j seien $\alpha_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$; die Zufallsvektoren $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$ werden mit $A_n^{(j)}$ bezeichnet. Im Fall $s < \infty$ sei $\sigma_n^{(j)}$ die Gesamtanzahl der abgelehnten Forderungen bis zur Ankunft der n-ten Forderung (einschließlich) in Σ_j, $\nu_n^{(j)}$ sei die Forderungenanzahl in Σ_j unmittelbar vor der Ankunft der n-ten Forderung.

Die in der Einleitung angekündigte Monotonieaussage lautet folgendermaßen:

Satz. *Wenn die Bedingung*

$$A_n^{(1)} \overset{(i)}{\leqq} A_n^{(2)} \tag{3.1}$$

erfüllt ist, so ergibt sich für alle $k \leqq n + 1$ im Fall $s < \infty$ die Gültigkeit von

$$\sigma_k^{(2)} \overset{(i)}{\leqq} \sigma_k^{(1)} \tag{3.2}$$

und im Fall $s = \infty$

$$\nu_k^{(2)} \overset{(i)}{\leqq} \nu_k^{(1)}; \quad i = 1, 3 \tag{3.3}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{E}\sigma_k^{(2)} \leqq \mathbf{E}\sigma_k^{(1)} \quad \textit{und} \quad \mathbf{E}\nu_k^{(2)} \leqq \mathbf{E}\nu_k^{(1)}.$$

Durch die Beziehung (3.1) wird in mathematischer Form ausgedrückt, daß der Input des Systems Σ_1 „kleinere" Abstände als der des Systems Σ_2 besitzt. Entsprechend bedeuten die Beziehungen (3.2) und (3.3), daß in Σ_2 die Verluste bzw. Schlangenlängen „kleiner" als in Σ_1 sind.

In dem Fall, in dem die Inputs der Systeme Σ_1 und Σ_2 durch stationäre zufällige Punktfolgen beschrieben werden können, seien $\mathscr{P}_n^{(1)}$ und $\mathscr{P}_n^{(2)}$ die zugehörigen n-dimensionalen PALMschen Verteilungen. Der Beziehung (3.1) entspricht die Bedingung

$$\mathscr{P}_n^{(1)} \overset{(i)}{\leqq} \mathscr{P}_n^{(2)}.$$

Beweis des Satzes. Mit $\xi_n^{(j)}$ wird diejenige Anzahl von Forderungen bezeichnet, die vom System Σ_j zwischen der Ankunft der n-ten und $(n + 1)$-ten Forderung bei der Anwesenheit von unendlich vielen wartenden Forderungen hätte bedient werden können. Die Zufallsgrößen $\xi_n^{(j)}$ sind bei nicht-rekurrentem Input untereinander abhängig. Die gemeinsame Verteilungsfunktion der Größen $\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}$ ist –

wenn die Verteilungsfunktion der $A_n^{(j)}$ mit $F_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ bezeichnet wird – durch folgende Beziehung gegeben.

$$\mathbf{P}(\xi_1^{(j)} = i_1, \xi_2^{(j)} = i_2, \ldots, \xi_n^{(j)} = i_n) =$$
$$= \int_{R^n} \frac{(\mu t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\mu t_1} \frac{(\mu t_2)^{i_2}}{i_2!} e^{-\mu t_2} \ldots \frac{(\mu t_n)^{i_n}}{i_n!} e^{-\mu t_n} \, \mathrm{d}F_j(t_1, t_2, \ldots, t_n) .$$

Nach Hilfssatz 2 folgt aus

$$A_n^{(1)} \overset{(i)}{\leqq} A_n^{(2)}$$

die Gültigkeit von

$$(3.4) \qquad (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \overset{(i)}{\leqq} (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}), \quad i = 1, 3 .$$

Im Fall $s < \infty$ genügen die Forderungenanzahlen $v_n^{(i)}$ der Rekursionsbeziehung

$$(3.5) \qquad v_{n+1}^{(j)} = \max \{\min \{v_n^{(j)} + 1, s + 1\} - \xi_n^{(j)}, 0\} \; ; \quad v_1^{(j)} = 0 .$$

Die Anzahl $\lambda_n^{(j)}$ der abgelehnten Forderungen bei der Ankunft der n-ten Forderung ist gleich

$$\lambda_n^{(j)} = \max \{0, v_n^{(j)} - s\} \; ; \quad \lambda_1^{(j)} = 0.$$
$$\sigma_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(j)}$$

(Die $\lambda_n^{(j)}$ nehmen nur die Wert Null oder Eins an.)

Es seien a_n Funktionale des R^n $(n = 1, 2, \ldots)$, die wie folgt definiert sind:

$$a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + b_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) ,$$
$$b_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max \{0, c_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - s\}$$
$$c_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max \{\min \{c_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 1, s + 1\} - x_n, 0\} ,$$
$$c_1(x_1) = \max \{1 - x_1, 0\} , \quad a_0 = 0.$$

Man kann beweisen, daß für alle n die a_n stetige, konvexe und antitone Funktionale des R_+^n sind,

$$R_+^n = \{x \in R^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \geqq 0, i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Zum Beweis der Konvexität: Es seien $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen und λ eine beliebige reelle Zahl mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Durch vollständige Induktion, wobei nur elementare Abschätzungen erforderlich sind, kann gezeigt werden, daß für alle n folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$\lambda a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (1 - \lambda) \, a_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq$$
$$\geqq a_n(\lambda x_1 + (1 - \lambda) \, y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda) \, y_2, \ldots, \lambda x_n + (1 - \lambda) \, y_n) \; ;$$

$$c_n(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda) y_n) -$$
$$- \lambda c_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (1-\lambda) c_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqq$$
$$\leqq \lambda a_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + (1-\lambda) a_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) -$$
$$- a_{n-1}(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2, \ldots, \lambda x_{n-1} + (1-\lambda) y_{n-1}) .$$

Wegen Hilfssatz 3 und der Gültigkeit von

$$\sigma_k^{(j)} = a_{k-1}(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(j)}) ; \quad j = 1, 2 , \quad k = 2, 3, \ldots$$

ergibt sich aus (3.4) die Beziehung (3.2).

Im Fall $s = \infty$ vereinfacht sich (3.5) zu

$$v_{n+1}^{(j)} = \max \{v_n^{(j)} + 1 - \xi_n^{(j)}, 0\} \quad v_1^{(j)} = 0 . \tag{3.6}$$

Es kann gezeigt werden, daß folgende Funktionale d_n des $R_+^n (n = 1, 2, \ldots)$ stetig, konvex und antiton sind.

$$d_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max \{d_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 1 - x_n, 0\} ,$$
$$d_1(x_1) = \max \{1 - x_1, 0\} .$$

Wenn man den Hilfssatz 3 anwendet und

$$v_k^{(j)} = d_{k-1}(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_{k-1}^{(j)})$$

berücksichtigt, erhält man aus (3.4) die Gültigkeit von (3.3). Indem man den Satz auf spezielle Systeme anwendet, ergeben sich folgende, teilweise bereits an anderer Stelle publizierte Aussagen.

Folgerung 1 (vgl. [3]). *Bei rekurrentem Input seien $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ die Pausenzeitverteilungen der Systeme Σ_1 und Σ_2. Aus*

$$D^{(1)} \overset{(i)}{\leqq} D^{(2)} ; \quad i = 1, 3 \tag{3.7}$$

folgen dann die Beziehungen (3.2) und (3.3) für alle n.

Beweis. Aus (3.7) folgt (3.1) für alle n.

Folgerung 2 (vgl. [1]). *In Systemen des Typs $G/M/1$ (s) ergeben sich bei einem Input mit konstanten Abständen geringere Verluste ($s < \infty$) und geringere Forderungenanzahlen im System ($s = \infty$) als bei einem System mit zufälligen Pausenzeiten mit demselben Erwartungswert.*

Beweis. Es gilt (3.1) für $\mathbf{E}\alpha_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)}$; $n = 1, 2, \ldots$.

Folgerung 3. *Die Inputverteilungsgesetze der Systeme Σ_1 und Σ_2 seien so beschaffen, daß die Wahrscheinlichkeiten $p_n^{(1)}$ und $p_n^{(2)}$ dafür, daß die n-te Forderung abgelehnt wird, für $n \to \infty$ zu gewissen Grenzwerten $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ konvergieren.*[1]) *Dann folgt aus*

$$\Delta_n^{(1)} \overset{(i)}{\leqq} \Delta_n^{(2)}\,; \quad n = 1, 2, \ldots$$

die Gültigkeit von

$$p^{(1)} \geqq p^{(2)}\,.$$

Beweis. Es gilt

$$p^{(j)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}\sigma_n^{(j)}}{n}$$

(3.2) liefert $\mathbf{E}\sigma_n^{(1)} \geqq \mathbf{E}\sigma_n^{(2)}$ für alle n.

4. EIN BEISPIEL

Es wird abschließend eine Klasse nicht-rekurrenter Inputs betrachtet, für die sich leicht Bedingungen angeben lassen, die garantieren, daß (3.1) erfüllt ist.

Die Pausenzeit $\alpha_n^{(j)}$ des Systems Σ_j möge sich nach folgender Beziehung ergeben (vgl. [6]):

$$\alpha_1^{(j)} = \Delta_1^{(j)} + \delta_1^{(j)}$$

$$\alpha_n^{(j)} = \Delta_n^{(j)} + \delta_n^{(j)} - \delta_{n-1}^{(j)}\,; \quad n = 2, 3, \ldots$$

Dabei sind $\{\Delta_n^{(j)}\}_{n\in N}$ und $\{\delta_n^{(j)}\}_{n\in N}$ Folgen identisch verteilter, positiver und stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $\mathbf{P}(\Delta_n^{(j)} < \delta_n^{(j)}) = 0$. Derartige Inputs treten dann auf, wenn die Forderungen „normalerweise" in den Zeitpunkten $\tau_n^{(j)} = \Delta_1^{(j)} + \Delta_2^{(j)} + \ldots + \Delta_n^{(j)}$ eintreffen, jedoch infolge einer Verzögerung tatsächlich erst in den Zeitpunkten $t_n^{(j)} = \tau_n^{(j)} + \delta_n^{(j)}$.

Folgende *Monotonieaussage* ist gültig:

Aus

$$\Delta_n^{(1)} \overset{(3)}{\subseteq} \Delta_n^{(2)} \tag{4.1}$$

und

$$\delta_n^{(1)} \overset{(3)}{\subseteq} \delta_n^{(2)},\ \mathbf{E}\delta_n^{(1)} = \mathbf{E}\delta_n^{(2)} \tag{4.2}$$

---

[1]) In [1] wurden für Verlustsysteme ($s = 0$) und Inputs, die sich durch stationäre zufällige Punktfolgen beschreiben lassen, entsprechende Aussagen bewiesen.

folgt

$$(3.1) \qquad A_n^{(1)} \overset{(3)}{\leqq} A_n^{(2)},$$

d. h., die Beziehung (3.1) *für* $i = 3$.

Beweis. Es sei φ ein beliebiges isotones konkaves Funktional des R^n, für das die folgenden Integrale existieren. Die Verteilungsfunktionen der $\Delta_n^{(j)}$ und $\delta_n^{(j)}$ seien $D_1^{(j)}$ und $D_2^{(j)}$. Es gilt

$$I_j = \int_{R^n} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}\mathbf{P}(\alpha_1^{(j)} < x_1, \alpha_2^{(j)} < x_2, \ldots, \alpha_n^{(j)} < x_n) =$$

$$= \int_{R^n} \psi(y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_n, z_n)\, \mathrm{d}D_1^{(j)}(y_1)\, \mathrm{d}D_2^{(j)}(z_1)\, \mathrm{d}D_1^{(j)}(y_2)\, \mathrm{d}D_2^{(j)}(z_2) \ldots$$

$$\ldots \mathrm{d}D_1^{(j)}(y_n)\, \mathrm{d}D_2^{(j)}(z_n)$$

mit

$$\psi(y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_n, z_n) = \varphi(y_1 + z_1, y_2 + z_2 - z_1, \ldots, y_n + z_n - z_{n-1}).$$

Das Funktional ψ ist isoton in den y_i sowie konkav in allen Variablen. Nach Satz 3 in [3] folgt aus (4.1) und (4.2) die Gültigkeit der Ungleichung

$$I_1 \leqq I_2,$$

woraus sich nach Definition der Halbordnungsrelation $\overset{(3)}{\leqq}$ die Richtigkeit von (3.1′) ergibt.

Abschließend sei bemerkt, daß man ähnliche Monotonieaussagen wie im Satz in Abschnitt 3 auch für Systeme mit Gruppenankünften beweisen kann.

Literatur

[1] *Franken, P.:* Ein Stetigkeitssatz für Verlustsysteme. Operationsf. und Math. Statistik II, 9—23 (1970).

[2] *Stoyan, D.* und *H.:* Bedienungstheoretische Anwendungen von Halbordnungsrelationen für Verteilungsgesetze. Wiss. Zeitschrift TU Dresden 21, 519—523 (1972).

[3] *Stoyan, D.:* Monotonieeigenschaften stochastischer Modelle. Z. angew. Math. Mech. 52, 23—30 (1972).

[4] *Stoyan, D.:* Halbordnungsrelationen für Verteilungsgesetze. Math. Nachr. 52, 315—321 (1972).

[5] *Jacobs, D. R.:* Some results about stochastically ordered quenes. Techn. Report No. 154, The Johns Hopkins University, Baltimore 1971.

[6] *Winsten, C. B.:* Geometric distributions in the theory of quenes. J. Roy. Statist. Soc., Ser. B 21, 1—22 (1959).

Souhrn

VLASTNOSTI MONOTÓNNÍCH SYSTÉMŮ HROMADNÉ OBSLUHY S JEDNOU LINKOU A EXPONENCIÁLNÍM ROZLOŽENÍM DOB OBSLUHY

DIETRICH STOYAN

Pomocí tří relací částečného uspořádání definovaných na množině n-rozměrných zákonů rozložení se zkoumá obecná závislost charakteristik systémů hromadné obsluhy typu $G/M/1$ a $G/M/1\ (s)$ (tj. s omezenou frontou) na charakteristikách vstupního procesu. Ukazuje se, že vstup s „krátkými" intervaly mezi příchody dává „větší" ztráty, resp. „delší" fronty a naopak. Jako extrémní případ se opět objevuje systém $D/M/1$.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Dietrich Stoyan,* Brennstoffinstitut Freiberg, 92 Freiberg (Sachs).