Otakar Jaroch

Asymptotické vzorce Hilbova typu pro ortogonální exponenciální mnohočleny

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 4, 227–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103475`

ASYMPTOTICKÉ VZORCE HILBOVA TYPU PRO ORTOGONÁLNÍ EXPONENCIÁLNÍ MNOHOČLENY

Otakar Jaroch

(Došlo dne 23. listopadu 1971)

V článku jsou odvozeny dva asymptotické vzorce vhodné pro malé a velké hodnoty argumentu. Dále byly vypočteny koeficienty prvních dvaceti ortogonálních exponenciálních mnohočlenů.

1. ÚVOD

Ortogonální exponenciální mnohočleny definujeme takto:

$$\varphi_n(\alpha t) = \sum_{k=1}^{n} b_{nk} e^{-k\alpha t}\,; \quad \alpha > 0\,, \quad t \geqq 0\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,; \tag{1}$$

$$b_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k-1}\,; \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \varphi_m(\alpha t)\, \varphi_n(\alpha t)\, \mathrm{d}t = \delta_{mn} (2n\alpha)^{-1}\,; \tag{3}$$

$$\varphi_n(0) = 1\,, \quad \varphi_n(+\infty) = 0\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\, [4]\,. \tag{4}$$

Aproximace pomocí těchto funkcí se používá například v teorii automatické regulace a v teorii elektrických obvodů zvláště pro syntézu v časové oblasti. Srv. např. Armstrong [1], Čížek [2], Huggins [3], Jaroch [4] [5], Kautz [6], Krug [7], Laning-Battin [8], Miller-Guy [9], Totty [13], Tuttle [14].

V definiční rovnici (1) položme $\varphi_n(\alpha t) = \Phi_n(x)$, $x = e^{-\alpha t}$. Mnohočleny $\Phi_n(x)$ mají pak tyto vlastnosti:

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{nk} x^k\,, \quad 0 \leqq x \leqq 1\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,; \tag{5}$$

$$\int_0^1 x^{-1}\, \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn} (2n)^{-1}\,; \tag{6}$$

$$\Phi_n(0) = 0\,, \quad \Phi_n(1) = 1\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Snadno ověříme, že mnohočleny $\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n+1,k+1} x^k$, $\Psi_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, jsou v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ortogonální s vahou $w(x) = x$,

$$(8) \qquad \int_0^1 x\, \Psi_m(x)\, \Psi_n(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn} 2^{-1}(n+1)^{-1},$$

a zřejmě je $\Phi_n(x) = x\, \Psi_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Váha $w(x) = x$ splňuje Pearsonovu diferenciální rovnici

$$(9) \qquad \frac{w'}{w} = \frac{x-1}{x(x-1)}, \quad [17],$$

a mnohočleny $\Psi_n(x)$ jsou proto příslušným polynomiálním řešením diferenciální rovnice

$$(10) \qquad x(1-x)\, y'' + (2-3x)\, y' + n(n+2)\, y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mnohočleny $\Phi_n(x) = x\, \Psi_{n-1}(x)$ jsou tedy polynomiálním řešením lineární diferenciální rovnice

$$(11) \qquad x(1-x)\, y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

splňujícím počáteční podmínku $\Phi_n(1) = 1$.

Rovnici (11) lze ovšem vhodnými substitucemi odvodit z diferenciální rovnice pro Jacobiho mnohočleny $G_n(2, 2, x)$, $P_n^{(0,1)}(x)$ nebo $P_n^{(1,0)}(x)$, s nimiž mnohočleny $\Phi_n(x)$ velmi úzce souvisí [4].

Číselné hodnoty koeficientů b_{nk} se stoupajícím n velmi rychle rostou, takže přímý výpočet funkčních hodnot $\varphi_n(\alpha t)$ je pracný. V tomto článku odvozené dva asymptotické vzorce Hilbova typu [11] tedy zjednodušují studium chování ortogonálních funkcí $\varphi_n(\alpha t)$ pro malé a velké t a ukazují na souvislost s funkcemi Besselovými.

2. ASYMTOTICKÝ VZOREC HILBOVA TYPU PRO MALÉ t

Věta I. *Buď $\varphi_n(\alpha t) = \Phi_n(x)$; $e^{-\alpha t} = x$; $x = \cos^2 \theta_{\mathrm{I}}$; $0 < \theta_{\mathrm{I}} < \frac{1}{2}\pi$. Pro $\theta_{\mathrm{I}} \to +0$ platí*

$$(12) \qquad \Phi_n(\cos^2 \theta_{\mathrm{I}}) = (\theta_{\mathrm{I}} \operatorname{cotg} \theta_{\mathrm{I}})^{1/2} J_0(2m\, \theta_{\mathrm{I}}) + O(\theta_{\mathrm{I}}^4);$$

$m = (n^2 - \frac{1}{6})^{1/2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Vzorec I).

Důkaz. Mnohočleny $\Phi_n(x)$ jsou polynomiálním řešením rovnice (11) splňujícím podmínky $\Phi_n(0) = 0$, $\Phi_n(1) = 1$. V této diferenciální rovnici položme $x = \cos^2 \theta_{\mathrm{I}}$; $y = (\operatorname{cotg} \theta_{\mathrm{I}})^{1/2}\, z(\theta_{\mathrm{I}})$; a pro jednoduchost pišme v průběhu důkazu nadále θ místo θ_{I}. Pro $z(\theta)$ dostáváme diferenciální rovnici

$$(13) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\theta^2} + \left(4n^2 + \frac{2\cos 2\theta - 1}{\sin^2 2\theta}\right) z = 0,$$

jejímž jedním řešením je $z = (tg\, \theta)^{1/2}\, \Phi_n(\cos^2 \theta)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ Všimneme si, že v intervalu $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ konverguje rozvoj

$$\frac{2\cos 2\theta - 1}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{(2\theta)^2} - \frac{2}{3} - C(2\theta)\,; \tag{14}$$

$$C(2\theta) = \frac{11}{60}(2\theta)^2 + \frac{47}{1512}(2\theta)^4 + \ldots, \tag{15}$$

a rovnici (13) zapíšeme tedy jako

$$z'' + \left[4(n^2 - \tfrac{1}{6}) + (2\theta)^{-2}\right] z = C(2\theta)\, z(\theta)\,. \tag{16}$$

Rovnice $z'' + \left[4m^2 + (2\theta)^{-2}\right] z = 0$; $m^2 = n^2 - \frac{1}{6}$, má dvě lineárně nezávislá řešení $\theta^{1/2} J_0(2m\theta)$, $\theta^{1/2} N_0(2m\theta)$, jejichž Wronskian je $2/\pi$, [16].

Dále postupujeme podle Liouvillea a Stěklova; viz též Szegö [11] [12], Rau [10], Tricomi [18]. Řešení hledáme v tvaru $z(\theta) = A(\theta)\, \theta^{1/2} J_0(2m\theta) + B(\theta)\, \theta^{1/2} N_0(2m\theta)$ za podmínky

$$A'(\theta)\, \theta^{1/2} J_0(2m\theta) + B'(\theta)\, \theta^{1/2} N_0(2m\theta) = 0\,. \tag{17}$$

Dosadíme do (16) a pro výpočet $A'(\theta)$, $B'(\theta)$ získáváme další rovnici:

$$A'(\theta)\, [\theta^{1/2} J_0(2m\theta)]' + B'(\theta)\, [\theta^{1/2} N_0(2m\theta)]' = C(2\theta)\, z(\theta)\,. \tag{18}$$

Vypočteme

$$A'(\theta) = -\tfrac{1}{2}\pi C(2\theta)\, \theta^{1/2} N_0(2m\theta)\, z(\theta)\,, \tag{19}$$

$$B'(\theta) = \tfrac{1}{2}\pi C(2\theta)\, \theta^{1/2} J_0(2m\theta)\, z(\theta)\,. \tag{20}$$

Dále tedy

$$\begin{aligned} z(\theta) &= A\theta^{1/2} J_0(2m\theta) + B\theta^{1/2} N_0(2m\theta) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\pi\theta^{1/2} \int_{\theta_0}^{\theta} \tau^{1/2} C(2\tau)\, [J_0(2m\tau)\, N_0(2m\theta) - J_0(2m\theta)\, N_0(2m\tau)]\, z(\tau)\, d\tau\,; \end{aligned} \tag{21}$$

$A = $ konst., $B = $ konst. Protože $\tau N_0(2m\tau) \to 0$, když $\tau \to +0$, je integrand v intervalu $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, omezená a spojitá funkce, doplníme-li vhodným způsobem funkční hodnotu pro $\tau = 0$. Položíme tedy $\theta_0 = 0$ a výsledkem je Volterrova integrální rovnice

$$\begin{aligned} (\theta \operatorname{cotg} \theta)^{-1/2}\, \Phi_n(\cos^2 \theta) &= AJ_0(2m\theta) + BN_0(2m\theta) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\theta} (\tau \operatorname{tg} \tau)^{1/2}\, C(2\tau)\, [J_0(2m\tau)\, N_0(2m\theta) - J_0(2m\theta)\, N_0(2m\tau)]\, \Phi_n(\cos^2 \tau)\, d\tau\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Pro pevné m a $\theta \to +0$ použijeme následující odhady: $(\theta \operatorname{tg} \theta)^{1/2} = O(\theta)$; $(\theta \operatorname{cotg} \theta)^{1/2} = O(1)$; $C(2\theta) = O(\theta^2)$; $\Phi_n(\cos^2 \theta) = O(1)$; $J_0(2m\theta) = O(1)$; $N_0(2m\theta) =$

$= O(1) + 2\pi^{-1} J_0(2m\theta) \ln m\theta$. Dále potom platí:

$$(23) \qquad J_0(2m\tau) N_0(2m\theta) - J_0(2m\theta) N_0(2m\tau) =$$
$$= 2\pi^{-1} J_0(2m\tau) J_0(2m\theta) \ln(\theta/\tau) + O(1) = O(1) + O(1) \ln(\theta/\tau).$$

Pro integrál na pravé straně Volterrovy rovnice (22) tak dostáváme odhad

$$(24) \qquad O(1) \int_0^\theta \tau^3 \,\mathrm{d}\tau + O(1) \int_0^\theta \tau^3 \ln(\theta/\tau) \,\mathrm{d}\tau =$$
$$= O(\theta^4) + O(1)\, \theta^4 \int_0^1 t^3 \ln(t^{-1}) \,\mathrm{d}t = O(\theta^4).$$

Pro $\theta \to +0$ je v rovnici (22) na levé straně $(\theta \operatorname{cotg} \theta)^{-1/2} \Phi_n(\cos^2 \theta) \to \Phi_n(1) = 1$ a odtud nutně $A = 1$, $B = 0$. Věta je dokázána.

Poznámka 1. Pro velká n lze dále dokázat, že v intervalu $0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$; $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\pi$, platí stejnoměrně: $\Phi_n(\cos^2 \theta) = O(n^{-1/2})$ a také

$$(25) \qquad \Phi_n(\cos^2 \theta) = (\theta \operatorname{cotg} \theta)^{1/2} J_0(2n\theta) + O(n^{-3/2}).$$

Důkaz by se téměř doslova shodoval s důkazem, který v podobném případě pro Jacobiho mnohočleny podali Szegö [11] a Rau [10]. Náš odhad $O(\theta_{\mathrm{I}}^4)$, získaný přímým výpočtem z rovnic (11) a (13) pro $\theta \to +0$ je však lepší než v obecném případě pro Jacobiho mnohočleny uvádí Szegö [11].

Poznámka 2. Z věty I vyplývá bezprostředně platnost vzorce typu Mehlera-Heineho pro ortogonální exponenciální mnohočleny:

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi_n[\cos^2(\theta/n)] = \lim_{n\to\infty} \Phi_n[1 - (\theta/n)^2] = J_0(2\theta);$$

$0 \leqq \theta < \frac{1}{2}\pi$. Srv. též Poznámku 1 a [11].

3. ASYMTOTICKÝ VZOREC HILBOVA TYPU PRO VELKÉ t

Věta II. *Buď* $\varphi_n(\alpha t) = \Phi_n(x)$; $e^{-\alpha t} = x$; $x = \sin^2 \theta_{\mathrm{II}}$; $0 < \theta_{\mathrm{II}} < \frac{1}{2}\pi$. *Pro* $\theta_{\mathrm{II}} \to +0$ *platí*

$$(27) \qquad \Phi_n(\sin^2 \theta_{\mathrm{II}}) = (-1)^{n+1} (\theta_{\mathrm{II}} \operatorname{tg} \theta_{\mathrm{II}})^{1/2} J_1(2n\theta_{\mathrm{II}}) + O(\theta_{\mathrm{II}}^6);$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots \quad (\text{Vzorec II}).$$

Důkaz. V diferenciální rovnici (11) položme $x = \sin^2 \theta_{\mathrm{II}}$, $y = (\operatorname{tg} \theta_{\mathrm{II}})^{1/2} z(\theta_{\mathrm{II}})$, avšak pro jednoduchost pišme v průběhu důkazu nadále θ místo θ_{II}. Výsledkem je diferenciální rovnice

$$(28) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\theta^2} + \left(4n^2 - \frac{1 + 2\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right) z = 0,$$

jejímž jedním řešením je $z = (\operatorname{cotg}\theta)^{1/2}\,\Phi_n(\sin^2\theta)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ V intervalu $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ však konverguje rozvoj

$$\frac{1 + 2\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{3}{(2\theta)^2} - S(2\theta)\,, \tag{29}$$

$$S(2\theta) = \frac{1}{20}(2\theta)^2 + \frac{5}{504}(2\theta)^4 + \ldots \tag{30}$$

Zapíšeme tedy (28) jako

$$z'' + (4n^2 - \tfrac{3}{4}\theta^{-2})\,z = -S(2\theta)\,z(\theta)\,. \tag{31}$$

Rovnice $z'' + (4n^2 - \frac{3}{4}\theta^{-2})\,z = 0$ má však dvě lineárně nezávislá řešení $\theta^{1/2}J_1(2n\theta)$, $\theta^{1/2}N_1(2n\theta)$, jejichž Wronskian je $2/\pi$, [16]. Řešení tedy hledáme v tvaru $z(\theta) = A(\theta)\,\theta^{1/2}J_1(2n\theta) + B(\theta)\,\theta^{1/2}N_1(2n\theta)$ za podmínek:

$$A'(\theta)\,\theta^{1/2}J_1(2n\theta) + B'(\theta)\,\theta^{1/2}N_1(2n\theta) = 0\,, \tag{32}$$

$$A'(\theta)\,[\theta^{1/2}J_1(2n\theta)]' + B'(\theta)\,[\theta^{1/2}N_1(2n\theta)] = -S(2\theta)\,z(\theta)\,. \tag{33}$$

Vypočteme:

$$A'(\theta) = \tfrac{1}{2}\pi S(2\theta)\,\theta^{1/2}N_1(2n\theta)\,z(\theta)\,, \tag{34}$$

$$B'(\theta) = -\tfrac{1}{2}\pi S(2\theta)\,\theta^{1/2}J_1(2n\theta)\,z(\theta)\,. \tag{35}$$

Protože pro $\tau \to +0$ je $\tau N_1(2n\tau) \to$ konst. a $z(\tau) = (\operatorname{cotg}\tau)^{1/2}\,\Phi_n(\sin^2\tau) \to 0$, dostáváme podobně jako v předcházejícím paragrafu Volterrovu integrální rovnici

$$\begin{aligned}(\theta\operatorname{tg}\theta)^{-1/2}\,\Phi_n(\sin^2\theta) &= AJ_1(2n\theta) + BN_1(2n\theta) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\theta(\tau\operatorname{cotg}\tau)^{1/2}\,S(2\tau)\,[J_1(2n\tau)\,N_1(2n\theta) - \\ &- J_1(2n\theta)\,N_1(2n\tau)]\,\Phi_n(\sin^2\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \tag{36}$$

Pro pevné n a $\theta \to +0$ použijeme následující odhady: $(\theta\operatorname{tg}\theta)^{1/2} = O(\theta)$; $(\theta\operatorname{cotg}\theta)^{1/2} = O(1)$; $S(2\theta) = O(\theta^2)$; $J_1(2n\theta) = O(n\theta)$; $N_1(2n\theta) = O(n^{-1}\theta^{-1})$; $\Phi_n(\sin^2\theta) = O(\theta^2)$. Dále tedy pro $\theta \to +0$, $\tau \to +0$: $J_1(2n\tau)\,N_1(2n\theta) = \theta^{-1}O(\tau)$; $J_1(2n\theta)\,N_1(2n\tau) = \theta O(\tau^{-1})$ a

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\pi\int_0^\theta(\tau\operatorname{cotg}\tau)^{1/2}\,S(2\tau)\,[J_1(2n\tau)\,N_1(2n\theta) - \\ &- J_1(2n\theta)\,N_1(2n\tau)]\,\Phi_n(\sin^2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= O(1)\,\theta^{-1}\int_0^\theta\tau^5\,\mathrm{d}\tau + O(1)\,\theta\int_0^\theta\tau^3\,\mathrm{d}\tau = O(\theta^5)\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Protože $(\theta \operatorname{tg} \theta)^{1/2} = O(\theta)$, je výsledný odhad $O(\theta^6)$. K určení konstant A, B násobme rovnici (36) na obou stranách výrazem θ^{-1}. Pro $\theta \to +0$ je na levé straně: $\theta^{-1} \,.\, (\theta \operatorname{tg} \theta)^{-1/2} \Phi_n(\sin^2 \theta) \to \theta^{-2} \Phi_n(\theta^2) \to b_{n1} = (-1)^{n+1} n$. Jelikož $\lim_{\theta \to +0} \theta^{-1} J_1(2n\theta) = n$ a $\theta^{-1} N_1(2n\theta) = O(\theta^{-2})$, $\theta \to +0$, je třeba volit $A = (-1)^{n+1}$, $B = 0$. Věta je dokázána.

Poznámka 3. Pro velká n lze opět dokázat, že v intervalu $0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$; $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\pi$, platí stejnoměrně:

$$\Phi_n(\sin^2 \theta) = (-1)^{n+1} (\theta \operatorname{tg} \theta)^{1/2} J_1(2n\theta) + O(n^{-3/2})\,; \tag{38}$$

srv. Poznámku 1. Důkaz by opět byl parafrází podobných důkazů pro Jacobiho mnohočleny, které uvádějí Szegö [11] a Rau [10].

4. NUMERICKÉ VÝSLEDKY

(A) Vzorce I a II. Hodnoty vypočtené podle (12) a (27), vzorce I a II, srovnáme s přesnými funkčními hodnotami ortogonálních funkcí $\varphi_1(\alpha t)$, $\varphi_5(\alpha t)$, $\varphi_{15}(\alpha t)$ v bodech, které byly pro usnadnění výpočtu voleny tak, aby funkční hodnoty $\varphi_n(\alpha t)$ byly racionální. Výsledky jsou v tabulce I.

Tabulka I.

Srovnání správných funkčních hodnot $\varphi_n(t)$ s hodnotami vypočtenými podle asymptotických vzorců I a II.

$t =$	0	0,0101	0,1054	0,2877	0,6931	1,3863	2,3026	4,6052	6,9078	$+\infty$
x	1	0,99	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001	0
θ_{I}	0	0,1002	0,3218	0,5236	0,7854	1,0472	1,2490	1,4706	1,5392	$\frac{1}{2}\pi$
θ_{II}					$\theta_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\pi - \theta_{\mathrm{I}}$					
$\varphi_1(t)$	1	0,9900	0,9000	0,7500	0,5000	0,2500	0,1000	0,0100	0,0010	0
vz. I	1	0,9900	0,8995	0,7304	0,4860	0,2138	0,0427	−0,0165	−0,0417	0
vz. II	$+\infty$	1,3796	0,9632	0,7661	0,5023	0,2502	0,1000	0,0100	0,0010	0
$\varphi_5(t)$	1	0,7647	−0,3163	−0,0996	0,1875	−0,1895	0,0833	0,0442	0,0049	0
bz. I	1	0,7647	−0,3163	−0,0990	0,1859	−0,1875	0,0890	0,0068	−0,0179	0
vz. II	$+\infty$	0,7821	−0,3233	−0,0972	0,1872	−0,1895	0,0833	0,0442	0,0049	0
$\varphi_{15}(t)$	1	−0,2609	−0,2118	−0,1336	−0,1047	0,0765	0,0418	0,0338	0,0134	0
vz. I	1	−0,2609	−0,2118	−0,1337	−0,1045	0,0770	0,0433	0,0115	0,0047	0
vz. II	$+\infty$	−0,2746	−0,2128	−0,1340	−0,1047	0,0764	0,0418	0,0338	0,0134	0

(B) Koeficienty b_{nk}. První členové posloupnosti ortogonálních funkcí $\varphi_n(\alpha t)$ jsou: $\varphi_1(\alpha t) = e^{-\alpha t}$, $\varphi_2(\alpha t) = -2e^{-\alpha t} + 3e^{-2\alpha t}$, $\varphi_3(\alpha t) = 3e^{-\alpha t} - 12e^{-2\alpha t} + 10e^{-3\alpha t}, \ldots$ Koeficienty b_{nk} pro $n = 1, 2, \ldots, 10$ byly uveřejněny v tomto časopise v práci [4]. Pro $n = 1, 2, \ldots, 20$ tyto koeficienty ochotně spočetl ing. T. S. Moore z výpočtového střediska University vědy a techniky v Kumasi (Ghana; počítač IBM 1620). Výsledky jsou v tabulce II. Poznámka: pro všechna přirozená n platí $\sum_{k=1}^{n} b_{nk} = 1$.

Tabulka II.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_{n1}	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9	−10
b_{n2}	0	3	−12	30	−60	105	−168	252	−360	495
b_{n3}	0	0	10	−60	210	−560	1260	−2520	4620	−7920
b_{n4}	0	0	0	35	−280	1260	−4200	11550	−27720	60060
b_{n5}	0	0	0	0	126	−1260	6930	−27720	90090	−252252
b_{n6}	0	0	0	0	0	462	−5544	36036	−168168	630630
b_{n7}	0	0	0	0	0	0	1716	−24024	180180	−960960
b_{n8}	0	0	0	0	0	0	0	6435	−102960	875160
b_{n9}	0	0	0	0	0	0	0	0	24310	−437580
b_{n10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	92378

$n =$	11	12	13	14	15
b_{n1}	11	−12	13	−14	15
b_{n2}	−660	858	−1092	1365	−1680
b_{n3}	12870	−20020	30030	−43680	61880
b_{n4}	−120120	225225	−400400	680680	−1113840
b_{n5}	630630	−1441440	3063060	−6126120	11639628
b_{n6}	−2018016	5717712	−14702688	34918884	−77597520
b_{n7}	4084080	−14702688	46558512	−133024320	349188840
b_{n8}	−5250960	24942060	−99768240	349188840	−1097450640
b_{n9}	4157010	−27713400	145495350	−640179540	2454021570
b_{n10}	−1847560	19399380	−142262120	818007190	−3926434512
b_{n11}	352716	−7759752	89237148	−713897184	4461857400
b_{n12}	0	1352078	−32449872	405623400	−3515402800
b_{n13}	0	0	5200300	−135207800	1825305300
b_{n14}	0	0	0	20058300	−561632400
b_{n15}	0	0	0	0	77558760

Tabulka II (pokračování).

$n =$	16	17	18	19	20
b_{n1}	-16	17	-18	19	-20
b_{n2}	2040	-2448	2907	-3420	3990
b_{n3}	-85680	116280	-155040	203490	-263340
b_{n4}	1763580	-2713200	4069800	-5969040	8580495
b_{n5}	-21162960	37035180	-62674920	102965940	-164745504
b_{n6}	162954792	-325909584	624660036	-1153218528	2059318800
b_{n7}	-853572720	1963217256	-4283383104	8923714800	-17847429600
b_{n8}	3155170590	-8413788240	21034470600	-49717839600	111865139100
b_{n9}	-8413788240	26293088250	-75957810500	205086088350	-522037315800
b_{n10}	16360143800	-60766248400	205086088350	-638045608200	1850332263780
b_{n11}	-23201658480	104407463160	-417629852640	1513908215820	-5046360719400
b_{n12}	23728968900	-132882225840	642264091560	-2752560392400	10666171520550
b_{n13}	-17036182800	123512325300	-741073951800	3828882084300	-17503460956800
b_{n14}	8143669800	-81436698000	631134409500	-4039260220800	22215931214400
b_{n15}	-2326762800	36064823400	-384691449600	3173704459200	-21581190322560
b_{n16}	300540195	-9617286240	158685222960	-1798432526880	15736284610200
b_{n17}	0	1166803110	-39671305740	694247850450	-8330974205400
b_{n18}	0	0	4537567650	-163352435400	3022020054900
b_{n19}	0	0	0	17672631900	-671560012200
b_{n20}	0	0	0	0	68923264410

5. DODATEK. EXTRÉMY ORTOGONÁLNÍCH FUNKCÍ $\varphi_n(\alpha t)$

O lokálních extrémech ortogonálních exponenciálních mnohočlenů platí

Věta III. *Označme* t_i; $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, *body, v nichž ortogonální exponenciální mnohočlen* $\varphi_n(\alpha t)$, n *přirozené,* $\alpha > 0$, $t \geqq 0$, *dosahuje lokálního maxima nebo minima*; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = +\infty$. *Platí*: $1 = \varphi_0(0) > |\varphi_n(\alpha t_1)| > |\varphi_n(\alpha t_2)| > \ldots > |\varphi_n(\alpha t_{n-1})| > \varphi_n(+\infty) = 0$.

Důkaz. Substitucí $x = e^{-\alpha t}$ přejde $\varphi_n(\alpha t)$ v mnohočlen $\Phi_n(x)$, který vyhovuje diferenciální rovnici (11) a pro který platí analogická věta o lokálních extrémech, označíme-li $x_i = \exp(-\alpha t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Posloupnost funkčních hodnot nyní ovšem monotónně roste. Zaveďme pomocnou funkci (mnohočlen):

$$n^2 f(x) = n^2 \Phi_n^2(x) + x(1 - x) [\Phi_n'(x)]^2 . \tag{39}$$

Protože pro lokální extrémy platí $\Phi_n'(x_i) = 0$, je zřejmě

$$f(x_i) = \Phi_n^2(x_i) , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n . \tag{40}$$

Derivujme (39) a připomeňme definiční diferenciální rovnici (11) pro mnohočleny $\Phi_n(x)$. Dostaneme:

$$n^2 f'(x) = \Phi_n'[\Phi_n' + 2n^2 \Phi_n - 2x \Phi_n' + 2x(1 - x) \Phi_n''] , \tag{41}$$

neboli

$$f'(x) = n^{-2}[\Phi_n'(x)]^2 . \tag{42}$$

Je tedy $f'(x) > 0$ téměř všude v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Výjimkou jsou lokální extrémy, pro něž je $\Phi_n'(x_i) = 0$ a $\Phi_n''(x_i) \neq 0$. Mnohočlen $f(x)$ je tedy v $\langle 0, 1 \rangle$ neklesající funkce. S ohledem na (40) je proto

$$0 = \Phi_n(0) < |\Phi_n(x_1)| < |\Phi_n(x_2)| < \ldots < |\Phi_n(x_{n-1})| < \Phi_n(1) = 1 . \tag{43}$$

Věta je dokázána.

Poznámka 4. Ortogonální exponenciální mnohočleny $\varphi_n(\alpha t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jsou tedy v intervalu $\langle 0, +\infty)$ omezené. Pro všechna přirozená n platí $|\varphi_n(\alpha t)| \leqq \varphi_n(0) = 1$; $|\Phi_n(x)| \leqq \Phi_n(1) = 1$.

Poznámka 5. Pro $x \to +0$ je dále podle definičních rovnic (5) a (2):

$$\Phi_n(x) = (-1)^{n+1} nx + O(x^2); \quad n \text{ přirozené} . \tag{44}$$

6. ZÁVĚR

Protože definice (1) dává funkční hodnoty ortogonálních exponenciálních mnohočlenů v podstatě jako rozdíl velkých čísel, není definiční vzorec zvláště vhodný pro numerický výpočet pro velká n. V článku odvozené dva asymptotické vzorce proto usnadňují studium chování ortogonálních funkcí $\varphi_n(\alpha t)$ a numerický výpočet jejich funkčních hodnot pro malé a velké hodnoty argumentu t. Metoda odvození použitá v článku ovšem není nová a tímto způsobem byly podobné vzorce odvozeny pro mnohočleny Jacobiho [10] [11] [12], které s ortogonálními exponenciálními mnohočleny souvisí [4] [7]. V souvislosti s funkcemi $\varphi_n(\alpha t)$ jsme však vzorce Hilbova typu v dostupné literatuře nenalezli. Hodnoty koeficientů b_{nk} pro $n = 11, 12, \ldots, 20$ rovněž nebyly v dostupné literatuře dosud uveřejněny. Přímým výpočtem asymptotických vzorců z příslušné diferenciální rovnice dále bylo možno dokázat pro $t \to +0$ vzorec o něco přesnější než by vyplývalo ze známých vztahů pro Jacobiho mnohočleny [11]. Srovnání numerických výsledků v tabulce I ilustruje užitečnost odvozených vzorců.

Autor je zavázán díky vedoucímu katedry matematiky na elektrotechnické fakultě ČVUT, prof. dr. J. Fáberovi, a rektorovi university v Kumasi, dr. E. Evans-Anfomovi, za podporu při dokončování numerických výpočtů.

Literatura

[1] *Armstrong M. L.:* On the representation of transients by series of orthogonal functions. IRE Trans. CT-6 (1959), č. 4, str. 351—354.

[2] *Čížek V.:* Metody synthesy v časové oblasti, ÚRE-ČSAV, Studijní zpráva Z-44, Praha 1960.

[3] *Huggins W. M.:* Network approximation in the time domain. Air Force Cambridge Research Report, 1949.

[4] *Jaroch O.:* Aproximace exponenciálními funkcemi. Aplikace matematiky sv. 7 (1962), č. 4, str. 249—264.

[5] *Jaroch O.:* O jedné metodě numerické zpětné Laplaceovy transformace. Práce ČVUT, řada VI., č. 1, díl I (1961), str. 332—339.

[6] *Kautz W. H.:* Approximation over a semi-infinite interval, M.Sc. thesis, Massachussetts Institute of Technology, 1949.

[7] *Круг Н. К.:* Расчет четырехполюсников по заданным напряжениям (импулсьам) входа и выхода. Труды МЭИ, вып. XIV., ГЭИ Москва—Ленинград 1953, стр. 7—18

[8] *Laning J. H., Battin R. H.:* Random processes in automatic control. McGraw-Hill 1956, ruský překlad IIL Moskva 1958.

[9] *Miller M. K., Guy W. T.:* Numerical Inversion of the Laplace Transform by use of Jacobi Polynomials. SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 3 (1966), č. 4, str. 624—635.

[10] *Rau H.:* Über eine asymptotische Darstellung der Jacobischen Polynome durch Besselsche Funktionen. Mathematische Zeitschrift, sv. 40 (1936), str. 683—692.

[11] *Szegö G.:* Orthogonal Polynomials. New York 1959, American Mathematical Society; ruský překlad GIFML Moskva 1962.

[12] *Szegö G.:* Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwissenschaftliche Klasse, sv. 10 (1933), str. 35—112.

[13] *Totty R. E.:* Error expressions for exponential function approximation, IEEE Transactions on Circuit Theory, CT-13 (1966), č. 4, str. 455—458.

[14] *Tuttle D. F.:* Network synthesis for prescribed transient response, D.Sc. thesis, Massachussetts Institute of Technology, 1948.

[15] *Курант Р., Гильберт Д.:* Методы математической дизики, ГИТТЛ Москва—Ленинград 1951; překlad z němčiny.

[16] *Jahke-Emde*: Tafeln höherer Funktionen, 5. vyd., B. G. Teubner, Leipzig 1952.

[17] *Лаврентьев М. А. Шабат Б. В.:* Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ Москва 1958.

[18] *Tricomi F. G.:* Differential Equations. 1961; ruský překlad IIL Moskva 1962.

Souhrn

HILB TYPE ASYMPTOTIC FORMULAE FOR ORTHOGONAL EXPONENTIAL POLYNOMIALS

Otakar Jaroch

The coefficients b_{nk} in $\varphi_n(t) = b_{n1}e^{-t} + b_{n2}e^{-2t} + \ldots + b_{nn}e^{-nt}$ can be so chosen that $\{\varphi_n(t)\}$ is a set of orthogonal functions in $L_2(0, +\infty)$. Orthogonal functions $\varphi_n(t)$, named here orthogonal exponential polynomials, are useful for the solution

of approximation problems occuring in the theory of automatic control, electric circuit theory, and elsewhere. As can be seen from Table II, the sequence of coefficients b_{nk} is rapidly divergent. A value of $\varphi_n(t)$ is thus given as a small difference of very large numbers, making direct calculation virtually impossible for n sufficiently large.

In this paper the following two asymptotic formulae have been derived; describing the behaviour of orthogonal exponential polynomials for very small and very large values of t respectively: –

$$\varphi_n(-2 \ln \cos \theta) \sim (\theta \operatorname{cotg} \theta)^{1/2} J_0(2m\theta), \quad \theta \to +0;$$
$$\varphi_n(-2 \ln \sin \theta) \sim (-1)^{n+1} (\theta \operatorname{tg} \theta)^{1/2} J_1(2n\theta), \quad \theta \to +0.$$

These results are named Hilb type formulae with reference to the general theory of orthogonal polynomials (Szegö, Hilb, Rau). Several values of $\varphi_1(t)$, $\varphi_5(t)$, and $\varphi_{15}(t)$ have been calculated to illustrate the degree of approximation obtained. A table of coefficients b_{nk} for $n = 1$ to 20 is also included.

Adresa autora: Doc. Dr. *Otakar Jaroch,* P. O. Box 217, 111 21 Praha 1.